数理解析研究所講究録 1464 巻 2006 年 8-19

微分型非線形シュレディンガー方程式の孤立波の安定性

埼玉大学理学部数学科　太田 雅人 (Masahito Ohta)
Department of Mathematics, Faculty of Science
Saitama University

本稿は, Mathieu Colin (Université Bordeaux I) との共同研究 [3] に基づく.

§1. 序

本稿では, derivative nonlinear Schrödinger equation (DNLS):

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\partial_x(|u|^2 u) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1}$$

の孤立波解の安定性について考える. DNLS はプラズマ物理などに現れる (たとえば [13, 14]). また, 完全可積分系であることも知られている (たとえば [10, 11]) が, 本稿では, その観点は用いない. DNLS に対する初期値問題は, ソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R})$ において時間局所的に適切である. また, 初期データ $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が $\|u_0\|_{L^2}^2 < 2\pi$ をみたせば, DNLS の解は時間大域的に存在することが知られている ([7, 8, 9, 19]) が, $\|u_0\|_{L^2}^2 \geq 2\pi$ のとき有限時間で爆発する解が存在するかどうかは未解決である. 本稿には必要ないが, DNLS に対する初期値問題の $H^s(\mathbb{R})$ における適切性は $s<1$ のときにも調べられている ([1, 21, 22]).

さて, DNLS (1) は, $u_{\omega,c}(t,x)$

$$= \phi_{\omega,c}(x-ct)\exp\left\{i\omega t + i\frac{c}{2}(x-ct) - \frac{3}{4}i\int_{-\infty}^{x-ct}|\phi_{\omega,c}(\eta)|^2 d\eta\right\} \tag{2}$$

という形の孤立波解をもつことが知られている．ここで，$(\omega,c)\in\mathbb{R}^2$，$c^2<4\omega$ で

$$\phi_{\omega,c}(x)=\left[\frac{\sqrt{\omega}}{4\omega-c^2}\left\{\cosh(\sqrt{4\omega-c^2}\,x)-\frac{c}{2\sqrt{\omega}}\right\}\right]^{-1/2}. \tag{3}$$

また，$\phi_{\omega,c}$ は

$$-\partial_x^2\phi+\left(\omega-\frac{c^2}{4}\right)\phi+\frac{c}{2}|\phi|^2\phi-\frac{3}{16}|\phi|^4\phi=0,\quad x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

の正値解であることに注意する．ここで，本稿の主結果を述べる．

定理 1　$c^2<4\omega$ をみたす任意の $(\omega,c)\in\mathbb{R}^2$ に対して，DNLS (1) の孤立波解 $u_{\omega,c}(t)$ は軌道安定である．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して，次の性質をみたす $\delta>0$ が存在する：$u_0\in H^1(\mathbb{R})$ が $\|u_0-u_{\omega,c}(0)\|_{H^1}<\delta$ をみたすならば，$u(0)=u_0$ なる DNLS (1) の解 $u(t)$ は時間大域的に存在し

$$\sup_{t\ge 0}\inf_{(\theta,y)\in\mathbb{R}^2}\|u(t)-e^{i\theta}u_{\omega,c}(t,\cdot+y)\|_{H^1}<\varepsilon.$$

注 1　Guo and Wu [6] は，$c<0$ かつ $c^2<4\omega$ のとき，$u_{\omega,c}(t)$ の軌道安定性を示しているが，$c\ge 0$ の場合は考察されていない．[6] の証明は，Grillakis, Shatah and Strauss [5] の一般論と線形化作用素のスペクトル解析に基づいているが，軌道安定性の十分条件を与える定理 ([6, Theorem 2]) の証明は明確に書かれていない．本稿の目的は，孤立波に関連する変分法を用いて，定理 1 を示すことである．その証明では，線形化作用素のスペクトル解析は用いない．

注 2　$w_{\omega,c}(t,x)=e^{i(\omega-c^2/4)t}\phi_{\omega,c}(x)$ は

$$i\partial_t w+\partial_x^2 w-\frac{c}{2}|w|^2w+\frac{3}{16}|w|^4w=0$$

の孤立波解である．$w_{\omega,c}(t)$ は，$c<0$ のとき，任意の $\omega>c^2/4$ に対して軌道安定であり，$c\ge 0$ のとき，任意の $\omega>c^2/4$ に対して軌道不安定である ([17])．実際，

$$\|\phi_{\omega,c}\|_{L^2}^2=8\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sqrt{\omega}+c}{2\sqrt{\omega}-c}}$$

