数理解析研究所講究録 1466 巻 2006 年 38-48

二面体群の整数係数ホッホシルト・コホモロジー環について

愛媛大学・理工学研究科　河野 貴臣 (Takaomi Kawano)
Graduate school of sience and engineering
Ehime University

1. 序

この報告では、位数 2 冪の二面体群 $G = \langle\, x, y \mid x^{2^{n+1}} = y^2 = 1,\ yxy = x^{-1} \rangle$ について、そのホッホシルト・コホモロジー環 $HH^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G)$ の構造を決定することを目的とした。

定義 (Hochschild cohomology). 可換環 R, R-*algebra* Λ, Λ-両側加群 M に対して、M 係数のホッホシルト・コホモロジー環は次で定義される。

$$HH^*(\Lambda, M) = \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M),$$

但し、$\Lambda^e = \Lambda \otimes \Lambda^{op}$ とする。

一般に有限群 G に対して、$\Lambda = \mathbb{Z}G$ 場合には、G の M への作用を共役で定義したときの普通のコホモロジー環 $H^*(G, M)$ と同型であることが知られている:

$$HH^*(\mathbb{Z}G, M) \simeq H^*(G, M).$$

今回考えるのは、特に $\Lambda = M = \mathbb{Z}G$ の場合であり、この同型対応により $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ を考えることと同値であることが分かる。従って、以下では $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ について議論する。今 G の共役類の分解を考えることにより、$H^*(G, \mathbb{Z}G)$ は次の様に直和分解されることが分かる。

$$\begin{aligned} H^*(G, \mathbb{Z}G) \ &= \ H^*(G, \mathbb{Z}) \oplus H^*(G, \mathbb{Z}z) \oplus \left(\bigoplus_{1 \le k \le s-1} H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}) \right) \\ &\quad \oplus H^*(G, \mathbb{Z}C_y) \oplus H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}). \end{aligned}$$

但し、ここで $z = x^{2^n}$ とし、C_{x^k}, C_y, C_{yx} はそれぞれ x^k, y, yx を含む共役類とする。この直和分解における各項は、$H^*(G, \mathbb{Z})$ の元との積について閉じているので、$H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の生成元として、各項の $H^*(G, \mathbb{Z})$ 上の生成元を採用した。また、この直和分解において、$H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k}), H^*(G, \mathbb{Z}C_y), H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$ はそれぞれ $H^*(\langle x\rangle, \mathbb{Z}x^k), H^*(\langle y, z\rangle, \mathbb{Z}y), H^*(\langle yx, z\rangle, \mathbb{Z}yx)$ からのコレストリクションとして導かれる。(但し、ここでの $\mathbb{Z}x^k, \mathbb{Z}y, \mathbb{Z}yx$ への作用は共役で定義されることに注意する。) このことより、実際の計算にはフロベニウスの相互律を利用した。

最後にこの報告集を通して、次の記号はそれぞれ以下の意味で用いるものとする:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{t \in \langle x \rangle} t \\ E &= \sum_{t \in C_y} t \\ D &= \sum_{t \in C_{yx}} t \end{aligned}$$

また、s, z は次の意味で用いる:

$$s = \frac{|x|}{2} = 2^n \qquad z = x^s$$

2. 生成元

今回は、$H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の生成元として、各項の $H^*(G, \mathbb{Z})$ 上の生成元を選んだ。この節ではそれらを、より扱いやすいコホモロジー群 $H^*(G, \mathbb{F}_2)$, $H^*(G, \mathbb{Z}y)$ などに関連付けてて紹介する。

2.1. $H^*(G,\mathbb{Z})$ **の構造.**

命題 2.1.

$$H^*(G,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ \epsilon_3,\ \epsilon_4]/I,$$

但し I は後述の関係式 (1),(6),(7) が生成するイデアルを意味する。

命題 2.2.

$$H^*(G,\mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x^*,\ y^*,\ \omega]/(x^*(x^*+y^*)),$$

但し、x^*, y^*, ω はそれぞれ次で定義される。

$$x^* : \begin{cases} x-1 & \longmapsto & 1 \\ y-1 & \longmapsto & 0 \end{cases},\ y^* : \begin{cases} x-1 & \longmapsto & 0 \\ y-1 & \longmapsto & 1 \end{cases},\ \omega : \begin{cases} (N,0) & \longmapsto & 1 \\ (y+1,x+1) & \longmapsto & 0 \\ (0,y+1) & \longmapsto & 0 \end{cases}.$$

