数理解析研究所講究録 1464 巻 2006 年 82-92

Asymptotic non-degeneracy of the solution to the Liouville equation

佐藤 友彦 (Tomohiko SATO)
鈴木 貴 (Takashi SUZUKI)

大阪大学大学院基礎工学研究科
(Osaka University Graduate School of Engineering Science)

1 Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする. λ は正の定数で, 関数 $V = V(x)$ は $V \in C^1(\bar{\Omega})$, $V(x) > 0$ $(\forall x)$ とする. 考える問題は, Liouville-Gel'fand problem

$$-\Delta v = \lambda V(x) e^v \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{1}$$

で, λ が十分小さい時の解 (λ, v) の漸近的非退化性を考える. 以下, 解は古典解で考える. $V \equiv 1$ の場合, すなわち

$$-\Delta v = \lambda e^v \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{2}$$

については Gladiali-Grossi [5] によって既に研究されており, 今回は (1) への拡張を報告する. なお, これは [10] の要約である.

主定理を紹介する前に事実を幾つか紹介する. まず $\lambda \downarrow 0$ における特異極限の分類がある.

Fact 1 (Nagasaki-Suzuki [8]) $\{(\lambda_k, v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lambda_k \downarrow 0$ を (2) の解の列とすると, 部分列 (同じ記号で書く) に対して, 量子化

$$\Sigma_k = \lambda_k \int_\Omega e^{v_k} \to 8\pi m, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

が起こり, さらに m の値に応じて次が成り立つ.

(i) $m = 0$ の時, $\|v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$.

(ii) $m \in \mathbb{N}$ の時, $\{v_k\}$ の爆発集合

$$\mathcal{S} = \{x_0 \in \bar{\Omega} \mid \Omega \ni x_k \to x_0 \text{に対して} v_k(x_k) \to +\infty\}$$

が存在して $\mathcal{S} \subset \Omega$ かつ m 個の点集合となり, $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{S}$ 上局所一様に $v_k \to 8\pi \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} G(\cdot, x_0)$. さらに任意の爆発点 $x_0 \in \mathcal{S}$ に対して

$$\frac{1}{2}\nabla R(x_0) + \sum_{x_0' \in \mathcal{S}\setminus\{x_0\}} \nabla_x G(x_0, x_0') = 0$$

が成り立つ. ここで $G = G(x,y)$ は $-\Delta$ *in* Ω, $\cdot|_{x\in\partial\Omega} = 0$ を満たす *Green* 関数で, $R(x) = \left[G(x,y) - \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\right]_{y=x}$ は *Robin* 関数.

(iii) $m = +\infty$ の時, Ω 上局所一様に $v_k \to +\infty$.

特に $m = 1$ の時, $\{v_k\}$ は $R(x)$ の臨界点 x_0 において1点爆発し, $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上局所一様に $v_k(x) \to 8\pi G(x, x_0)$ となる. 次の定理では, x_0 が $R(x)$ の非退化臨界点であれば解が非退化である事を述べている.

Fact 2 (Gladiali-Grossi [5]) *Fact 1* の $m = 1$ について, 爆発点 x_0 が *Robin* 関数の非退化臨界点であれば, $\forall k \gg 1$ に対して (λ_k, v_k) は非退化. つまり, 線形化作用素 $-\Delta - \lambda_k e^{v_k}$ *in* Ω, $\cdot|_{\partial\Omega} = 0$ は 0 を固有値としない.

一方 (1) については, Ma-Wei [7] による Fact 1 の拡張がある.

Fact 3 (Ma-Wei [7]) (1) の解の列 $\{(\lambda_k, v_k)\}_k$, $\lambda_k \downarrow 0$ について, *Fact 1* と同様の分類定理が成り立つ. ただし $\Sigma_k = \lambda_k \int_\Omega V e^{v_k}$ である. また, **(ii)** については, 特異極限は同じであるが, 爆発点の位置が次のように変更される.

$$\frac{1}{2}\nabla R(x_0) + \sum_{x_0' \in \mathcal{S}\setminus\{x_0\}} \nabla_x G(x_0, x_0') + \frac{1}{8\pi}\nabla \log V(x_0) = 0, \quad (\forall x_0 \in \mathcal{S}).$$

特に1点爆発の時, 爆発点 x_0 は $R(x) + \frac{1}{4\pi}\log V(x)$ の臨界点である.

