

A non-linear construction of  $OA(s^t, t+1, s, t)$ s and  
classification of  $OA(4^t, 5, 4, 4)$ s by isomorphism

Shintaro Yagi

School of Fundamental Science and Technology of Keio University

### はじめに

$s$  個の要素からなる集合  $S$  上の  $N \times k$  配列  $A$  について, すべての  $N \times t$  の  $A$  の部分配列に  $S$  の要素からなる各  $t$ -tuple がちょうど  $\lambda$  回ずつ行として現れるとき,  $A$  を水準  $s$ , 強さ  $t$ , 制約数  $k$ , 指数  $\lambda$  の直交配列といい  $OA(\lambda s^t, k, s, t)$  と記す.

本報告では, 直交配列と呼ばれる組合せ構造について非線形な形の関数表現による  $OA(s^t, t+1, s, t)$  の構成法と  $OA(4^t, t+1, 4, t)$   $t \geq 2, 3, 4$  の同型分類について述べる.

現在までに知られている結果としては  $s = 2$  のとき任意の  $\lambda$  について Seiden, Zemach (1966) は  $OA(2^t \lambda, t+1, 2, t)$  の同型分類を行った. また, Fujii, Namikawa, Yamamoto (1989) は  $OA(2^{d+1}, d+2, 2, d)$  と  $OA(2^{d+2}, d+3, 2, d)$  についての同型分類を行っており, Yumiba, Hyodo, Yamamoto (1997) は saturated  $OA(6 \cdot 2^2, 23, 2, 2)$  から構成されるすべての  $OA(6 \cdot 2^2, 6, 2, 2)$  を同型分類した. 一方,  $s = 3$  については, Hedayat, Stufken, Su は  $OA(3^t, t+1, s, t)$  はすべて同型であることを示した. さらに Hedayat, Seiden, Stufken (1997) はすべての  $OA(2 \cdot 3^3, 5, 3, 3)$  の同型分類に成功した.

## 1 直交配列に関する基本定義と定理

準備として直交配列に関する基本的な定義と定理を紹介する.

定義 1.  $s$  個の要素からなる集合  $S$  上で  $N \times k$  配列  $A$  の各  $N \times t$  部分配列に  $S$  の要素からなる各  $t$ -tuple がちょうど  $\lambda$  回ずつ行として現れるとき,  $A$  を水準  $s$ , 強さ  $t$ , 制約数  $k$ , 指数  $\lambda$  の直交配列 (orthogonal array) といひ  $OA(\lambda s^t, k, s, t)$  と表記する.

例 1. 水準 2, 強さ 3, 制約数 4, 指数 1 の  $4 \times 8$  直交配列  $OA(8, 4, 2, 3)$  は以下のとおりである. (スペースの関係上ここから先は直交配列を転置して  $k \times N$  の形で書くものとする.)

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

定義 2.  $A$  と  $B$  を直交配列とする. このとき  $B$  に以下の 3 つの操作を行うことによって  $A$  と同じ配列を得られるとき  $A$  と  $B$  は同型 (isomorphism) であるという:

(i) 行の置換

(ii) 列の置換

(iii) 列内での要素の置換

例 2. 以下の二つの配列  $A, B$  は  $OA(16, 3, 4, 2)$  かつ同型である.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0000 & 1111 & 2222 & 3333 & 0000 & 1111 & 3333 & 2222 \\ A = & 0123 & 0123 & 0123 & 0123 & B = & 0123 & 1032 & 2301 & 3210 \\ & 0123 & 1032 & 2301 & 3210 & & 0123 & 0123 & 0123 & 0123 \end{array}$$

なぜなら, 直交配列  $B$  の第 1 行の水準 2 と 3 の置換と, 第 2 行と第 3 行の置換によって直交配列  $A$  が得られる為である.

ここからは  $OA(s^t, k, s, t)$  について  $k = t + 1$ ,  $\lambda = 1$  についてのみ限定して考える.

$s$  を素数とし, 位数  $s$  の有限体を  $GF(s)$  と書く. このとき  $s$  個の要素からなる集合  $S$  は一般性を失うことなく  $S = GF(s)$  と仮定することができる. またこのとき  $S$  上での置換は  $GF(s)$  上での多項式によって表現でき,  $S = GF(s)$  上の置換の集合を  $\Sigma_s$  と表すことにする.

