数理解析研究所講究録 1461 巻 2005 年 47-61

凸計画問題と関連する反復法

高阪 史明 (Fumiaki Kohsaka), 高橋 渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
(Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology)

1 はじめに

最適化問題や変分問題の中には、極大単調作用素 T の零点を求める問題

$$0 \in Tz \tag{1}$$

に帰着されるものがある。実際、凸最小化問題、変分不等式問題、ミニ・マックス問題に対応した極大単調作用素が存在し、それらの解集合は (1) の解集合と一致する。1970 年、Martinet [17] により導入された近接点法 (proximal point algorithm) は、この問題の近似的な解法の一つとして知られている。

E を Hilbert 空間とし、$T : E \to 2^E$ を極大単調作用素とする (T は E の点を E の部分集合に写す集合値写像である)。近接点法では、初期点 $x_1 = x \in E$ からスタートし、主問題 (1) を解く代わりに各ステップにおいて、部分問題

$$x_n \in x_{n+1} + r_n T x_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{2}$$

を解く。ここで、$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ である。1976 年に得られた Rockafellar の定理 [24] により、$\liminf_n r_n > 0$ で $T^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば、$\{x_n\}$ は $T^{-1}0$ の点に弱収束する。ここで、

$$J_r(x) = \{z \in E : x \in z + rTz\} \,(= (I + rT)^{-1}(x)) \quad (x \in E,\ r > 0)$$

で定まる T の resolvent $J_r : E \to E$ を用いると、(2) は

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

となる。この写像は一価の非拡大写像となり、その不動点集合が (1) の解集合と一致する。すなわち、次の二つの性質がある。

(a) $\|J_r x - J_r y\| \le \|x - y\|\ (x, y \in E)$

(b) $J_r z = z \Longleftrightarrow 0 \in Tz$

極大単調作用素 T が proper で下半連続な凸関数の劣微分 ∂f のとき、(2) は

$$x_{n+1} = \arg\min_{y \in E} \left\{ f(y) + \frac{1}{2r_n}\|y - x_n\|^2 \right\}\ (n = 1, 2, \dots) \tag{4}$$

となる。この場合、$\{x_n\}$ は f の最小点に弱収束する。また、$T : E \times F \to 2^{E \times F}$ を saddle function L から定まる極大単調作用素とする (Rockafellar [23])。ここで、X と Y はそれぞれ Hilbert 空間 E と F のの空でない閉凸集合で、$L : X \times Y \to \mathbb{R}$ は第一変数について上半連続な凹関数で、第二変数について下半連続な凸関数であるとする。このとき、(2) は

$$L_n(u, x_{n+1}) \le L_n(x_{n+1}, y_{n+1}) \le L_n(x_{n+1}, v)\ \ (u \in X,\ v \in Y,\ n = 1, 2, \dots) \tag{5}$$

と同値である。ただし、

$$L_n(u, v) = L(u, v) - \frac{1}{2r_n}\|u - x_n\|_E^2 + \frac{1}{2r_n}\|v - y_n\|_F^2\ \ ((u, v) \in X \times Y,\ n \in \mathbb{N})$$

である。すなわち (x_{n+1}, y_{n+1}) は L_n の鞍点である。この場合、$\{(x_n, y_n)\}$ は L の鞍点に弱収束する (詳しくは [16, 30] を参照するとよい)。

Banach 空間における非線形集合値写像の中に、単調作用素と増大作用素がある。Hilbert 空間では両者は同じ概念となるが、Banach 空間では一般に異なる。前者は、凸最適化問題、変分不等式、ミニ・マックス問題等と関連し、後者は、発展方程式や非拡大写像に対する不動点理論と関わりがある。また、E が Banach 空間で T が m-増大作用素の場合には上記の (a) と (b) が成り立つ。しかし、T が極大単調作用素の場合は、(b) は成り立つが、(a) は一般には成り立たない。Hilbert 空間における 1976 年の Rockafellar による研究以降、近接点法に関する様々な研究がなされてきた。2000 年、上村と高橋 [11, 12] は Banach 空間における増大作用素に対し、次の二つの近接点法を導入した。