$H^*(G,\mathbb{Z})$, $H^*(G,\mathbb{F}_2)$ の構造は、これらの命題 (2.1),(2.2) で与えられるが、ここでは $H^*(G,\mathbb{Z})$ の生成元 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ をそれぞれ x^*,y^*,ω に、ϵ_4 を $H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z})$ の生成元 χ に関連付けて紹介する:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{mod\ 2} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0$$

$\mathbb{Z}G$-加群の定義より、次のコホモロジーの完全系列を導く。

$$\cdots \longrightarrow H^{q-1}(G,\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\Delta} H^q(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} H^q(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{mod\ 2} H^q(G,\mathbb{F}_2)$$
$$\xrightarrow{\Delta} H^{q+1}(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

$H^*(G,\mathbb{Z})$ の生成元 ϵ_1,ϵ_2 はそれぞれ、連結準同型 $\Delta\ :\ H^1(G,\mathbb{F}_2)\to H^2(G,\mathbb{Z})$ による x^*,y^* の像として得られる。すなわち、

$$\epsilon_1 = \Delta(x^*),\ \epsilon_2 = \Delta(y^*).$$

同様に、ϵ_3 は連結準同型 $\Delta\ :\ H^2(G,\mathbb{F}_2)\to H^3(G,\mathbb{Z})$ による ω の像として得られる。すなわち、

$$\epsilon_3 = \Delta(\omega).$$

次に、4 次の生成元 ϵ_4 は $H^2(\langle x\rangle,\mathbb{Z})$ から $H^4(G,\mathbb{Z})$ への norm map による $\chi\in H^2(\langle x\rangle,\mathbb{Z})$ の像として得られる。すなわち、

$$\epsilon_4 = \chi^{\otimes G},$$

但し、χ は次で定義される。

$$\chi\ :\ N = \sum_{t\in\langle x\rangle} t \longmapsto 1.$$

2.2. $H^*(G,\mathbb{Z}z)$ **の生成元.**

$H^*(G,\mathbb{Z})$-加群として、$H^*(G,\mathbb{Z}z)$ は $H^*(G,\mathbb{Z})$ と同型なので、$H^*(G,\mathbb{Z}z)$ は $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$ に対応した元で生成される。ここではそれらを $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ と表すことにする。すなわち、

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \Delta((x^*)_z), \\ \zeta_2 &= \Delta((y^*)_z), \\ \zeta_3 &= \Delta((\omega)_z), \\ \zeta_4 &= \chi_s^{\otimes G}. \end{aligned}$$

但し、$(x^*)_z, (y^*)_z, \omega_z$ はそれぞれ次で定義され、$\chi_s\ :\ N \longmapsto z$ とする。

$$(x^*)_z : \begin{cases} x-1 & \longmapsto & z \\ y-1 & \longmapsto & 0 \end{cases},\quad (y^*)_z : \begin{cases} x-1 & \longmapsto & 0 \\ y-1 & \longmapsto & z \end{cases},\quad \omega_z : \begin{cases} (N,0) & \longmapsto & z \\ (y+1,x+1) & \longmapsto & 0 \\ (0,y+1) & \longmapsto & 0 \end{cases}.$$

2.3. $H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ **の生成元.**

Eckman-Shapiro の補題により $H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ は $H^*(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y)$ から次のように得られる。

$$\text{(A)} \qquad H^*(G,\mathbb{Z}C_y)=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}H^*(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y).$$

これにより、$H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ の構造を $H^*(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y)$ と関連付けて考えることができる。

命題 2.3.

$$H^*(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha_y,\ \beta_y,\ \gamma_y]/\left((\gamma^2)_y+(\alpha^2\beta)_y+(\alpha\beta^2)_y\right),$$