2 Main result

我々は, Fact 3 に基づいて Fact 2 の拡張を得た.

Theorem 1 *Fact 3* の $m = 1$ について, V が $x_0 \in \mathcal{S}$ の近傍で C^2 級であり, x_0 が $R(x) + \frac{1}{4\pi}\log V(x)$ の非退化臨界点ならば, $\forall k \gg 1$ に対して (λ_k, v_k) は非退化. つまり, 線形化作用素 $-\Delta - \lambda_k V e^{v_k}$ *in* Ω, $\cdot|_{\partial\Omega} = 0$ は 0 を固有値としない.

Theorem 1 に関連する結果として, [11] がある. これも [5] の (1) への拡張である. Ω を両軸対称で x_1, x_2 –方向に凸な領域とし, $V(x)$ が両軸対称, 第一象限で単調減少関数ならば, Gidas-Ni-Nirenberg [4] と [7], Pohozaev の等式 [9] より, 解は爆発しない, または, 原点で 1 点爆発する. λ が十分小さい時, (1) の解は丁度 2 個である事を, 1 点爆発解の漸近的一意性を示す事によって得た.

また [11] では, Ω が凸で $\{(\lambda_k, v_k)\}$, $\lambda_k \downarrow 0$ を 1 点爆発している (1) の解の列とする時, 十分大きい k に対して

$$(x - x_k) \cdot \nabla v_k(x) < 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \{x_k\}$$

($x_k \in \Omega$ は $v_k(x_k) = \max_{\bar{\Omega}} v_k$ なる点) が成立し, さらに境界 $\partial\Omega$ 上の全ての点で曲率が正ならば, (1) の 1 点爆発解 (λ_k, v_k) に対して k が十分大きい時, v_k の level set は x_k を除く各点で曲率が正である事, すなわち level set の狭義凸性についても得られた. 証明は割愛するが, $V(x)$ がそれぞれの主張に影響を及ぼさない事を述べておく. これは (1) と (2) の解の特異極限が同じである事によるものである.

ここで, Theorem 1 の補題を述べる. これは [5] の Theorem 6 に対応している.

Lemma 1 ある定数 $C_1 > 0$ が存在し, 任意の $x \in \bar{\Omega}$, $k = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\left| v_k(x) - \log \frac{e^{v_k(x_k)}}{\left\{1 + \frac{1}{8}\lambda_k V(x_k) e^{v_k(x_k)} |x - x_k|^2\right\}^2} \right| \leq C_1 \tag{3}$$

が成立する. ここで, $x_k \in \Omega$ は $v_k(x_k) = \|v_k\|_\infty$ を満たす点.

Proof of Lemma 1. $u_k = v_k + \log \lambda_k$ とすると u_k は

$$\begin{aligned} &-\Delta u_k = V(x) e^{u_k} \quad \text{in } \Omega, \quad u_k = \log \lambda_k \quad \text{on } \partial\Omega \\ &\int_\Omega e^{u_k} = O(1) \end{aligned}$$

を満たし, 部分列に対して $u_k(x_k) \to +\infty$ が成り立つ. なぜならば, もし $u_k(x_k) \to +\infty$ が起こらないとすると, $u_k(x_k) \to -\infty$ または $u_k(x_k) \to c \in \mathbb{R}$ となる. 前者の場合,

$$\int_\Omega \lambda_k e^{v_k} \to 0, \quad (k \to \infty)$$

となるが, これは仮定より $0 < \exists a \leq V(x) \leq \exists b$ $(x \in \bar{\Omega})$ であることから $\Sigma_k \to 8\pi$ に矛盾する. 残る後者については, Brezis-Merle [1] より $\{u_k\}$ が Ω で局所一様有界となるが, Fact 3 より $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上で局所一様に $u_k = v_k + \log \lambda_k \to -\infty$ となる. これは矛盾である.