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n\ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{6}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n\ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{7}$$

ここで、$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である。彼らは、(6) が増大作用素の零点に強収束すること及び (7) が増大作用素の零点に弱収束することを証明した。

一方、Bregman 距離 [3, 7] に適する Censor と Reich [8] の意味での凸結合と、Banach 空間上の極大単調作用素に対する上村と高橋 [13] による hybrid 型

強収束定理に動機づけられて、高阪と高橋 [14] 及び上村、高阪と高橋 [9] は、滑らかで一様凸な Banach 空間における極大単調作用素に対し、次の二つの近接点法をそれぞれ導入した。

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1-\alpha_n)JJ_{r_n}x_n) \ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{8}$$

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JJ_{r_n}x_n) \ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{9}$$

ここで、通常の凸結合でなく双対写像 $J : E \to E^*$ を用いた形で点列が定義されている。[9, 14] により、(8) が極大単調作用素の零点に強収束すること及び (9) が極大単調作用素の零点に弱収束することが示された。E が Hilbert 空間の場合、J は E 上の恒等写像となり、(6) と (7) はそれぞれ、(8) と (9) に一致する。以上の結果は、上村と高橋 [10] による Hilbert 空間における強収束定理と弱収束定理を Banach 空間における増大作用素と単調作用素に対して拡張する定理であった。また (9) で $\alpha_n = 0$ とすると

$$x_{n+1} = J_{r_n}x_n \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

となり、Banach 空間上の Rockafellar 型近接点法に対する弱収束定理が得られる。非線形作用素に対する不動点近似法と近接点法への応用に関しては、高橋 [26, 27] 及びその参考文献を参照すると良い。また、Hilbert 空間における非線形解析学と凸解析学については高橋 [30] を参照せよ。

最近になり、Otero と Svaiter [18] は Bregman 関数を用いた hybrid 型の近接点法の研究をし、Banach 空間における極大単調作用素の零点への強収束定理を得ている。この結果は、上村と高橋 [13] の強収束定理を Bregman 関数を用いて一般化するものであった。より最近になり、高阪と高橋 [15] は Bregman 関数を用いて (8) 及び (9) の形の近接点法をより一般的に論じた。本稿では、[15] で取り扱われた次の二種類の近接点法に関する結果を報告する。

$$x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x) + (1-\alpha_n)\nabla g(J_{r_n}x_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{10}$$

$$x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla g(J_{r_n}x_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots) \tag{11}$$

ここで、$g : E \to \mathbb{R}$ は微分可能な凸関数で、さらに幾つかの条件を満たす関数である (この関数を Bregman 関数という)。特に、滑らかな一様凸 Banach 空間において $g = \|\cdot\|^2/2$ の場合、$\nabla g = J$ 及び $\nabla g^* = J^{-1}$ が成り立つので、(10) と (11) はそれぞれ、(8) と (9) と一致する。Banach 空間上の Bregman 関数を用いた近接点法の研究としては、[1, 2, 4, 5, 6, 19] 等がある。

2 準備

EをBanach空間とし、E^*をその双対空間とする。SとBでそれぞれEの単位球面と閉単位球を表す。$T : E \to 2^{E^*}$が単調作用素であるとは、

$$\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$$

がすべての$(x, x^*), (y, y^*) \in G(T)$に対して成り立つことをいう。ここで、$G(T)$は$T$のグラフ

$$\{(x, x^*) : x^* \in Tx\}$$

を表す。さらに、単調作用素Tが極大であるとは、Tのグラフを真に含むE上の単調作用素が存在しないことをいう。言い換えれば、これは

$$\langle x-a, x^*-a^* \rangle \geq 0 \ \ ((x, x^*) \in G(T))$$

ならば$(a, a^*) \in G(T)$となることと同値である。このとき、$T^{-1}0$が閉凸集合となることは容易に示せる。関数$f : E \to (-\infty, \infty]$がproperであるとは、$f$のeffective domain $D(f) = \{x \in E : f(x) \in \mathbb{R}\}$が空でないことをいう。関数$f$が凸であるとは、