但し、$\alpha_y,\beta_y\in H^2(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y)$, $\gamma_y\in H^3(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y)$ はそれぞれ次のように定義される。

$$\alpha_y:\begin{cases}(z+1,0) & \longmapsto & y\\ (y-1,-z+1) & \longmapsto & 0\\ (0,y+1) & \longmapsto & 0\end{cases}\qquad \beta_y:\begin{cases}(z+1,0) & \longmapsto & 0\\ (y-1,-z+1) & \longmapsto & 0\\ (0,y+1) & \longmapsto & y\end{cases}$$

$$\gamma_y:\begin{cases}(z+1,0,0) & \longmapsto & 0\\ (y-1,-z-1,0) & \longmapsto & y\\ (0,y+1,z-1) & \longmapsto & -y\\ (0,0,y-1) & \longmapsto & 0\end{cases}.$$

このとき次の命題が成り立つ。

命題 2.4. $H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ は $H^*(G,\mathbb{Z})$ 上次の元で生成される。

$$\begin{aligned}\eta_1&=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\alpha_y+\beta_y),\\ \eta_2&=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\beta_y),\\ \eta_3&=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\gamma_y),\\ \eta_4&=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}\left((\alpha^2)_y+(\alpha\beta)_y\right).\end{aligned}$$

Proof. 命題 (2.3) で見たように、$H^*(\langle y,z\rangle,\mathbb{Z}y)$ は α_y, β_y, γ_y で生成され、それらの次数は順に 2,2,3 であった。従って、(A) により、$H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ の 2 次、3 次部分はそれぞれ $\mathbb{Z}$-加群として次のように得られる:

$$\begin{aligned}H^2(G,\mathbb{Z}C_y)&=\langle\eta_1,\ \eta_2\rangle,\\ H^3(G,\mathbb{Z}C_y)&=\langle\eta_3\rangle.\end{aligned}$$

次に、$H^4(G,\mathbb{Z}C_y)$ は $\mathbb{Z}$-加群として、$\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\alpha^2)_y$, $\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\alpha\beta)_y$, $\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\beta^2)_y$ で生成されることが分かる。しかし、$\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\alpha\beta)_y$, $\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\beta^2)_y$ は ϵ_2 を用いて次のように表すことが出来る:

$$\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\alpha\beta)_y=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}\left((\mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\,\epsilon_2)\cdot\alpha_y\right)=\epsilon_2\cdot\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}\,\alpha_y$$
$$\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}(\beta^2)_y=\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}\left((\mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\,\epsilon_2)\cdot\beta_y\right)=\epsilon_2\cdot\mathrm{cor}^G_{\langle y,z\rangle}\,\beta_y$$

但し、ここでの計算には後述の補題 (3.1) を用いた。従って、

$$H^4(G,\mathbb{Z}C_y)\subset H^*(G,\mathbb{Z})[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4].$$

を得る。同様に 5,6 次部分についても、

$$H^5(G,\mathbb{Z}C_y),\ H^6(G,\mathbb{Z}C_y)\subset H^*(G,\mathbb{Z})[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4].$$

と成ることが分かる。以下帰納的に、より高次の元についても η_1, η_2, η_3, η_4 の四つの元で生成される。 □

2.4. $H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx})$ **の生成元.**

$H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ の場合と同様に、$H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx})$ は $H^*(\langle yx,z\rangle,\mathbb{Z}yx)$ からのコレストリクションとして得られる:

$$H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx})=\mathrm{cor}^G_{\langle yx,z\rangle}H^*(\langle yx,z\rangle,\mathbb{Z}yx).$$

従って、$H^*(G,\mathbb{Z}C_y)$ の場合と同様にして、次の命題が得られる。

命題 2.5. $H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx})$ は $H^*(G,\mathbb{Z})$ 上次の元で生成される:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \mathrm{cor}^G_{\langle yx,z\rangle}(\alpha_{yx}+\beta_{yx}),\\ \theta_2 &= \mathrm{cor}^G_{\langle yx,z\rangle}(\beta_{yx}),\\ \theta_3 &= \mathrm{cor}^G_{\langle yx,z\rangle}(\gamma_{yx}),\\ \theta_4 &= \mathrm{cor}^G_{\langle yx,z\rangle}\left((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx}\right).\end{aligned}$$

但し、$\alpha_{yz},\beta_{yx},\gamma_{yx}$ はそれぞれ $\alpha_y,\beta_y,\gamma_y$ に対応する $H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx})$ の元とする。