ここで直交配列の関数表現の定義を行う.  $GF(s)^t$  から  $GF(s)$  へのすべての写像は各変数の次数が最大で  $s - 1$  である変数  $t$  の多項式によって表現される. 実際, 次数が  $s - 1$  であり,

$$u_a(x) = \begin{cases} -1, & x = a, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

である  $u_a(x)$  に関して

$$u_a(x) = \prod_{c \in GF(s), c \neq a} (x - c) = \frac{x^s - x}{x - a},$$

としたとき, 任意の写像  $f: GF(s)^t \rightarrow GF(s)$  は以下のように表せる.

$$f(x_1, \dots, x_t) = (-1)^t \sum_{(a_1, \dots, a_t) \in GF(s)^t} f(a_1, \dots, a_t) u_{a_1}(x_1) \cdots u_{a_t}(x_t).$$

これは次数が最大で  $s-1$  の  $x_1, \dots, x_t$  からなる多項式である.

定義 3. 配列  $A$  を  $OA(s^t, t+1, s, t)$  とし, この直交配列  $A$  の行の集合を  $R(A)$  とする.  $A$  の任意の行の要素  $(x_0, \dots, x_t)$  において

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_t)$$

を満たす関数  $f: GF(s)^t \rightarrow GF(s)$  を  $A$  の **explicit** な関数表現 (*explicit functional representation*) と呼ぶ. また

$$R(A) = \{(x_0, \dots, x_t) | F(x_0, \dots, x_t) = 0, x_i \in GF(s)\}$$

を満たす  $F(\cdot)$  を  $A$  の **implicit** な関数表現 (*implicit functional representation*) と呼ぶ.

注 1. 直交配列  $OA(s^t, t+1, s, t)$  の *explicit* な関数表現  $f$  と *implicit* な関数表現  $F$  には  $F(x_0, \dots, x_t) = x_0 - f(x_1, \dots, x_t)$  という関係が成立する.

例 3. 以下の配列は  $OA(4^2, 3, 4, 2)$  である. ここでは  $GF(4) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$  とし, このとき  $\alpha^2 = \alpha + 1$  という関係があるものとする.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 & 0 & \alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ x_2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}$$

この直交配列は  $x_0 = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + (x_1 + x_1^2)(x_2 + x_2^2)$  という *explicit* な関数表現を持つ.

定義 4. 関数  $f: GF(s)^t \rightarrow GF(s)$  に対して,

$$R = \{(x_0, \dots, x_t) \in GF(s)^{t+1} | x_0 = f(x_1, \dots, x_t)\}.$$

とおく.  $x_i = f^{(i)}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_t)$  が

$$R = \{(x_0, \dots, x_t) \in GF(s)^{t+1} | x_i = f^{(i)}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_t)\}$$

を満たすとき  $f$  は逆変換可能 (*invertible*) と呼ぶ.

定理 1. 写像  $f: GF(s)^t \rightarrow GF(s)$  で以下のことは同等である:

- (i)  $f$  が逆変換可能である.
- (ii)  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_t$  で任意の  $i$  を固定したとき,  
 $\sigma_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_t)$  は  $GF(s)$  上の置換である.
- (iii)  $f$  は  $OA(s^t, t+1, s, t)$  の関数表現である.

次の3つの例は3種類の配列と関数表現との関係である.

例 4.  $x_0 = f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + x_1^2 + x_2$  という関数表現を持つ直交配列ではない配列は以下のとおりである.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ x_2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}$$

このとき  $f$  は逆変換可能ではない. なぜなら  $x_0 = x_2 = 0$  のとき  $x_1 = 0$  または  $\alpha$  であるので  $x_1$  が  $x_2$  と  $x_0$  によって表現できないからである.

例 5. 次の配列は  $x_0 = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  という関数表現をもつ線形な直交配列である.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 & 0 & \alpha^2 & \alpha & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ x_2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}$$

この場合は  $x_2 = x_1 + x_0$  であるので  $x_2$  は  $x_0$  と  $x_1$  で表現される. 同様に,  $x_1 = x_0 + x_2$  なので  $x_1$  は  $x_0$  と  $x_2$  で表わされる. よって  $f$  は逆変換可能であり, 直交配列である.