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

がすべての$x, y \in E$と$\alpha \in (0,1)$について成り立つことをいう。また、fが狭義凸であるとは、

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

がすべての$x, y \in D(f)$ $(x \neq y)$と$\alpha \in (0,1)$について成り立つことをいう。さらに、fが下半連続であるとは、すべての$r \in \mathbb{R}$に対し

$$\{x \in E : f(x) \leq r\}$$

が閉集合となることをいう。properで下半連続な凸関数$f : E \to (-\infty, \infty]$の$x \in E$における劣微分は$E^*$の閉凸部分集合

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle y-x, x^* \rangle f(y) \ \ (y \in E)\}$$

のことである。Rockafellarによる凸解析学の基本定理[20, 21]により$\partial f : E \to 2^{E^*}$は極大単調作用素となる。また、$(\partial f)^{-1}(0) = \{z \in E : f(z) = \inf_{x \in E} f(x)\}$

となる。properで下半連続な凸関数 $f : E \to (-\infty, \infty]$ の共役関数 $f^* : E^* \to (-\infty, \infty]$ は

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E}\{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} \quad (x^* \in E^*)$$

で定義される。この関数 f^* は、properでweak*の意味で下半連続な凸関数となる。凸解析学と非線形解析学に関しては、高橋 [28, 29, 30] を参照すると良い。

E をBanach空間とし、$g : E \to (-\infty, \infty]$ をproperで下半連続な凸関数とする。このとき、g が $x \in \mathrm{Int}D(g)$ においてGâteaux微分可能であるとは、ある $x^* \in E^*$ が存在して

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(x + ty) - g(x)}{t} = \langle y, x^* \rangle$$

がすべての $y \in E$ について成り立つことをいう。このとき、$\partial g(x) = \{x^*\}$ となり、$\nabla g(x) = \partial g(x)$ と表記する。properで下半連続な凸関数 g が $\mathrm{Int}D(g)$ でGâteaux微分可能であるとする。この関数 g から定まるBregman距離とは、

$$D(x, y) = g(x) - g(y) - \langle x - y, \nabla g(y) \rangle \quad (x \in E,\ y \in \mathrm{Int}D(g)) \tag{12}$$

のことをいう。この概念はBregman [3] により導入され、CensorとLent [7] によりBregman距離と名付けられた。一般に、関数 D は距離の公理を満たすとは限らない。本稿では、関数 g は実数値であるとし ($D(g) = E$ を仮定し)、次をBregman関数の定義とする。

定義 2.1. E をBanach空間とするとき、関数 $g : E \to \mathbb{R}$ がBregman関数であるとは、g が以下の条件を満たすことをいう。

(1) g は連続な狭義凸関数であり、E 上でGâteaux微分可能である。

(2) すべての $x \in E$ と $r > 0$ に対し

$$\{y \in E : D(x, y) \leq r\}$$

は有界である。

関数 $g : E \to \mathbb{R}$ が有界集合上で有界であるとは、E の任意の有界部分集合の g による像が有界となることをいう。同様に、Gâteaux微分可能な関数 $g : E \to \mathbb{R}$ に対し、∇g が有界集合上で有界であるとは、E の任意の有界部分集合の ∇g による像が有界となることをいう。また、∇g が点列的に弱連続であるとは、$\{z_n\}$ が z に弱収束するとき、$\{\nabla g(z_n)\}$ が $\nabla g(z)$ に汎弱収束することをいう。さらに、g がstrongly coerciveであるとは、

$$\|z_n\| \to \infty \Longrightarrow \frac{g(z_n)}{\|z_n\|} \to \infty$$

が成り立つことをいう。E を回帰的な Banach 空間、g を strongly coercive な Bregman 関数とし、$C \subset E$ を空でない閉凸集合とする。このとき、任意の $x \in E$ に対し