よって Y.Y. Li [6] の Theorem 0.3 を用いることが出来, 定数 $C_1 > 0$ が存在して

$$\left| u_k(x) - \log \frac{e^{u_k(x_k)}}{\left\{1 + \frac{1}{8}V(x_k)e^{u_k(x_k)}|x - x_k|^2\right\}^2} \right| \leq C_1$$

$(x \in \bar{\Omega},\ k = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ. これは (3) と同値である.

ここで, $\delta_k > 0$ を $\delta_k^2 \lambda_k e^{\|v_k\|_\infty} = 1$ で定義する. 次の補題は [5] の Lemma 5 に対応する.

Lemma 2 $\delta_k \to 0$.

Proof of Lemma 2. (3) より,

$$\left| v_k(x) - v_k(x_k) + \log \left\{1 + \frac{V(x_k)}{8\delta_k^2}|x - x_k|^2\right\}^2 \right| \leq C_1$$

$(x \in \bar{\Omega},\ k = 1, 2, \ldots)$. また, $v_k \to 8\pi G(\cdot, x_0)$ locally uniformly in $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, $V(x_k) \to V(x_0)$, $v_k(x_k) \to +\infty$ より, $\delta_k \to 0$ を得る.

これより, Theorem 1 の証明の概略を述べる. 証明は背理法によって行われ, 基本的には [5] に従う.

まず $w_k = w_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を (1) の線形化問題

$$-\Delta w_k = \lambda_k V e^{v_k} w_k \quad \text{in } \Omega, \quad w_k = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad \|w_k\|_\infty = 1 \tag{4}$$

の (非自明) 解とする. 次にスケーリングを行う.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(x) &:= v_k(\delta_k x + x_k) - \|v_k\|_\infty, \\ \tilde{w}_k(x) &:= w_k(\delta_k x + x_k), \\ \tilde{V}_k(x) &:= V(\delta_k x + x_k) \qquad\qquad \text{in } \tilde{\Omega}_k. \end{aligned}$$

ここで $\tilde{\Omega}_k = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_k x + x_k \in \Omega\}$ である.

$\tilde{v}_k$ について

$$\begin{aligned} &-\Delta \tilde{v}_k = \tilde{V}_k e^{\tilde{v}_k}, \quad \tilde{v}_k \leq 0 = \tilde{v}_k(0) \quad \text{in } \tilde{\Omega}_k, \\ &\int_{\tilde{\Omega}_k} e^{\tilde{v}_k} = \int_\Omega \lambda_k e^{v_k} \leq \exists C_2, \quad (\forall k) \end{aligned}$$

が成り立ち, $\tilde{w}_k$ は

$$-\Delta \tilde{w}_k = \tilde{V}_k e^{\tilde{v}_k} \tilde{w}_k \quad \text{in } \tilde{\Omega}_k, \quad \tilde{w}_k = 0 \quad \text{on } \partial\tilde{\Omega}_k, \quad \|\tilde{w}_k\|_\infty = 1$$

を満たす．よって [1] より，部分列に対して $\tilde{v}_k \to \tilde{v}_0$ in $C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ $(0<\alpha<1)$ を満たす $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_0(x)$ が存在して，

$$-\Delta\tilde{v}_0 = V(x_0)e^{\tilde{v}_0}, \quad \tilde{v}_0 \le 0 = \tilde{v}_0(0) \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$
$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\tilde{v}_0} < +\infty$$

を満たし，さらに [3] により

$$\tilde{v}_0(x) = \log\frac{1}{\left\{1+\frac{1}{8}c|x|^2\right\}^2}$$

を得る．ここで $c = V(x_0)$．よって $\{\tilde{w}_k\}$ について，部分列に対して $\tilde{w}_k \to \tilde{w}_0$ in $C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ を満たす $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_0(x)$ が存在し，

$$-\Delta\tilde{w}_0 = ce^{\tilde{v}_0}\tilde{w}_0 = \frac{c}{\left\{1+\frac{1}{8}c|x|^2\right\}^2}\tilde{w}_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2,$$
$$\|\tilde{w}_0\|_\infty \le 1$$