より, $\omega \mapsto \|\phi_{\omega,c}\|_{L^2}^2$ は, $c<0$ のとき狭義単調増加, $c>0$ のとき狭義単調減少だから, Grillakis, Shatah and Strauss [5] の一般論より, $c \neq 0$ のときの軌道安定性・不安定性が従う. また, $c \geq 0$ のときは, 軌道不安定性より強く, $w_{\omega,c}(t)$ は爆発不安定であることが知られている ([23, 18]).

注 3 すでに述べたように, 初期データ $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が $\|u_0\|_{L^2}^2 < 2\pi = \|\phi_{\omega,0}\|_{L^2}^2$ をみたせば, DNLS (1) の解は時間大域的に存在することが知られているが, $\|u_0\|_{L^2}^2 \geq 2\pi$ のとき有限時間で爆発する解が存在するかどうかは未解決である. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\|u_{\omega,c}(t)\|_{L^2}^2 = \|\phi_{\omega,c}\|_{L^2}^2$ であり, $c<0$ のとき $\|\phi_{\omega,c}\|_{L^2}^2 < 2\pi$. また, $c>0$ のとき $2\pi < \|\phi_{\omega,c}\|_{L^2}^2 < 4\pi$ である. 定理 1 より, $c \geq 0$ のときも DNLS (1) の孤立波解 $u_{\omega,c}(t)$ は軌道安定だから, その近傍から出発した解は時間大域的に存在することが分かる.

以下, 定理 1 の証明の概略を述べるが, 詳細については [3] を参照していただきたい.

§2. Gauge 変換

後の都合上, DNLS (1) を一般化した形の方程式

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u + i\mu u^2\partial_x\bar{u} + a|u|^2u + b|u|^4u = 0 \tag{5}$$

について考える. ここで, λ, μ, a, $b \in \mathbb{R}$. DNLS (1) は, (5) において $\lambda=2$, $\mu=1$, $a=b=0$ とした場合である.

$\nu \in \mathbb{R}$ に対して, 非線形の gauge 変換 $G_\nu : H^1(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R})$ を

$$G_\nu(u)(x) = u(x)\exp\left(\nu i\int_{-\infty}^{x}|u(\eta)|^2 d\eta\right) \tag{6}$$

と定義する. このとき, $v(t) = G_\nu(u(t))$ により, (5) は係数は異なるが, 同じ形の方程式

$$i\partial_t v + \partial_x^2 v + i\tilde{\lambda}|v|^2\partial_x v + i\tilde{\mu}v^2\partial_x\bar{v} + a|v|^2v + \tilde{b}|v|^4v = 0 \tag{7}$$

に変換される. ここで,

$$\tilde{\lambda} = \lambda - 2\nu, \quad \tilde{\mu} = \mu - 2\nu, \quad \tilde{b} = b + \nu\left(\nu + \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{2}\mu\right).$$

Gauge 変換 (6) は, 微分型非線形 Schrödinger 方程式 (5) に対して広く用いられ (たとえば [7, 8, 9, 19, 21, 22]), その目的に応じて, 変換後の方程式 (7) の係数が都合がよくなるようにパラメータ ν が選ばれる.

ここでは, まず, $v(t)=G_{1/2}(u(t))$ により, DNLS (1) を

$$i\partial_t v+\partial_x^2 v+i|v|^2\partial_x v=0 \tag{8}$$

に変換する. このとき, エネルギー E を

$$E(v)=\frac{1}{2}\|\partial_x v\|_2^2+\frac{1}{4}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}|v|^2\bar{v}\partial_x v\,dx$$

と定めると, (8) はハミルトン形 $\partial_t v=-iE'(v)$ に書け, 孤立波解の安定性を議論するのに都合がよい. また, 電荷 Q と運動量 P を

$$Q(v)=\frac{1}{2}\|v\|_2^2,\quad P(v)=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}\bar{v}\partial_x v\,dx$$

と定めると, E, Q, P は (8) の保存量であることが分る.