$$D(x_0, x) = \min_{y \in C} D(y, x)$$

を満たす $x_0 \in C$ が一意的に存在する。空間 E から C 上への Bregman projection $P_C : E \to C$ は $P_C(x) = x_0$ $(x \in E)$ で定義される。また、$T : E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とするとき、任意の $x \in E$ と $r > 0$ に対し

$$\nabla g(x) \in \nabla g(x_r) + rTx_r$$

を満たす $x_r \in E$ が一意的に存在する ([15, 18])。T の resolvent $J_r : E \to E$ は $J_r x = x_r$ $(x \in E)$ で定義される。P_C と J_r は次の性質をもつことが知られている。

$$D(u, P_C x) + D(P_C x, x) \leq D(u, x) \ \ (u \in C,\, x \in E) \tag{13}$$

$$D(u, J_r x) + D(J_r x, x) \leq D(u, x) \ \ (u \in T^{-1}0,\, x \in E) \tag{14}$$

また、次の関数は本稿において重要な役割を果たす。

定義 2.2 ([32]). E を Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を連続な凸関数とする。このとき、g が有界集合上で一様凸であるとは、すべての $r, t > 0$ に対し、$\rho_r(t) > 0$ となることをいう。ただし、

$$\rho_r(t) = \inf_{x,y \in rB,\, \|x-y\|=t,\, \alpha \in (0,1)} \frac{\alpha g(x) + (1-\alpha) g(y) - g(\alpha x + (1-\alpha) y)}{\alpha(1-\alpha)} \tag{15}$$

である。

定義 2.3 ([32]). E を Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を連続な凸関数とする。このとき、g が有界集合上で一様に滑らかであるとは、すべての $r > 0$ に対し、$\lim_{t \downarrow 0} \sigma_r(t)/t = 0$ となることをいう。ただし、

$$\sigma_r(t) = \sup_{x \in rB,\, y \in S,\, \alpha \in (0,1)} \frac{\alpha g(x + (1-\alpha) t y) + (1-\alpha) g(x - \alpha t y) - g(x)}{\alpha(1-\alpha)} \tag{16}$$

である。

次の定理が成り立つ。

定理 2.4 ([32]). E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を有界集合上で有界な連続凸関数とする。このとき、以下は同値である。

(1) g が strongly coercive で有界集合上で一様凸である。

(2) $D(g^*) = E^*$ であり、g^* は有界集合上で有界かつ一様に滑らかである。

(3) $D(g^*) = E^*$ であり、g^* は Fréchet 微分可能で ∇g^* は有界集合上でノルムの意味で一様連続である。

定理 2.5 ([32]). E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive で連続な凸関数とする。このとき、以下は同値である。

(1) g が有界集合上で有界かつ一様に滑らかである。

(2) g が Fréchet 微分可能でかつ ∇g が有界集合上でノルムの意味で一様連続である。

(3) $D(g^*) = E^*$ であり、g^* は strongly coercive かつ有界集合上で一様凸である。

また、次の定理も知られている。

定理 2.6 ([32]). E を Banach 空間とし、$p \in (1, \infty)$ とする。また、$g = \|\cdot\|^p/p$ とする。このとき、以下は同値である。

(1) E が一様凸であるための必要十分条件は、g が有界集合上で一様凸となることである。

(2) E が一様に滑らかであるための必要十分条件は、g が有界集合上で一様に滑らかとなることである。

Bregman 関数及び Bregman 距離の諸性質やそれらの最適化理論への応用については、Butnariu–Iusem [6] を参照せよ。また、一様凸関数や一様に滑らかな関数については、Zălinescu [31, 32] を参照すると良い。

3 結果

次の強収束定理が本稿の主結果の一つである。

定理 3.1 ([15]). E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive な Bregman 関数で、有界集合上で有界かつ一様凸であるものとする。また、$T : E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とし、$J_r = (\nabla g + rT)^{-1}\nabla g$ $(r > 0)$ とする。$x_1 = x \in E$ とし、

$$x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x) + (1 - \alpha_n)\nabla g(J_{r_n} x_n)) \;\; (n = 1, 2, \dots)$$