Proof. 証明は命題 (2.4) の場合と同様。 □

2.5. $H^*(G,\mathbb{Z}C_{x^k})$ **の生成元.** 各 $1\le k\le s-1$ に対して、$H^*(G,\mathbb{Z}C_{x^k})$ は $H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z}x^k)$ からのコレストリクションとして得られる:

$$H^*(G,\mathbb{Z}C_{x^k})=\mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z}x^k).$$

ここで、$\chi_k\in H^*(\langle x\rangle,\mathbb{Z}x^k)$ を次のように定義する。

$$\chi_k\ :\ N\longmapsto x^k.$$

命題 2.6. このとき、$H^*(G,\mathbb{Z}C_{x^k})$ は $H^*(G,\mathbb{Z})$ 上次の元で生成される。

$$\begin{aligned}\xi_{(k,2)} &= \mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}\chi_k && ,\textit{where } \chi_k\in H^2(\langle x\rangle,\mathbb{Z}x^k)\\ \xi_{(k,4)} &= \mathrm{cor}^G_{\langle x\rangle}\chi_k && ,\textit{where } \chi_k\in H^4(\langle x\rangle,\mathbb{Z}x^k)\end{aligned}$$

以上より、$H^*(G,\mathbb{Z})$ 上の $H^*(G,\mathbb{Z}G)$ の生成元として次が得られた。

	$q=2$	$q=3$	$q=4$
$H^q(G,\mathbb{Z})$	$\epsilon_1=\Delta(x^*)$ $\epsilon_2=\Delta(y^*)$	$\epsilon_3=\Delta(\omega)$	$\epsilon_4=\chi^{\otimes G}$
$H^q(G,\mathbb{Z}z)$	$\zeta_1=\Delta((x^*)_z)$ $\zeta_2=\Delta((y^*)_z)$	$\zeta_3=\Delta(\omega_z)$	$\zeta_4=\chi_s^{\otimes G}$
$H^q(G,\mathbb{Z}C_y)$	$\eta_1=(\alpha_y+\beta_y)\uparrow^G_{\langle y,z\rangle}$ $\eta_2=(\beta_y)\uparrow^G_{\langle y,z\rangle}$	$\eta_3=(\gamma_y)\uparrow^G_{\langle y,z\rangle}$	$\left((\alpha^2)_y+(\alpha\beta)_y\right)\uparrow^G_{\langle y,z\rangle}$
$H^q(G,\mathbb{Z}C_{yx})$	$\theta_1=(\alpha_{yx}+\beta_{yx})\uparrow^G_{\langle yx,z\rangle}$ $\theta_2=(\beta_{yx})\uparrow^G_{\langle yx,z\rangle}$	$\theta_3=(\gamma_{yx})\uparrow^G_{\langle yx,z\rangle}$	$\theta_4=\left((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx}\right)\uparrow^G_{\langle yx,z\rangle}$
$H^q(G,\mathbb{Z}_{x^k})$	$\xi_{(k,2)}=\chi_k\uparrow^G_{\langle x\rangle}$		$\xi_{(k,4)}=\chi_k\uparrow^G_{\langle x\rangle}$

余白の都合上、ここでは↑でコレストリクションを表した。

3. 基本関係式

前節では、$H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の生成元を、それぞれ $H^*(\langle y, z\rangle, \mathbb{Z}y)$ の生成元などに関連付けて紹介した。このような関連付けを生成元に与えることで、積を計算するのにフロベニウスの相互律を用いることが出来る。以下では、この有用性に着目して $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の基本関係式を紹介する。

各生成元の位数を考えることにより、次の関係式が得られる。

(1) $$2\epsilon_1 = 2\epsilon_2 = 2\epsilon_3 = 2s\epsilon_4 = \bar{0},$$

(2) $$2\zeta_1 = 2\zeta_2 = 2\zeta_3 = 2s\zeta_4 = \bar{0},$$

(3) $$2s\xi_{(k,2)} = 2s\xi_{(k,4)} = \bar{0},$$

(4) $$2\eta_1 = 2\eta_2 = 2\eta_3 = 2\eta_4 = \bar{0},$$

(5) $$2\theta_1 = 2\theta_2 = 2\theta_3 = 2\theta_4 = \bar{0}.$$

$H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の直和分解において、各直和因子はそれぞれ $H^*(G, \mathbb{Z})$-加群であった。また、特に $H^*(G, \mathbb{Z}z)$ は $H^*(G, \mathbb{Z})$-加群として $H^*(G, \mathbb{Z})$ と同型であり、$\bigoplus_{1\le k\le s-1} H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$, $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$, $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$ は $H^*(G, \mathbb{Z}z)$-加群でもある。このことに注意して、最初に η, θ 型生成元と $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の元との積の間の関係を考える。