例 6. 例 3 の直交配列は,  $x_0 = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + (x_1 + x_1^2)(x_2 + x_2^2)$  という関数表現を持つ. この場合は  $x_1, x_2$  について式を書き換えると以下ようになる.

$$\begin{aligned} x_1 &= f^{(1)}(x_0, x_2) = x_2 + x_0 + (x_2 + x_2^2)(x_0 + x_0^2) + (x_2 + x_2^2), \\ x_2 &= f^{(2)}(x_0, x_1) = x_1 + x_0 + (x_1 + x_1^2)(x_0 + x_0^2) + (x_1 + x_1^2). \end{aligned}$$

第1式は  $x_1$  が  $x_2$  と  $x_0$  で表せることを示している. 同様に第2式によって  $x_2$  は  $x_0$  と  $x_1$  で表現される. つまり  $f$  は逆変換可能であり,  $f$  からつくられる配列は直交配列である.

補助定理 1.  $F_A$  と  $F_B$  をそれぞれ直交配列  $A$  と  $B$  の *implicit* な関数表現とする. このとき  $A$  と  $B$  が同型であることと  $T = \{0, 1, \dots, t\}$  の置換  $\theta$  と  $GF(s)$  上の置換  $\sigma_i$  を用いて  $F_A(x_0, \dots, x_t) = F_B(\sigma_0(x_{\theta(0)}), \dots, \sigma_t(x_{\theta(t)}))$  と表せることは同値である. このような場合単に  $F_A$  と  $F_B$  が同型であるという. また直交配列  $A$  と  $B$  の *explicit* な関数表現  $f_A$  と  $f_B$  について  $F_A(x_0, \dots, x_t) = x_0 - f_A(x_1, \dots, x_t)$  と  $F_B(x_0, \dots, x_t) = x_0 - f_B(x_1, \dots, x_t)$  が同型であれば,  $f_A$  と  $f_B$  が同型であるという.

$x_0 = f_A(x_1, \dots, x_t)$  を直交配列  $A$  の関数表現とする. 置換  $\sigma_0(x_0) = x_0 - f(0, \dots, 0)$  を用いて得られる関数表現  $f_{\bar{A}}(x_1, \dots, x_t) = f_A(x_1, \dots, x_t) - f_A(0, \dots, 0)$  をもつ配列  $\bar{A}$  は  $A$  と同型な直交配列になる. 次に,  $\sigma_i(x_i) = f_{\bar{A}}(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$  とする.  $f_{\bar{A}}$  は直交配列  $\bar{A}$  の関数表現なので定理 1 より  $\sigma_i(0) = 0$  と  $\sigma_i$  は  $GF(s)$  上の置換となる. それゆえに  $\sigma_i^{-1}(x)$  も  $\sigma_i^{-1}(0) = 0$  のような置換である. つまり  $\sigma_i^{-1}(x)$  は次数が最大で  $s - 2$  である  $h(x)$  を用いて  $xh(x)$  のような多項式で表現できる. そこで  $x_i$  と  $\sigma_i^{-1}(x_i)$  を入れ替えることによって,  $f_{\bar{A}}(\sigma_1^{-1}(x_1), \dots, \sigma_t^{-1}(x_t)) = x_1 + \dots + x_t + g(\sigma_1^{-1}(x_1), \dots, \sigma_t^{-1}(x_t))$  を得ることが出来る. それゆえに  $f(x_1, \dots, x_t)$  と  $x_1 + \dots + x_t + g(\sigma_1^{-1}(x_1), \dots, \sigma_t^{-1}(x_t))$  は同型であると言え, それにより以下の補助定理を得る.

補助定理 2. すべての直交配列の関数表現は

$$f(x_1, \dots, x_t) = x_1 + \dots + x_t + g(x_1, \dots, x_t),$$

と同型である. このとき  $g$  は  $g(x_1, 0, \dots, 0) = \dots = g(0, \dots, 0, x_t) = 0$  を満たす多項式である.

これを直交配列の関数表現の標準形と呼ぶ.

## 2 $OA(s^t, t + 1, s, t)$ の非線型な構成法

ここでは非線型な関数表現をもつ直交配列の構成法について紹介する.