を満たす．さらに Chen-Lin [2] より

$$\tilde{w}_0(x) = \sum_{i=1}^{2}\frac{a_i x_i}{\frac{8}{c}+|x|^2} + b\cdot\frac{\frac{8}{c}-|x|^2}{\frac{8}{c}+|x|^2}, \quad (a_1, a_2, b \in \mathbb{R}),$$

と表される．

Lemma 3 $\tilde{w}_0 = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$.

$y_k \in \tilde{\Omega}_k$ を $\tilde{w}_k(x)$ の最大値を取る点，つまり $\|\tilde{w}_k\|_\infty = \tilde{w}_k(y_k) = 1$ とすると Lemma 3 より $|y_k| \to +\infty$ となる．ここで Kelvin 変換

$$\hat{v}_k(x) = \tilde{v}_k\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad \hat{w}_k(x) = \tilde{w}_k\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

を行うと 十分大きな k に対して

$$\|\hat{w}_k\|_\infty = \hat{w}_k\left(\frac{y_k}{|y_k|^2}\right) = 1,$$
$$-\Delta\hat{w}_k = \frac{1}{|x|^4}\tilde{V}_k\left(\frac{x}{|x|^2}\right)e^{\hat{v}_k}\hat{w}_k \quad \text{in } B_1(0)\setminus\{0\}$$

が成り立つ．Lemma 1 より

$$\left|\tilde{v}_k(x) + \log\left\{1+\frac{1}{8}V(x_k)|x|^2\right\}^2\right| \le C_1, \quad (\forall x \in \tilde{\Omega}_k, \forall k \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

が成り立つので，k に依らない一様な評価 $e^{\tilde{v}_k(x)} = O(|x|^{-4})$ を得る． つまり $|x|^{-4}e^{\hat{v}_k(x)} = O(1)$ を意味しており，$x=0$ は $\hat{w}_k$ の除去可能特異点となる．よって局所楕円型評価より $1 = \|\hat{w}_k\|_{L^\infty(B_{1/2}(0))} \le C\|\hat{w}_k\|_{L^2(B_1(0))}$ が得られ，$\hat{w}_k \to 0$ in $C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ と $|\hat{w}_k| \le 1$ より $\|\hat{w}_k\|_{L^2(B_1(0))} \to 0$ となる．しかしこれは矛盾である．よって Theorem 1 が示される．

3 Sketch of proof of Lemma 3

Lemma 3 の証明の概略を述べる．この補題も背理法によって示される．$a_1 = a_2 = 0$ を示すため，次の補題を [5] に従って示す．

Lemma 4 $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ とすると，$\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ 上局所一様に

$$\delta_k^{-1} w_k(\cdot) \to 2\pi \sum_{j=1}^{2} a_j \frac{\partial G}{\partial y_j}(\cdot, x_0). \tag{6}$$

Proof of Lemma 4. Green の定理より

$$\begin{aligned} w_k(x) &= \int_\Omega G(x,y)\lambda_k V(y) e^{v_k(y)} w_k(y) dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \tilde{V}_k(y') e^{\tilde{v}_k(y')} \tilde{w}_k(y') dy' \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \cdot \left\{ \tilde{V}_k(y') e^{\tilde{v}_k(y')} \tilde{w}_k(y') - \frac{64b}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y'|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y'|^2\right)^3} \right\} dy' \\ &\quad + \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x, \delta_k y' + x_k) \cdot \frac{64b}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y'|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y'|^2\right)^3} dy' \\ &= I_{1,k}(x) + I_{2,k}(x) \end{aligned}$$