次に, (8) の $v(t,x)=e^{i\omega t}\varphi(x-ct)$ という形の孤立波解について考える. ここで, $(\omega,c)\in\mathbb{R}^2$ で, $\varphi\in H^1(\mathbb{R})$ は

$$-\partial_x^2\varphi+\omega\varphi+ic\partial_x\varphi-i|\varphi|^2\partial_x\varphi=0,\quad x\in\mathbb{R} \tag{9}$$

の非自明な解である. また, 汎関数 $S_{\omega,c}:H^1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} &S_{\omega,c}(v)=E(v)+\omega Q(v)+cP(v)\\ =\ &\frac{1}{2}\|\partial_x v\|_2^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_2^2-\frac{c}{2}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}\bar{v}\partial_x v\,dx+\frac{1}{4}\operatorname{Im}\int_{\mathbb{R}}|v|^2\bar{v}\partial_x v\,dx\end{aligned}$$

と定めると, (9) は $S'_{\omega,c}(\varphi)=0$ とかける. よって, $S_{\omega,c}$ の非自明な臨界点全体を $\mathcal{G}_{\omega,c}$ とおくと, $\varphi\in\mathcal{G}_{\omega,c}$ ならば, $e^{i\omega t}\varphi(x-ct)$ は (8) の孤立波解である. ここで, (9) の解の構造を調べるために, (9) を

$$\phi(x)=G_{1/4}(\varphi)(x)\exp\left(-\frac{c}{2}ix\right) \tag{10}$$

により

$$-\partial_x^2\phi+\left(\omega-\frac{c^2}{4}\right)\phi+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{\phi}\partial_x\phi)\phi+\frac{c}{2}|\phi|^2\phi-\frac{3}{16}|\phi|^4\phi=0 \tag{11}$$

に変換する. $c^2<4\omega$ のとき, (3) で与えられる $\phi_{\omega,c}$ は (4) の正値解だから, $\phi_{\omega,c}$ は (11) の解でもある. よって,

$$\varphi_{\omega,c}(x)=\phi_{\omega,c}(x)\exp\left(\frac{c}{2}ix-\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{x}|\phi_{\omega,c}(\eta)|^2d\eta\right) \tag{12}$$

は (9) をみたす. よって, $v_{\omega,c}(t,x):=e^{i\omega t}\varphi_{\omega,c}(x-ct)$ は (8) の孤立波解であり, (2) で与えられる $u_{\omega,c}(t)=G_{-1/2}(v_{\omega,c}(t))$ は DNLS (1) の孤立波解であることが確かめられた.

注 上の議論では, 実数値解に対しては, (4) と (11) が同値であることを用いたが, 一般に, (11) の解 $\phi\in H^1(\mathbb{R})$ は (4) をみたす. 実際, $f=\mathrm{Re}\,\phi$, $g=\mathrm{Im}\,\phi$,

$$A(\phi)=\left(\omega-\frac{c^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{\phi}\partial_x\phi)+\frac{c}{2}|\phi|^2-\frac{3}{16}|\phi|^4$$

とおくと, $A(\phi)$ は実数値関数だから, $f''=A(\phi)f$, $g''=A(\phi)g$ をみたす. また, $\mathrm{Im}(\bar{\phi}\partial_x\phi)=fg'-f'g$ だから, $\partial_x\mathrm{Im}(\bar{\phi}\partial_x\phi)=fg''-f''g=0$. さらに, $\phi\in H^1(\mathbb{R})$ だから, $\mathrm{Im}(\bar{\phi}\partial_x\phi)\equiv 0$ となり, ϕ は (4) をみたすことが示された.

$H^1(\mathbb{R})$ に属する (4) の非自明な解は, 平行移動と偏角の違いを除いて一意的だから, 上の議論と合わせて, 次の命題を得る.

命題 2 $c^2<4\omega$ のとき

$$\mathcal{G}_{\omega,c}=\{e^{i\theta}\varphi_{\omega,c}(\cdot+y):(\theta,y)\in\mathbb{R}^2\}.$$

$G_\nu:H^1(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})$ は同相写像だから, (1) の孤立波解 $u_{\omega,c}(t)=G_{-1/2}(v_{\omega,c}(t))$ の安定性は, (8) の孤立波解 $v_{\omega,c}(t)$ の安定性に帰着される.