補助定理 3.  $GF(p^l)$  上において,  $p$  を素数としたときに,

$$r(x) = x + x^p + x^{p^2} + \dots + x^{p^{l-1}} \quad (1)$$

とすると,

$$r(x)^p = r(x^p) = r(x).$$

が成り立つ.

以下が主定理である.

定理 2. 素数  $p$  に関して,  $l$  を  $p$  の倍数とし, また  $g(x_1, \dots, x_t)$  が以下を満たす多項式とする.

- (i)  $g$  は各変数  $x_i$  について線型である,
- (ii)  $g$  の各変数の係数は  $GF(p)$  上の元である,
- (iii)  $g(x_1, 0, \dots, 0) = \dots = g(0, \dots, 0, x_t) = 0$ .

このとき,

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_t) = x_1 + \dots + x_t + g(r(x_1), \dots, r(x_t))$$

は  $OA(s^t, t+1, s, t)$  の関数表現である. ここで  $s = p^l$  で  $r(x)$  は (1) から得られたものである.

証明. 定理 1 より  $f$  が直交配列の関数表現であることを示すためには  $f$  が逆変換可能であることを示せばよい. 一般性を失うことなく  $x_t$  が  $x_0, \dots, x_{t-1}$  で表せることのみを示す.  $g$  は各変数に関して線型なので

$$g(x_1, \dots, x_t) = g_1(x_1, \dots, x_{t-1})x_t + g_2(x_1, \dots, x_{t-1}).$$

と書き直すことが出来る. それゆえに

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{t-1}, x_0) &= f(x_1, \dots, x_{t-1}, f(x_1, \dots, x_{t-1}, x_t)) \\ &= x_1 + \dots + x_{t-1} + x_0 + g(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}), r(x_0)) \\ &= x_1 + \dots + x_{t-1} + x_0 \\ &\quad + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))r(x_0) + g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1})) \\ &= x_1 + \dots + x_{t-1} + \{x_1 + \dots + x_t + g(r(x_1), \dots, r(x_t))\} \\ &\quad + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))r(x_0) + g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1})) \\ &= 2x_1 + \dots + 2x_{t-1} + x_t \\ &\quad + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))\{r(x_0) + r(x_t)\} + 2g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1})) \end{aligned} \tag{2}$$

となる. ここで  $r(x_0)$  に着目して計算を行う.  $g$  の係数は  $GF(p)$  上の値なので,

$$g(x_1, \dots, x_t)^p = g(x_1^p, \dots, x_t^p)$$

となるので, この等式と補助定理 3 より,

$$\begin{aligned} r(x_0) &= x_0 + x_0^p + \dots + x_0^{p^{l-1}} \\ &= f(x_1, \dots, x_t) + f(x_1, \dots, x_t)^p + \dots + f(x_1, \dots, x_t)^{p^{l-1}} \\ &= x_1 + \dots + x_t + g(r(x_1), \dots, r(x_t)) \\ &\quad + x_1^p + \dots + x_t^p + g(r(x_1), \dots, r(x_t))^p + \dots \\ &\quad + x_1^{p^{l-1}} + \dots + x_t^{p^{l-1}} + g(r(x_1), \dots, r(x_t))^{p^{l-1}} \\ &= x_1 + \dots + x_t + g(r(x_1), \dots, r(x_t)) \\ &\quad + x_1^p + \dots + x_t^p + g(r(x_1), \dots, r(x_t)) + \dots \\ &\quad + x_1^{p^{l-1}} + \dots + x_t^{p^{l-1}} + g(r(x_1), \dots, r(x_t)) \\ &= r(x_1) + \dots + r(x_{t-1}) + r(x_t) + lg(r(x_1), \dots, r(x_t)). \end{aligned} \tag{3}$$

となる.  $l$  は  $p$  の倍数であるので,

$$r(x_0) = r(x_1) + \cdots + r(x_{t-1}) + r(x_t) \quad (4)$$

となる.

$$x_0 = x_1 + \cdots + x_t + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))r(x_t) + g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))$$