とする。ただし、$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき、$T^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば $\{x_n\}$ は $P_{T^{-1}0}(x)$ に強収束する。

定理 3.1 の証明の概略. P で $P_{T^{-1}0}$ を表す。関数 g に対する仮定より、$\nabla g : E \to E^*$ は全単射であり、$\nabla g^* = (\nabla g)^{-1}$ となる。よって、$\{x_n\}$ は well-defined である。まず、(14) を用いると

$$D(Px, x_{n+1}) \leq \alpha_n D(Px, x) + (1-\alpha_n) D(Px, x_n) \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

が得られる。これより、$D(Px, x_n) \leq D(Px, x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ となる。g が Bregman 関数であることから $\{x_n\}$ は有界である。

次に、g は strongly coercive で、さらに有界集合上で一様凸であるので、定理 2.4 により、$D(g^*) = E^*$ であり、∇g^* は有界集合上で一様連続である。この性質と (13) 及び T の極大性を用いると、

$$\limsup_{n\to\infty} \langle x_n - Px, \nabla g(x) - \nabla g(Px) \rangle \leq 0$$

を証明することができる。

よって、$\varepsilon > 0$ に対しある $m \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\langle x_n - Px, \nabla g(x) - \nabla g(Px) \rangle < \varepsilon \ \ (n \geq m)$$

となる。次に、$\lim_n \alpha_n = 0$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ を用いて

$$\limsup_{n\to\infty} D(Px, x_n) \leq \varepsilon$$

を証明する。これより $\lim_n D(Px, x_n) = 0$ を得る。ここで、g の有界集合上での一様凸性を再び用いて

$$\lim_{n\to\infty} \|Px - x_n\| = 0$$

を示す。 □

さらに、次の弱収束定理も証明できる。

定理 3.2 ([15]). E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive な Bregman 関数で、有界集合上で有界、一様凸かつ一様に滑らかであるものとする。また、∇g が点列的に弱連続であるとする。さらに、$T : E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とし、$J_r = (\nabla g + rT)^{-1}\nabla g$ $(r > 0)$ とする。$x_1 = x \in E$ とし、

$$x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla g(J_{r_n}x_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

とする。ただし、$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \ \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき、$T^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば $\{x_n\}$ は $\{P_{T^{-1}0}(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する。

この定理で、$\alpha_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ とすると、次の弱収束定理を得る。

系 3.3 ([15]). E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive な Bregman 関数で、有界集合上で有界、一様凸かつ一様に滑らかであるものとする。また、∇g が点列的に弱連続であるとする。さらに、$T : E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とする。$x_1 = x \in E$ とし、

$$\nabla g(x_n) \in \nabla g(x_{n+1}) + r_n T x_{n+1} \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

とする。ただし、$\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\liminf_n r_n > 0$ を満たすとする。このとき、$T^{-1}0 \neq \emptyset$ であれば $\{x_n\}$ は $\{P_{T^{-1}0}(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する。

定理 3.2 の証明には、次の補題を用いた。

補題 3.4 ([15]). E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive な Bregman 関数で、有界集合上で有界かつ一様凸であるものとする。また、$T : E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素で $T^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たすものとし、$J_r = (\nabla g + rT)^{-1}\nabla g$ $(r > 0)$ とする。$x_1 = x \in E$ とし、

$$x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla g(J_{r_n}x_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots)$$

とする。ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$、$\{r_n\} \subset (0,\infty)$ とする。このとき、$\{P_{T^{-1}0}(x_n)\}$ は $T^{-1}0$ の Cauchy 列となり、

$$\lim_{n\to\infty} D(z, x_n) = \min\Big\{\lim_{n\to\infty} D(y, x_n) : y \in T^{-1}0\Big\}$$