1. $H^*(G, \mathbb{Z})$ において、次の関係式が成り立つことが知られている:

(6) $$(\epsilon_1)^2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_1 = \bar{0},$$

(7) $$(\epsilon_3)^2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 = \bar{0}.$$

一方 $z^2 = 1$ であり、先に述べたように $H^*(G, \mathbb{Z})$-加群として $H^*(G, \mathbb{Z})$ と $H^*(G, \mathbb{Z}z)$ は同型なので、η 型生成元と θ 型生成元との間には次の関係が成り立つ:

(8) $$\epsilon_h \cdot \epsilon_k = \zeta_h \cdot \zeta_k \qquad (h, k \in \{1, 2, 3, 4\}).$$

(9) $$\epsilon_h \cdot \zeta_k = \epsilon_k \cdot \zeta_h \qquad (h, k \in \{1, 2, 3, 4\}).$$

2. 次に、ϵ 型生成元と $\bigoplus_{1\le k\le s-1} H^*(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$ の元との積について、$\mathrm{res}_{\langle x\rangle}\, \epsilon_2 = \mathrm{res}_{\langle x\rangle}\, \epsilon_3 = \bar{0}$ なので、ϵ_2, ϵ_3 に対して、次の (9)〜(12) が得られる:

(10) $$\epsilon_2 \cdot \xi_{(k,2)} = \bar{0},$$

(11) $$\epsilon_2 \cdot \xi_{(k,4)} = \bar{0},$$

(12) $$\epsilon_3 \cdot \xi_{(k,2)} = \bar{0},$$

(13) $$\epsilon_3 \cdot \xi_{(k,4)} = \bar{0}.$$

また、$\mathrm{res}_{\langle x\rangle}\, \epsilon_1 \ :\ N \longmapsto s$ なので、ϵ_1 との積について次の関係が得られる。

(14) $$\epsilon_1 \cdot \xi_{(k,2)} = s\xi_{(k,4)},$$

(15) $$\epsilon_1 \cdot \xi_{(k,4)} = s\epsilon_4 \cdot \xi_{(k,2)}.$$

一方、$z \cdot x^k = x^{k+s}$ なので、η 型と ξ 型の積、θ 型と ξ 型の積の間には次の関係が成り立つ:

(16) $$\zeta_h \cdot \xi_{(k,2)} = \epsilon_h \cdot \xi_{(k+s,2)} \qquad (h \in \{1, 2, 3, 4\}),$$

(17) $$\zeta_h \cdot \xi_{(k,4)} = \epsilon_h \cdot \xi_{(k+s,4)} \qquad (h \in \{1, 2, 3, 4\}).$$

3. η 型生成元と $H^*(G, \mathbb{Z}C_y)$ の元との積について考えるために、先ず次の補題を導入する。

補題 3.1.

$$\mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\, \epsilon_1 = \bar{0},\ \mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\, \epsilon_2 = \beta,\ \mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\, \epsilon_3 = \gamma,$$
$$\mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\, \epsilon_4 = (\alpha^2 + \alpha\beta).$$

但し、α, β, γ は命題 (*2.3*) の中で定義した α_y, β_y, γ_y に対応する $H^*(\langle y, z\rangle, \mathbb{Z})$ の生成元とする。

この補題により、

(18) $$\epsilon_1 \times H^*(G, \mathbb{Z}C_y) = \bar{0}.$$

である。更に、命題 (2.4) を用いて、その他の η 型生成元と η_2, η_3, η_4 との積について次の関係式が得られる:

(19) $$\epsilon_4 \cdot \eta_2 = \epsilon_2 \cdot \eta_4 = \epsilon_3 \cdot \eta_3,$$

(20) $$\epsilon_3 \cdot \eta_2 = \epsilon_2 \cdot \eta_3,$$

(21) $$\epsilon_3 \cdot \eta_4 = \epsilon_4 \cdot \eta_3.$$

これと同様の関係式が ζ 型生成元と η 型生成元との積においても成り立ち、それらの間は次の関係で結ばれる:

(22) $$(\eta_h + \epsilon_h) \cdot \eta_k = \bar{0} \qquad (h, k \in \{2, 3, 4\}).$$

最後に、η_1 との積について次の関係が成り立つ:

(23) $$(\epsilon_h + \zeta_h) \cdot \eta_1 = \epsilon_h \cdot \eta_2 \qquad (h \in \{2, 3, 4\}).$$

4. η 型との積の場合と同様に、ϵ 型の生成元と θ 型生成元との積ついても先に補題を一つ導入する。

補題 3.2.

$$\mathrm{res}_{\langle yx,z\rangle}\, \epsilon_1 = \beta',\ \mathrm{res}_{\langle yx,z\rangle}\, \epsilon_2 = \beta',\ \mathrm{res}_{\langle yx,z\rangle}\, \epsilon_3 = \gamma',$$
$$\mathrm{res}_{\langle yx,z\rangle}\, \epsilon_4 = \alpha'(\alpha' + \beta').$$

ここで、α', β', γ' はそれぞれ、α_{yx}, β_{yx}, γ_{yx} に対応する $H^*(\langle yx, z\rangle, \mathbb{Z})$ の生成元とする。

この補題により、ϵ_1, ϵ_2 と θ 型生成元との間に、次の関係が存在する:

(24) $$(\epsilon_1 + \epsilon_2) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0}.$$

また、その他の ϵ 型生成元と $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ との積について、この補題と命題 (2.5) により次の関係式が得られる:

(25) $$\epsilon_2 \cdot \theta_4 = \epsilon_4 \cdot \theta_2 = \epsilon_3 \cdot \theta_3,$$

(26) $$\epsilon_2 \cdot \theta_3 = \epsilon_3 \cdot \theta_2,$$

(27) $$\epsilon_3 \cdot \theta_4 = \epsilon_4 \cdot \theta_3.$$

これらの関係式が、ζ 型生成元と θ 型生成元との積についても成り立ち、更にそれらは次の関係で結ばれる:

(28) $$(\zeta_1 + \zeta_2) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0},$$

(29) $$(\epsilon_h + \zeta_h) \times H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0} \qquad (h \in \{2, 3, 4\}).$$

命題 (2.6) で見たように、各 $1 \leq k \leq s-1$ について $\xi_{(k,2)}$, $\xi_{(k,4)}$ はそれぞれ次のように定義された:

$$\xi_{(k,2)} = \mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}\, \chi_k \quad (\deg \chi_k = 2),$$
$$\xi_{(k,4)} = \mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}\, \chi_k \quad (\deg \chi_k = 4).$$

一方、$\xi_{(k,2)}$, $\xi_{(k,4)}$ の $\langle x\rangle$ への制限はつぎで与えられる:

補題 3.3.

$$\mathrm{res}_{\langle x\rangle}\, \xi_{(k,2)} = \chi_{s+k} - \chi_k,$$
$$\mathrm{res}_{\langle x\rangle}\, \xi_{(k,4)} = \chi_{s+k} + \chi_k.$$

従って、ξ 型生成元同士の積について次の関係が成り立つ:

$$\xi_{(k,2)} \cdot \xi_{(l,2)} = \xi_{(k+l,4)} - \xi_{(k-l,4)}, \tag{30}$$

$$\xi_{(k,2)} \cdot \xi_{(l,4)} = \xi_{(k+l,2)} \cdot \epsilon_4 + \xi_{(k-l,2)} \cdot \epsilon_4, \tag{31}$$

$$\xi_{(k,4)} \cdot \xi_{(l,4)} = \xi_{(k+l,4)} \cdot \epsilon_4 + \xi_{(k-l,4)} \cdot \epsilon_4. \tag{32}$$

また、α_y, β_y, γ_y の $\langle z\rangle$ への制限は次で与えられる:

補題 3.4.

$$\mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\alpha_y \;:\; z+1 \longmapsto y \qquad \mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\beta_y = \bar{0} \qquad \mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\gamma_y = \bar{0}.$$