と等式 (2)(4) によって

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{t-1}, x_0) &= 2x_1 + \cdots + 2x_{t-1} + x_t \\ &\quad + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))\{r(x_1) + \cdots + r(x_{t-1}) + 2r(x_t)\} \\ &\quad + 2g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1})) \\ &= 2x_1 + \cdots + 2x_{t-1} + x_t \\ &\quad + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))\{r(x_1) + \cdots + r(x_{t-1})\} \\ &\quad + 2\{x_0 - (x_1 + \cdots + x_{t-1} + x_t + g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1})))\} \\ &\quad + 2g_2(r(x_1), \dots, r(x_{t-1})) \\ &= 2x_0 - x_t + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))\{r(x_1) + \cdots + r(x_{t-1})\}. \end{aligned} \quad (5)$$

を得る. それゆえに

$$x_t = -f(x_1, \dots, x_{t-1}, x_0) + 2x_0 + g_1(r(x_1), \dots, r(x_{t-1}))\{r(x_1) + \cdots + r(x_{t-1})\},$$

となる. よって  $x_t$  が  $x_0, x_1, \dots, x_{t-1}$  によって表されるので  $f$  は逆変換可能といえる. つまり  $f$  は直交配列の関数表現である.  $\square$

### 3 $t \leq 4$ での $OA(4^t, t+1, 4, t)$ の同型分類について

本節では第2節で得られた定理2から構成された直交配列の同型・非同型分類について述べる. しかし, 定理2の構成法では構成することが出来ない直交配列も存在するため, そのような直交配列も含めたの同型・非同型分類のアルゴリズムについて述べる.

本節では特に  $s = 4$  で  $t \leq 4$  である  $OA(4^t, t+1, 4, t)$  についてのみ考える.

注2. 同型分類に関して言及するときは関数表現を用いたほうが容易である. なぜなら  $t$  が大きくなるにしたがって増大する  $s^t \times (t+1)$  の行の置換を扱う必要がないからである.

補助定理4.  $GF(4)$  上のすべての置換  $\sigma$  は

$$\sigma(x) = a\tau(x) + b$$

で表せる. このとき  $a(\neq 0), b \in GF(4)$ ,  $\tau(x) = x$  または  $x^2$  である. またこの置換の集合  $\Sigma_4$  は  $4!$  個の置換  $\sigma(x)$  からなる.

証明.  $\tau(x) = x$  と  $x^2$  が  $GF(4)$  上の置換であることは容易にわかる. また  $\xi(x) = ax + b$  ( $a \neq 0, a, b \in GF(4)$ ) も置換である. ゆえに  $\sigma(x) = \xi(\tau(x)) = a\tau(x) + b$  は  $GF(4)$  上の置換になり, もし二つの置換  $a\tau(x) + b$  と  $a'\tau'(x) + b'$  が等しいときは  $a = a', b = b', \tau(x) = \tau'(x)$  とならなければならない. それゆえに  $a, b, \tau$  をそれぞれ選ぶと,  $3 \times 4 \times 2$  個選ぶことが出来る. よって示せた.  $\square$

補助定理 4 より以下のことが言える.

補助定理 5.  $f(x_1, \dots, x_t)$  を  $OA(4^t, t+1, 4, t)$  の関数表現としたとき,  $f$  の次数は各変数について最大で 2 である.

証明. 定理 1 より  $\sigma_i(x_i) = f(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1)$  は  $GF(4)$  上の置換である. それゆえに  $\deg \sigma_i(x_i) \leq 2$  である.  $\square$

ここで以下のアルゴリズムを用いて直交配列の同型と非同型の分類を行うこととする.

第 1 段階:

Step 1: 標準形を持つすべての直交配列を構成する.

Step 2: Step 1 で作られた直交配列をすべて関数表現する.

Step 3: 直交配列の 1 番目,  $\dots$ ,  $t$  番目の列の置換にあたる, 変数  $x_1, \dots, x_t$  の置換に関する同型分類を行い, 同じ関数表現を持つものを一つのグループにまとめる.

Step 4: Step 3 で生成された直交配列について  $x_i = f^{(i)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_0, x_{i+1}, \dots, x_t)$  という別の関数表現を各  $i$  について  $x_i$  と  $x_0$  を入れ替えることにより生成する. 手順としては定理 2 の証明の過程と同様である.  $s = 4$  の場合はこの結果で得られる式は標準形となる.

Step 5: Step 3 と同様に同じ関数表現を持つ直交配列を同一のクラスに分類する. この操作は直交配列の第 0 列と第  $i$  列の置換による同型分類と同値である.