§3. $v_{\omega,c}(t)$ の安定性

この節では, (8) の孤立波解 $v_{\omega,c}(t,x)=e^{i\omega t}\varphi_{\omega,c}(x-ct)$ の軌道安定性について考える. 以下, $c^2<4\omega$ なる $(\omega,c)\in\mathbb{R}^2$ に対して, $d(\omega,c)=S_{\omega,c}(\varphi_{\omega,c})$ とおく. この関数 $d(\omega,c)$ を用いて, 軌道安定性の十分条件を与える.

定理 3　$c_0^2 < 4\omega_0$ とする. $\langle d'(\omega_0, c_0), \xi\rangle \neq 0$ かつ $\langle d''(\omega_0, c_0)\xi, \xi\rangle > 0$ をみたす $\xi \in \mathbb{R}^2$ が存在するならば, (8) の孤立波解 $v_{\omega_0,c_0}(t)$ は軌道安定である.

ここで, $S'_{\omega,c}(\varphi_{\omega,c}) = 0$ より, $\partial_\omega d(\omega, c) = Q(\varphi_{\omega,c}) > 0$, $\partial_c d(\omega, c) = P(\varphi_{\omega,c})$ に注意する. 定理 3 の系として, 次の十分条件を得る.

系 4　$c_0^2 < 4\omega_0$ とする. $\det[d''(\omega_0, c_0)] < 0$ または $\partial_\omega^2 d(\omega_0, c_0) > 0$ ならば, (8) の孤立波解 $v_{\omega_0,c_0}(t)$ は軌道安定である.

$v_{\omega,c}(t)$ の軌道安定性は系 4 と次の補題 5 から従う. 特に, $c < 0$ のときは $\partial_\omega^2 d(\omega, c) > 0$ より, 軌道安定性が分かるが, $c \geq 0$ のときは $\partial_\omega^2 d(\omega, c) \leq 0$ だから, これだけでは, 軌道安定性は分からないことに注意する.

補題 5　$c^2 < 4\omega$ をみたす任意の (ω, c) に対して,

$$
\begin{aligned}
&Q(\varphi_{\omega,c}) = 4\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sqrt{\omega}+c}{2\sqrt{\omega}-c}}, \quad P(\varphi_{\omega,c}) = \sqrt{4\omega - c^2}, \\
&\det[d''(\omega, c)] = -\frac{1}{\omega} < 0.
\end{aligned}
$$

補題 5 は, φ の具体的な表示 (12), (3) を用いて, 初等的計算により示される. 定理 3 の証明については, 次節以降でその概略を述べる.

§4. $\varphi_{\omega,c}$ の変分的特徴付け

定理 3 の証明では, $\varphi_{\omega,c}$ の変分的特徴付けが重要な役割を果たす. 以下, $c^2 < 4\omega$ とし, $u \in H^1(\mathbb{R})$ に対して

$$
\begin{aligned}
L_{\omega,c}(u) &= \|\partial_x u\|_2^2 + \omega\|u\|_2^2 - c\,\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} \bar{u}\partial_x u\, dx, \\
N(u) &= -\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\bar{u}\partial_x u\, dx, \\
K_{\omega,c}(u) &= L_{\omega,c}(u) - N(u)
\end{aligned}
$$

とおく. このとき,

$$
S_{\omega,c}(u) = \frac{1}{2}L_{\omega,c}(u) - \frac{1}{4}N(u)
$$

であり，$K_{\omega,c}(u) = \partial_\lambda S_{\omega,c}(\lambda u)|_{\lambda=1}$ に注意する．また，$v \in \mathcal{G}_{\omega,c}$ ならば $S'_{\omega,c}(v) = 0$ だから，$K_{\omega,c}(v) = 0$ をみたすことに注意する．そこで，次の制約条件付き最小化問題

$$\mu(\omega, c) = \inf\{S_{\omega,c}(u) : u \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ K_{\omega,c}(u) = 0\}. \tag{13}$$

を考え，その最小化元全体を

$$\mathcal{M}_{\omega,c} = \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : S_{\omega,c}(\varphi) = \mu(\omega, c),\ K_{\omega,c}(\varphi) = 0\}$$

とおく．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 6 $\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R})$ が $S_{\omega,c}(u_n) \to \mu(\omega, c)$, $K_{\omega,c}(u_n) \to 0$ をみたすならば，$\{y_n\} \subset \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{M}_{\omega,c}$ が存在して，$\{u_n(\cdot - y_n)\}$ は v に $H^1(\mathbb{R})$ で強収束する部分列をもつ．