とできる．ここで関数 f_k を

$$f_k(y) = \tilde{V}_k(y) e^{\tilde{v}_k(y)} \tilde{w}_k(y) - \frac{64b}{c} \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y|^2}{\left(\frac{8}{c} + |y|^2\right)^3}$$

とすると，

$$\tilde{V}_k(y) e^{\tilde{v}_k(y)} \tilde{w}_k(y) \to \frac{c}{\left(1 + \frac{c}{8}|y|^2\right)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{a_i y_i}{\frac{8}{c} + |y|^2} + b \cdot \frac{\frac{8}{c} - |y|^2}{\frac{8}{c} + |y|^2} \right)$$

より，

$$f_k(y) \to f_0(y) = \frac{64}{c} \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i y_i}{\left(\frac{8}{c} + |y|^2\right)^3} \quad \text{locally uniformly in } y \in \mathbb{R}^2$$

を得る．

(5) より，$f_k(y) = O(|y|^{-4})$ uniform in $k = 1, 2, \ldots$ であるので，優収束定理より $g_k(y) \to g_0(y)$ locally uniformly in $y \in \mathbb{R}^2$ となる．ここで、

$$g_k(y_1, y_2) = -\int_{\frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1^2 + a_2^2}}^{+\infty} f_k\left(a_1 t + \frac{a_2^2 y_1 - a_1 a_2 y_2}{a_1^2 + a_2^2}, a_2 t - \frac{a_1 a_2 y_1 - a_1^2 y_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) dt$$

は [5] の Lemma 6 で導入されている関数であり,

$$a_1\frac{\partial g_k}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial g_k}{\partial y_2}=f_k$$

を満たす. よって

$$\begin{aligned}
I_{1,k}(x) &= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x,\delta_k y'+x_k)f_k(y')dy' \\
&= \int_{\tilde{\Omega}_k} G(x,\delta_k y'+x_k)\cdot\sum_{j=1}^{2}a_j\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(y')dy' \\
&= -\delta_k\sum_{j=1}^{2}a_j\int_{\tilde{\Omega}_k}\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,\delta_k y'+x_k)\cdot g_k(y')dy' \\
&= \delta_k\left\{\sum_{j=1}^{2}a_j\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{16}{c}\cdot\frac{1}{\left(\frac{8}{c}+|y'|^2\right)^2}dy'+o(1)\right\} \\
&= \delta_k\left\{2\pi\sum_{j=1}^{2}a_j\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)+o(1)\right\}\quad\text{locally uniformly in } x\in\bar{\Omega}\setminus\{x_0\}.
\end{aligned}$$

残る $I_{2,k}(x)$ については, $u(y)=\log\frac{64}{c}\cdot\frac{1}{\left(\frac{8}{c}+|y|^2\right)^2}$ とすると

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(y_j e^{u(y)}\right)=\frac{128}{c}\cdot\frac{\frac{8}{c}-|y|^2}{\left(\frac{8}{c}+|y|^2\right)^3}$$

を満たす事から, 優収束定理より

$$\begin{aligned}
I_{2,k}(x) &= \frac{b}{2}\int_{\tilde{\Omega}_k} G(x,\delta_k y'+x_k)\cdot\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(y_j e^{u(y)}\right)\Big|_{y=y'}dy' \\
&= -\delta_k\cdot\frac{b}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{\tilde{\Omega}_k}\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,\delta_k y'+x_k)\cdot y'_j e^{u(y')}dy' \\
&= -\delta_k\cdot\frac{b}{2}\left\{\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\cdot\int_{\mathbb{R}^2}y'_j e^{u(y')}dy'+o(1)\right\} \\
&= o(\delta_k)\quad\text{locally uniformly in } x\in\bar{\Omega}\setminus\{x_0\}.
\end{aligned}$$

以上より (6) が得られる. さらに楕円型評価より

$$\delta_k^{-1}w_k(\cdot)\to 2\pi\sum_{j=1}^{2}a_j\frac{\partial G}{\partial y_j}(\cdot,x_0)\quad\text{in } C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}\setminus\{x_0\})\tag{7}$$

となる.