の一意解 z に強収束する。

定理3.1及び3.2において、gを滑らかで一様凸なBanach空間における関数$\|\cdot\|^p/p$ $(1<p<\infty)$とすると、次の二つの収束定理を得ることができる。特に$p=2$の場合、これらの結果はそれぞれ[14]及び[9]で得られた結果と一致する。

系 3.5 ([15]). Eを滑らかで一様凸なBanach空間とし、J_pを$\omega(t)=t^{p-1}$をweight functionとするEからE^*への双対写像とする。ここで、$p\in(1,\infty)$とする。また、$T:E\to 2^{E^*}$を極大単調作用素とし、$Q_r=(J_p+rT)^{-1}J_p$ $(r>0)$とする。$x_1=x\in E$とし、

$$x_{n+1}=J_p^{-1}(\alpha_n J_p(x)+(1-\alpha_n)J_p(Q_{r_n}x_n))\ \ (n=1,2,\dots)$$

とする。ただし、$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$と$\{r_n\}\subset(0,\infty)$は

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty,\ \ \lim_{n\to\infty}r_n=\infty$$

を満たすとする。このとき、$T^{-1}0\neq\emptyset$であれば$\{x_n\}$は$P_{T^{-1}0}(x)$に強収束する。ただし、$P_{T^{-1}0}$は$\|\cdot\|^p/p$から定まるBregman距離である。

系 3.6 ([15]). Eを一様に滑らかで一様凸なBanach空間とし、J_pを$\omega(t)=t^{p-1}$をweight functionとするEからE^*への双対写像とする。ここで、$p\in(1,\infty)$とする。また、J_pは点列的に弱連続であるとする。$T:E\to 2^{E^*}$を極大単調作用素とし、$Q_r=(J_p+rT)^{-1}J_p$ $(r>0)$とする。$x_1=x\in E$とし、

$$x_{n+1}=J_p^{-1}(\alpha_n J_p(x_n)+(1-\alpha_n)J_p(Q_{r_n}x_n))\ \ (n=1,2,\dots)$$

とする。ただし、$\{\alpha_n\}\subset[0,1]$と$\{r_n\}\subset(0,\infty)$は

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<1,\ \ \liminf_{n\to\infty}r_n>0$$

を満たすとする。このとき、$T^{-1}0\neq\emptyset$であれば$\{x_n\}$は$\{P_{T^{-1}0}(x_n)\}$の強収束極限に弱収束する。ただし、$P_{T^{-1}0}$は$\|\cdot\|^p/p$から定まるBregman距離である。

4 凸計画問題への応用

Eを回帰的なBanach空間とし、$f,f_1,f_2,\dots,f_m:E\to\mathbb{R}$を有限個の連続凸関数とする。このとき、次の凸計画問題(CP)を考える。

$$\text{(CP)}\quad f(z)=\min_{y\in C}f(y)$$

ここで、C はこの問題の制約領域 $\bigcap_{i=1}^m\{x \in E : f_i(x) \leq 0\}$ を表す。また、(CP) の解集合

$$\left\{z \in C : f(z) = \min_{y \in C} f(y)\right\}$$

を S で表す。定理 3.1 を用いると、次の定理を得ることができる。

系 4.1. E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive な Bregman 関数で、有界集合上で有界かつ一様凸であるものとする。また、$f, f_1, f_2, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ を連続な凸関数とし、(CP) の解集合 S が空でないとする。$x_1 = x \in E$ とし、

$$\begin{cases} y_n = \arg\min_{y\in C}\left\{f(y) + \dfrac{1}{2r_n}D(y, x_n)\right\}; \\ x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x) + (1-\alpha_n)\nabla g(y_n)) \;\; (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

とする。ただし、$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \;\; \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする。このとき、$\{x_n\}$ は $P_S(x)$ に強収束する。