命題 6 の証明は，変分法の標準的な方法で示されるので省略するが，最小化列のコンパクト性については，Fröhlich, Lieb and Loss [4], Lieb [12], Brézis and Lieb [2] による次の補題 7, 8 を用いる．補題 7, 8 を用いた同様の議論は，たとえば [15, 18] などで用いられている．

補題 7 $\{f_n\}$ を $H^1(\mathbb{R})$ の有界列とし，$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_p > 0$ をみたす $p \in (2, \infty)$ の存在を仮定する．このとき，$\{y_n\} \subset \mathbb{R}$, $f \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ が存在して，$\{f_n(\cdot + y_n)\}$ は f に $H^1(\mathbb{R})$ で弱収束する部分列をもつ．

補題 8 $1 \le p < \infty$ とし，$\{f_n\}$ は $L^p(\mathbb{R})$ の有界列とする．このとき，$f_n \to f$ a.e. in $\mathbb{R}$ ならば，$\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p - \|f\|_p^p \to 0$.

次の命題により，(12) で与えられる (9) の解 $\varphi_{\omega,c}$ は (13) の最小化元として特徴付けられる．

命題 9 $c^2 < 4\omega$ に対して，$\mathcal{M}_{\omega,c} = \mathcal{G}_{\omega,c}$. 特に，$d(\omega, c) = \mu(\omega, c)$.

証明 まず，$\mathcal{M}_{\omega,c} \subset \mathcal{G}_{\omega,c}$ を示す．$\varphi \in \mathcal{M}_{\omega,c}$ とすると，Lagrange 乗数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して，$S'_{\omega,c}(\varphi) = \lambda K'_{\omega,c}(\varphi)$. このとき，

$$0 = K_{\omega,c}(\varphi) = \langle S'_{\omega,c}(\varphi), \varphi\rangle = \lambda\langle K'_{\omega,c}(\varphi), \varphi\rangle.$$

また, $K_{\omega,c}(\varphi)=0$ より, $\langle K'_{\omega,c}(\varphi),\varphi\rangle = 2L_{\omega,c}(\varphi)-4N(\varphi) = -2L_{\omega,c}(\varphi)$ で, $L_{\omega,c}(\varphi)>0$ だから, $\lambda=0$. よって, $\varphi\in\mathcal{G}_{\omega,c}$. 故に, $\mathcal{M}_{\omega,c}\subset\mathcal{G}_{\omega,c}$. 逆の包含関係は, 命題 2 より従う. □

§5. 定理 3 の証明

§4 で与えた孤立波解の変分的特徴づけと Shatah [20] の論法に基づき, 定理 3 を証明の概略を述べる ([16] も参照). Shatah [20] では, 非線形 Klein-Gordon 方程式の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性が議論されている. これは 1 パラメータ ω に対する結果であり, 本稿では, 2 パラメータ (ω,c) をもつ場合を考察していることに注意する.

まず, $c^2<4\omega$ に対して

$$\mathcal{A}^+_{\omega,c}=\{v\in H^1(\mathbb{R})\setminus\{0\}: S_{\omega,c}(v)<d(\omega,c),\ K_{\omega,c}(v)>0\},$$
$$\mathcal{A}^-_{\omega,c}=\{v\in H^1(\mathbb{R})\setminus\{0\}: S_{\omega,c}(v)<d(\omega,c),\ K_{\omega,c}(v)<0\},$$
$$\mathcal{B}^+_{\omega,c}=\{v\in H^1(\mathbb{R})\setminus\{0\}: S_{\omega,c}(v)<d(\omega,c),\ N(v)<4d(\omega,c)\},$$
$$\mathcal{B}^-_{\omega,c}=\{v\in H^1(\mathbb{R})\setminus\{0\}: S_{\omega,c}(v)<d(\omega,c),\ N(v)>4d(\omega,c)\},$$

とおくと, $S_{\omega,c}$ が (8) の保存量であること及び $d(\omega,c)=\mu(\omega,c)$ など変分的特徴づけから, $\mathcal{A}^+_{\omega,c}=\mathcal{B}^+_{\omega,c}$, $\mathcal{A}^-_{\omega,c}=\mathcal{B}^-_{\omega,c}$ であり, $\mathcal{B}^\pm_{\omega,c}$ は (8) の流れに関して不変な集合である, すなわち, $\mathcal{B}^\pm_{\omega,c}$ から出発した (8) の解は存在する限り, $\mathcal{B}^\pm_{\omega,c}$ に属することが分かる.