$i=1,2$ として, (1) より

$$-\Delta \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \lambda_k V e^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \lambda_k V e^{v_k} \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega$$

を得る. $h_{i,k} = h_{i,k}(x)$ を

$$-\Delta h_{i,k} = \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \cdot \lambda_k V e^{v_k} \quad \text{in } \Omega, \quad h_{i,k} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

の解とすると,

$$w_k \Delta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - h_{i,k} \right) - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Delta w_k = 0 \quad \text{in } \Omega$$

が成り立つので

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ w_k \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - h_{i,k} \right) - \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - h_{i,k} \right) \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \right\} = \int_\Omega h_{i,k} \Delta w_k$$

(ここで, ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法ベクトル) となる. 境界条件により,

$$\begin{aligned} \delta_k^{-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} &= -\delta_k^{-1} \int_\Omega h_{i,k} \Delta w_k = -\delta_k^{-1} \int_\Omega \Delta h_{i,k} \cdot w_k \\ &= \delta_k^{-1} \int_\Omega \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \cdot \lambda_k V e^{v_k} w_k \end{aligned} \tag{8}$$

となる. Fact 3 と (7) より, (8) の左辺の極限は

$$16\pi^2 \sum_{j=1}^{2} a_j \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, x_0) \frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial \nu_x}(x, x_0).$$

さらに [5] の Lemma 7 より

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, x_0) \frac{\partial^2 G}{\partial y_j \partial \nu}(x, x_0) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

となるので,

$$\lim_{k \to +\infty} \delta_k^{-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} = -8\pi^2 \sum_{j=1}^{2} a_j \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \tag{9}$$

を得る. よって

$$\lim_{k \to +\infty} \delta_k^{-1} \int_\Omega \frac{\partial \log V}{\partial x_i} \cdot \lambda_k V e^{v_k} w_k = 2\pi \sum_{j=1}^{2} a_j \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \tag{10}$$

を示すことが出来れば, $i=1,2$ に対して

$$\sum_{j=1}^{2} a_j \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right\} = 0 \tag{11}$$

が得られ, x_0 は $R(x) + \frac{1}{4\pi} \log V(x)$ の非退化臨界点なので, $a_1 = a_2 = 0$ となる.

(10) については, $x_k = (x_{k1}, x_{k2})$ の周りで Taylor 展開

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x_k) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{2} (x_\ell - x_{k\ell}) \frac{\partial}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x_k) + R_k(x)|x - x_k| \end{aligned} \tag{12}$$

を行い, (8) の右辺に代入して各項の極限を求めることで得られる. ここで $x = (x_1, x_2)$, $R_k(x)$ は剰余項である. 計算の詳細は [10] を参照されたい. 結果を述べると

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial \log V}{\partial x_i}(x_k) \int_\Omega \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_1 \partial x_i}(x_k) \int_\Omega (x_1 - x_{k1}) \cdot \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 2\pi a_1 \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_1 \partial x_i}(x_0), \tag{14}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_2 \partial x_i}(x_k) \int_\Omega (x_2 - x_{k2}) \cdot \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 2\pi a_2 \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_2 \partial x_i}(x_0), \tag{15}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega R_k(x)|x - x_k| \cdot \lambda_k V e^{v_k} \cdot \delta_k^{-1} w_k = 0 \tag{16}$$

となる. 特に (14), (15) については

$$\begin{aligned} \int_\Omega (x_\ell - x_{k\ell}) \cdot \lambda_k V e^{v_k} w_k &= -\int_\Omega (x_\ell - x_{k\ell}) \Delta w_k \\ &= -\int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{k\ell}) \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \end{aligned}$$

$(\ell = 1, 2)$ であるので

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_\ell \partial x_i}(x_k) \int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{k\ell}) \delta_k^{-1} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \\ \to \quad & -\frac{\partial^2 \log V}{\partial x_\ell \partial x_i}(x_0) \cdot 2\pi \sum_{j=1}^{2} a_j \int_{\partial\Omega} (x_\ell - x_{0\ell}) \frac{\partial^2 G}{\partial \nu_x \partial y_j}(\cdot, x_0) \end{aligned} \tag{17}$$