Step 6: 各  $c_i \in GF(s)$  について  $x_0 - c_0 = f(x_1 - c_1, \dots, x_t - c_t)$  を計算し別の同型クラスに分類されているものと比較をする. このとき異なるグループ間で同じ式があればそのグループ同士を一つにまとめる. これは直交配列の列内の要素の置換と同値である.

第 I 段階のあと非線型な直交配列のグループの数は相当数減らすことが出来る. しかしながらまだ二つのグループを一つにする可能性が残っている.



表 1: 非同型な  $OA(4^2, 3, 4, 2)$  の標準形

No.	$g(x_1, x_2)$
1	none
2	$r(x_1)r(x_2)$

第 II 段階: 各関数表現に関してすべての変数の置換  $\theta$  と要素の置換  $\sigma_i$  を行い別の関数表現と比較を行う。その後すべての非同型な直交配列のクラスを決めることが出来る。

これらの操作を行うことによって  $t = 2, 3, 4$  である  $OA(4^t, t+1, 4, t)$  についてすべてを同型・非同型分類することができた。結果は表 1, 2, 3, 4 である。これらの表ではスペースの都合から

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_t) = x_1 + \dots + x_t + g(x_1, \dots, x_t)$$

の  $g(x_1, \dots, x_t)$  の部分のみを記述する。

$s = 4$  で  $t = 2$  の場合は非同型な直交配列はただ二つのみ存在し、そのうちの一方は線型の形、もう一方は非線型な形である。それらの関数表現は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ x_0 &= f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + r(x_1)r(x_2). \end{aligned}$$

これら二つの関数表現は定理 2 から得られる。

$s = 4$  で  $t = 3$  の場合は 5 つの非同型な直交配列が存在する。このうち 4 つ（線型な形の関数表現を一つ含む）は定理 2 から構成されるが、最後の一つは定理 2 から構成することが出来ないので段階 I から段階 II を経ることによって見つけた。結果は表 2 に記載した。

また  $s = 4$  で  $t = 4$  の場合は 31 個の非同型な直交配列が存在する。最初の 18 個（線型な形を一つ含む）は定理 2 から構成され、(表 3 参照) 残りの 13 個は段階 I から段階 II によって見つけたものである。(表 4 参照)

これらの結果より定理 2 はたくさんの非線型で非同型な直交配列を構成することがわかるが、それだけでは不十分であり定理 2 では作り出せず、定理 2 から作り出すものとは非同型な直交配列もほかに存在することが分かる。

表 2: 非同型な  $OA(4^3, 4, 4, 3)$  の標準形

No.	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	none
2	$r(x_1)r(x_2)$
3	$r(x_1)r(x_2) + r(x_1)r(x_3) + r(x_2)r(x_3)$
4	$r(x_1)r(x_2) + r(x_1)r(x_3) + r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_2)r(x_3)$
5	$r(x_1)r(x_2) + r(x_1)r(x_3) + \alpha^2 r(\alpha x_2)r(\alpha x_3) + r(x_1)r(\alpha x_2)r(\alpha x_3)$

表 3: 定理 2 から構成される非同型  $OA(4^4, 5, 4, 4)$  の標準形

No.	$g(x_1, x_2, x_3, x_4)$
1	none
2	$r(x_1)r(x_2)$
3	$r(x_1)r(x_2) + r(x_1)r(x_3)$
4	$r(x_1)r(x_2) + r(x_3)r(x_4)$
5	$r(x_1)r(x_2) + r(x_2)r(x_3) + r(x_3)r(x_4)$
6	$r(x_1)r(x_2) + r(x_2)r(x_3) + r(x_3)r(x_1)$
7	$r(x_1)r(x_2) + r(x_1)r(x_3) + r(x_1)r(x_4) + r(x_2)r(x_3) + r(x_2)r(x_4) + r(x_3)r(x_4)$
8	$r(x_1)r(x_2)r(x_3)$
9	$r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_4)$
10	$r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_4) + r(x_2)r(x_4) + r(x_3)r(x_4)$
11	$r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_4) + r(x_2)r(x_4)$
12	$r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_2)r(x_4) + r(x_1)r(x_3)r(x_4)$
13	$r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_2)r(x_4) + r(x_1)r(x_3)r(x_4) + r(x_1)r(x_2)$
14	$r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_2)r(x_4) + r(x_1)r(x_3)r(x_4) + r(x_1)r(x_3)$
15	$r(x_1)r(x_2)r(x_3)r(x_4)$
16	$r(x_1)r(x_2)r(x_3)r(x_4) + r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_2)r(x_4)$
17	$r(x_1)r(x_2)r(x_3)r(x_4) + r(x_1)r(x_2) + r(x_2)r(x_3) + r(x_3)r(x_4)$
18	$r(x_1)r(x_2)r(x_3)r(x_4) + r(x_1)r(x_2)r(x_3) + r(x_1)r(x_2)r(x_4) + r(x_1)r(x_3)r(x_4) + r(x_2)r(x_3)r(x_4)$