次に, $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$ を定理 3 に現れるベクトルとし, $\tau=0$ の近傍で, 関数 $h(\tau)=d((\omega_0,c_0)+\tau\xi)$ を考える. このとき, 定理 3 の仮定より, $h'(0)=\langle d'(\omega_0,c_0),\xi\rangle\neq 0$, $h''(0)=\langle d''(\omega_0,c_0)\xi,\xi\rangle>0$. 一般性を失うことなく, $h'(0)>0$ としてよい. このとき, $\varepsilon_0>0$ が存在して, $|\tau|<\varepsilon_0$ ならば, $h'(\tau)>0$, $h''(\tau)>0$. 定理 3 の証明の鍵となるのは, 次の補題である.

補題 10 任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ に対して, $\delta>0$ が存在して, $u_0\in H^1(\mathbb{R})$ が $\|u_0-\varphi_{\omega_0,c_0}\|_{H^1}<\delta$ をみたすならば, u_0 を初期データとする (8) の解 $u(t)$ は存在する限り, $4h(-\varepsilon)<N(u(t))<4h(\varepsilon)$ をみたす.

証明 h は単調増加だから, $h(-\varepsilon) < h(0) < h(\varepsilon)$. また, $K_{\omega_0,c_0}(\varphi_{\omega_0,c_0}) = 0$ より, $4h(0) = 4d(\omega_0, c_0) = 4S_{\omega_0,c_0}(\varphi_{\omega_0,c_0}) = N(\varphi_{\omega_0,c_0})$. よって, $\|u_0 - \varphi_{\omega_0,c_0}\|_{H^1} < \delta$ ならば, $4h(0) = N(u_0) + O(\delta)$ より, 十分小さい δ に対して $4h(-\varepsilon) < N(u_0) < 4h(\varepsilon)$. さらに, $h(\pm\varepsilon) = d((\omega_0, c_0) \pm \varepsilon\xi)$ 及び $\mathcal{B}^{\pm}_{\omega_0,c_0}$ が (8) の流れに関して不変であることから, $\|u_0 - \varphi_{\omega_0,c_0}\|_{H^1} < \delta$ ならば $S_{(\omega_0,c_0)\pm\varepsilon\xi}(u_0) < h(\pm\varepsilon)$ であることを示せばよい. $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ とおくと, $\partial_\omega d(\omega, c) = Q(\varphi_{\omega,c})$, $\partial_c d(\omega, c) = P(\varphi_{\omega,c})$ だから,

$$
\begin{aligned}
&S_{(\omega_0,c_0)\pm\varepsilon\xi}(u_0) = S_{(\omega_0,c_0)\pm\varepsilon\xi}(\varphi_{\omega_0,c_0}) + O(\delta)\\
&= S_{\omega_0,c_0}(\varphi_{\omega_0,c_0}) \pm \varepsilon\{\xi_1 Q(\varphi_{\omega_0,c_0}) + \xi_2 P(\varphi_{\omega_0,c_0})\} + O(\delta)\\
&= h(0) \pm \varepsilon h'(0) + O(\delta).
\end{aligned}
$$

一方, Taylor 展開により, $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon) \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ が存在して,

$$h(\pm\varepsilon) = h(0) \pm \varepsilon h'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} h''(\tau_1).$$

ここで, $h''(\tau_1) > 0$ だから, δ を十分小さくとれば, $S_{(\omega_0,c_0)\pm\varepsilon\xi}(u_0) < h(\pm\varepsilon)$ が成り立つ. □

以上の準備の下で, 定理 3 を証明する.