となる. (17) の右辺の積分は次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial^2 G}{\partial\nu_x\partial y_j}(x,x_0) \\
=\ & \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left\{(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\right\} \\
=\ & \int_{\partial B_r(x_0)}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left\{(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\right\} + \int_{\Omega\setminus B_r(x_0)}\Delta\left[(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\right] \\
=\ & \int_{\partial B_r(x_0)}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left\{(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\right\} + 2\int_{\Omega\setminus B_r(x_0)}\frac{\partial^2 G}{\partial x_\ell\partial y_j}(x,x_0) \\
=\ & \int_{\partial B_r(x_0)}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left\{(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0)\right\} - 2\int_{\partial B_r(x_0)}\nu_\ell\frac{\partial G}{\partial y_j}(x,x_0) \\
=\ & \int_{\partial B_r(x_0)}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left\{(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\right]_{y=x_0}\right\} \\
& -2\int_{\partial B_r(x_0)}\nu_\ell\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\right]_{y=x_0} + o(1), \quad (r\downarrow 0).
\end{aligned} \tag{18}
$$

ここで $r=|x-x_0|$ とすると, (18) の右辺第一項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\nu_x}\left\{(x_\ell - x_{0\ell})\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\right]_{y=x_0}\right\} \\
=\ & \frac{x_\ell - x_{0\ell}}{2\pi r}\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\log\frac{1}{|x-y|}\bigg|_{y=x_0} + r\frac{\partial^2}{\partial r\partial y_j}\log\frac{1}{|x-y|}\bigg|_{y=x_0}\right\} \\
=\ & \frac{(x_\ell - x_{0\ell})(x_j - x_{0j}) - (x_\ell - x_{0\ell})(x_j - x_{0j})}{2\pi r^3} \\
=\ & 0.
\end{aligned}
$$

また, 第二項は

$$
\begin{aligned}
-2\int_{\partial B_r(x_0)}\nu_\ell\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-x_0|}\right]_{y=x_0} &= -\frac{1}{\pi}\int_{\partial B_r(x_0)}\frac{(x_\ell - x_{0\ell})(x_j - x_{0j})}{r^3} \\
&= \begin{cases} -1 & (\ell = j) \\ 0 & (\ell \neq j) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となるので (14), (15) が得られ, (10) を得る. よって $a_1 = a_2 = 0$.

残る $b=0$ については, [5] に従うことで得られる.

参考文献

[1] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991) 1223-1253.

[2] Chen, C.-C., Lin, C.-S., *On the symmetry of blowup solutions to a mean field equation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non lineaire **18** (2001) 271-296.

[3] Chen, W., Li, C., *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991) 615-622.

[4] Gidas, B., Ni, W.-M., Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979) 209-243.

[5] Gladiali, F., Grossi, M., *Some results on the Gel'fand problem*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004) 1335-1364.

[6] Li, Y.Y., *Harnack type inequality: the method of moving planes*, Comm. Math. Phys. **200** (1999) 421-444.

[7] Ma, L., Wei, J.C., *Convergence for a Liouville equation*, Comment. Math. Helv. **76** (2001) 506-514.

[8] Nagasaki, K., Suzuki, T., *Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated nonlinearities*, Asymptotic Anal. **3** (1990) 173-188.

[9] Pohozaev, S., *Eigenfunctions of the equation* $-\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet. Math. Dokl. **6** (1965) 1408-1411.

[10] Sato, T., Suzuki, T., *Asymptotic non-degeneracy of the solution to the Liouville-Gel'fand problem in two dimensions*, Preprint.

[11] Sato, T., Suzuki, T., *Convexity and uniqueness of the solution to the Liouville equation*, Inter. J. Pure Appl. Math. **23** (2005) 1-21.

[12] Suzuki, T., *Semilinear Elliptic Equations*, Gakkōtosho, Tokyo, Japan, 1994.