証明. proper で下半連続な凸関数 $\phi : E \to (-\infty, \infty]$ を

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in C); \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する。このとき、

$$S = \{z \in E : \phi(z) = \min_{y\in E} \phi(y)\} = (\partial\phi)^{-1}(0)$$

である。Rockafellar の定理 [20, 21] により $\partial\phi$ は極大単調作用素である。

そこで、$r > 0$、$J_r = (\nabla g + r\partial\phi)^{-1}\nabla g$ とし、$x_r = J_r x$ とおく。このとき、

$$\nabla g(x) \in \partial g(x_r) + r\partial\phi(x_r)$$

となる。これは、

$$x_r = \arg\min_{y\in E}\left\{\phi(y) + \frac{1}{2r}D(y, x)\right\} = \arg\min_{y\in C}\left\{f(y) + \frac{1}{2r}D(y, x)\right\}$$

と同値である。よって、$y_n = J_{r_n}x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となる。ここで、定理 3.1 を用いると $\{x_n\}$ が $P_S(x)$ に強収束することが分かる。 □

同様に、定理3.2を用いると次を得ることができる。

系 4.2. E を回帰的な Banach 空間とし、$g : E \to \mathbb{R}$ を strongly coercive な Bregman 関数で、有界集合上で有界、一様凸かつ一様に滑らかであるものとする。また、∇g が点列的に弱連続であるとする。さらに、$f, f_1, f_2, \dots, f_m : E \to \mathbb{R}$ を連続な凸関数とし、(CP) の解集合 S が空でないとする。$x_1 = x \in E$ とし、

$$\begin{cases} y_n = \arg\min_{y \in C}\Big\{ f(y) + \dfrac{1}{2r_n} D(y, x_n) \Big\}; \\ x_{n+1} = \nabla g^*(\alpha_n \nabla g(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla g(y_n)) \ \ (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする。ただし、$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \ \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする。このとき、$\{x_n\}$ は $\{P_S(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する。

参考文献

[1] H. H. Bauschke, J. M. Borwein and P. L. Combettes, *Bregman monotone optimization algorithms*, SIAM J. Control Optim. **42** (2003), 596–636.

[2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Construction of best Bregman approximations in reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3757–3766.

[3] L. M. Bregman, *The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming*, USSR Comput. Math. Math. Phys. **7** (1967), 200–217.

[4] R. S. Burachik and S. Scheimberg, *A proximal point method for the variational inequality problem in Banach spaces*, SIAM J. Control. Optim. **39** (2000), 1633–1649.

[5] D. Butnariu and A. N. Iusem, *On a proximal point method for convex optimization in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **18** (1997), 723–744.

[6] D. Butnariu and A. N. Iusem, *Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000).

[7] Y. Censor and A. Lent, *An iterative row-action method for interval convex programming*, J. Optim. Theory Appl. **34** (1981), 321–353.

[8] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[9] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math. **3** (2000), 107–115.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[14] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Proximal point algorithms with Bregman functions in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., in press.

[16] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for minimax problems in Banach spaces*, Proceedings of the Third International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W.

Takahashi and T. Tanaka Eds., Tokyo, 2003), 203–215, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004.

[17] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158.

[18] R. G. Otero and B. F. Svaiter, *A strongly convergent hybrid proximal method in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **289** (2004), 700–711.

[19] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distance*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), 313–318, Dekker, New York 1996.

[20] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[21] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.

[22] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[23] R. T. Rockafellar, *Monotone operators associated with saddle-functions and minimax problems*, Nonlinear Functional Analysis, Part I (F. E. Browder Ed.), Symposia in Pure Math. Vol. 18, Amer. Math. Soc., 241–250, Providence RI, 1970.

[24] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[25] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1283–1293.

[26] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[27] W. Takahashi, *Fixed point theorems and proximal point algorithms*, Proceedings of the Second International Conference on Nonlinear Analysis

and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds., Hirosaki, 2001), 471–481, Yokohama Publishers, Yokohama, 2003.

[28] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

[29] 高橋 渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書 (2000).

[30] 高橋 渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書 (2005).

[31] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.

[32] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge NJ, (2002).

高阪 史明
〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1
東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
kohsaka9@is.titech.ac.jp

高橋 渉
〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1
東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
wataru@is.titech.ac.jp