表 4: 定理 2 から構成されない非同型 OA(4<sup>4</sup>, 5, 4, 4) の標準形

No.	$g(x_1, x_2, x_3, x_4)$
19	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_4) + r(x_2) r(x_3)$
20	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + r(x_1) r(x_3) + r(x_2) r(x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(x_3)$
21	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) + r(x_1) r(x_4) + r(\alpha^2 x_1) r(x_2) r(x_3)$
22	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + r(x_1) r(x_3) + r(x_1) r(x_4) + r(x_2) r(x_3) + r(x_2) r(x_4) + r(x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(x_4)$
23	$r(x_1) r(x_2) + r(x_1) r(x_3) + r(x_1) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_3) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(x_1) r(\alpha^2 x_3) r(\alpha^2 x_4)$
24	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + r(x_1) r(x_3) r(x_4) + r(x_2) r(x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha x_3) r(\alpha x_4)$
25	$r(x_1) r(x_2) + \alpha^2 r(\alpha x_1) r(\alpha x_3) r(\alpha x_4) + \alpha^2 r(\alpha x_2) r(\alpha x_3) r(\alpha x_4) + \alpha^2 r(x_1) r(x_2) r(\alpha x_3) r(\alpha x_4)$
26	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) + r(x_1) r(x_4) + r(\alpha^2 x_1) r(x_2) r(x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) r(\alpha^2 x_4) + \alpha^2 r(\alpha^2 x_1) r(x_2) r(x_3) r(\alpha^2 x_4)$
27	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) + r(x_1) r(x_4) + r(x_2) r(x_3) + r(x_2) r(x_4) + r(x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(x_2) r(x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) r(x_4) + \alpha^2 r(\alpha^2 x_1) r(x_2) r(x_3) r(x_4)$
28	$r(x_1) r(x_2) + r(x_1) r(x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_3) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(x_1) r(x_2) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(x_1) r(x_3) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) r(\alpha^2 x_4)$
29	$r(x_1) r(x_2) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_4) + r(x_3) r(x_4) + \alpha r(x_1) r(x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(x_1) r(x_2) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(x_3) r(x_4) + \alpha r(x_1) r(x_2) r(x_3) r(x_4)$
30	$\alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) + r(x_1) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + r(x_2) r(x_4) + r(x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) r(x_4)$
31	$r(x_1) r(x_2) + r(x_1) r(x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + r(x_2) r(x_4) + r(x_3) r(x_4) + \alpha r(x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(x_2) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_1) r(x_3) r(x_4) + \alpha r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) r(x_4) + r(\alpha^2 x_1) r(\alpha^2 x_2) r(\alpha^2 x_3) r(\alpha^2 x_4)$

## 参考文献

- [1] Cheng, C. S. (1995). Some projection properties of orthogonal arrays. *Annals of Statistics* **23**, 1223-1233.
- [2] Hedayat, A. S., Stufken, J., and Su, G. (1997). On the construction and existence of orthogonal arrays with three levels and indexes 1 and 2. *Annals of Statistics* **25**, 2044-2053.
- [3] Hedayat, A. S., Sloane, N. J. A., and Stufken, J. (1999). *Orthogonal Arrays: Theory and Applications*. New York. Springer.  
*The Theory of Error-correcting Codes*. North-Holland.  
*On Four-level Orthogonal Arrays with Strength  $t$ , Constraints  $t + 1$  and Index Unity*. Master's thesis in Keio university.