定理 3 の証明 背理法で示す. (8) の孤立波解 $v_{\omega_0,c_0}(t)$ が軌道安定でないと仮定する. このとき, 定数 $\varepsilon_1 > 0$, (8) の解の列 $\{u_n\}$ 及び時間の列 $\{t_n\} \subset (0, \infty)$ が存在して,

$$u_n(0) \to \varphi_{\omega_0,c_0} \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}), \tag{14}$$

$$\inf_{(\theta,y)\in\mathbb{R}^2} \|u_n(t_n) - e^{i\theta}\varphi_{\omega_0,c_0}(\cdot + y)\|_{H^1} \geq \varepsilon_1. \tag{15}$$

このとき, S_{ω_0,c_0} は (8) の保存量だから, (14) より,

$$S_{\omega_0,c_0}(u_n(t_n)) = S_{\omega_0,c_0}(u_n(0)) \to S_{\omega_0,c_0}(\varphi_{\omega_0,c_0}) = d(\omega_0, c_0). \tag{16}$$

また, (14) と補題 10 より, $N(u_n(t_n)) \to 4d(\omega_0, c_0)$ だから,

$$K_{\omega_0,c_0}(u_n(t_n)) = 2S_{\omega_0,c_0}(u_n(t_n)) - \frac{1}{2}N(u_n(t_n)) \to 0. \tag{17}$$

(16), (17) と命題6より, 列 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ と $v \in \mathcal{M}_{\omega_0,c_0}$ が存在して, $\{u_n(t_n, \cdot + y_n)\}$ は v に $H^1(\mathbb{R})$ で収束する部分列をもつ. その部分列を同じ文字で表すと, 命題2と命題9より,

$$\inf_{(\theta,y)\in\mathbb{R}^2} \|u_n(t_n) - e^{i\theta}\varphi_{\omega_0,c_0}(\cdot + y)\|_{H^1} \to 0$$

となるが, これは (15) に矛盾する. 故に, (8) の孤立波解 $v_{\omega_0,c_0}(t)$ は軌道安定である. □

参考文献

[1] H. A. Biagioni and F. Linares, Ill-posedness for the derivative Schrödinger and generalized Benjamin-Ono equations, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001) 3649–3659.

[2] H. Brézis and E. H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983) 486–490.

[3] M. Colin and M. Ohta, Stability of solitary waves for derivative non linear Schrödinger equation, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire (to appear).

[4] J. Fröhlich, E. H. Lieb and M. Loss, Stability of Coulomb systems with magnetic fields I. The one-electron atom, Comm. Math. Phys. **104** (1986) 251–270.

[5] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I,II J. Funct. Anal. **74** (1987) 160–197, **94** (1990) 308–348.

[6] Guo Boling and Wu Yaping, Orbital stability of solitary waves for the nonlinear derivative Schrödinger equation, J. Differential Equations **123** (1995) 35–55.

[7] N. Hayashi, The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation in the energy space, Nonlinear Anal. **20** (1993) 823–833.

[8] N. Hayashi and T. Ozawa, On the derivative nonlinear Schrödinger equation, Physica D **55** (1992) 14–36.

[9] N. Hayashi and T. Ozawa, Finite energy solutions of nonlinear Schrödinger equations of derivative type, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994) 1488–1503.

[10] D. J. Kaup and A. C. Newell, An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation, J. Math. Phys. **19** (1978) 789–801.

[11] J.-H. Lee, Global solvability of the derivative nonlinear Schrödinger equation, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989) 107–118.

[12] E. H. Lieb, On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains, Invent. Math. **74** (1983) 441–448.

[13] W. Mio, T. Ogino, K. Minami and S. Takeda, Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasmas, J. Phys. Soc. Japan **41** (1976) 265–271.

[14] E. Mjølhus, On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field, J. Plasma Phys. **16** (1976) 321–334.

[15] H. Nawa, Asymptotic profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity, J. Math. Soc. Japan **46** (1994) 557–586.

[16] M. Ohta, Stability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, J. Dynam. Differential Equations **6** (1994) 325–334.

[17] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, Kodai Math. J. **18** (1995) 68–74.

[18] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for the generalized Davey-Stewartson system, Differential Integral Equations **8** (1995) 1775–1788.

[19] T. Ozawa, On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996) 137–163.

[20] J. Shatah, Stable standing waves of nonlinear Klein-Gordon equations, Comm. Math. Phys. **91** (1983) 313–327.

[21] H. Takaoka, Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity, Adv. Differential Equations **4** (1999) 561–580.

[22] H. Takaoka, Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces, Electron. J. Differential Equations **2001** (2001) No. 42, 1–23.

[23] M. I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983) 567–576.