この補題 (3.4) と補題 (3.3) を用いて、次のように η 型生成元と ξ 型生成元との積を計算することができる:

$$\begin{aligned}
\eta_1 \cdot \xi_{(k,2)} &= \mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}\left(\left(\mathrm{cor}_{\langle z\rangle}^{\langle x\rangle}\,\mathrm{res}_{\langle z\rangle}(\alpha_y+\beta_y)\right)\cdot \chi_k\right)\\
&= \mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}\left(\left(\mathrm{cor}_{\langle z\rangle}^{\langle x\rangle}\,\mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\alpha_y\right)\cdot \chi_k\right)\\
&= \mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}\,\mathrm{res}_{\langle x\rangle}\,\eta_4 = \bar{0}.
\end{aligned}$$

また、これ以外の元の積についてもこのように考えて、結果として次の関係式を得る:

$$H^*(G,\mathbb{Z}C_{x^k}) \times H^*(G,\mathbb{Z}C_y) = \bar{0}. \tag{33}$$

同様に、θ 型生成元と ξ 型生成元との積についても次の関係式を得る:

$$H^*(G,\mathbb{Z}C_{x^k}) \times H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx}) = \bar{0}. \tag{34}$$

最後に、$H^*(G,\mathbb{Z}C_y) \oplus H^*(G,\mathbb{Z}C_{yx})$ の元同士の積について、紹介する。

$$\begin{aligned}
\eta_4 \cdot \theta_4 &= \mathrm{cor}_{\langle yx,z\rangle}^{G}\left((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx}\right)\cdot \mathrm{cor}_{\langle y,z\rangle}^{G}\left((\alpha^2)_{y}+(\alpha\beta)_{y}\right)\\
&= \mathrm{cor}_{\langle y,z\rangle}^{G}\left[\left(\mathrm{res}_{\langle y,z\rangle}\,\mathrm{cor}_{\langle yx,z\rangle}^{G}((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx})\right)\cdot((\alpha^2)_{y}+(\alpha\beta)_{y})\right]\\
&= \mathrm{cor}_{\langle y,z\rangle}^{G}\left[\left(\mathrm{cor}_{\langle z\rangle}^{\langle y,z\rangle}\sum_{0\le k\le \frac{s}{2}-1}\mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\mathrm{con}^{x^k}((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx})\right)\cdot((\alpha^2)_{y}+(\alpha\beta)_{y})\right]\\
&= \sum_{0\le k\le \frac{s}{2}-1}\mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}\left[\mathrm{cor}_{\langle z\rangle}^{\langle x\rangle}\left(\mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\mathrm{con}^{x^k}((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx})\cdot \mathrm{res}_{\langle z\rangle}((\alpha^2)_{y}+(\alpha\beta)_{y})\right)\right] \qquad (\Diamond)
\end{aligned}$$

ここで、次のことに注意する:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cor}_{\langle z\rangle}^{\langle x\rangle}\left(\mathrm{res}_{\langle z\rangle}\,\mathrm{con}^{x^k}((\alpha^2)_{yx}+(\alpha\beta)_{yx})\right)\cdot \mathrm{res}_{\langle z\rangle}((\alpha^2)_{y}+(\alpha\beta)_{y})&\\
= (N \longmapsto sx^{-2k-1}) = s\chi_{-2k-1}&
\end{aligned}$$

従って、$(\Diamond)$ は次の様に変形される:

$$\begin{aligned}
\Diamond &= \sum_{0\le k\le \frac{s}{2}-1}\mathrm{cor}_{\langle x\rangle}^{G}(s\chi_{-2k-1})\\
&= s\sum_{1\le k:odd\le s-1}\xi_{(k,4)}\cdot\zeta_4
\end{aligned}$$

命題 (2.4),(2.5) により、η_1 と θ_1 の積はこのように得られるが、その他の元の積についても同様に考えられ、その結果として次の関係式を得る:

1. η 型生成元同士の積について、

$$\eta_2 \cdot \eta_2 = \bar{0} \tag{35}$$
$$\eta_2 \cdot \eta_3 = \bar{0} \tag{36}$$
$$\eta_2 \cdot \eta_4 = \bar{0} \tag{37}$$

$$\eta_3 \cdot \eta_3 = \bar{0} \tag{38}$$
$$\eta_3 \cdot \eta_4 = \bar{0} \tag{39}$$

$$\eta_4 \cdot \eta_4 = \sum_{k:even,\ k\neq 0,s} \xi_{(k,4)} \cdot \epsilon_4 + s\epsilon_4 \cdot \epsilon_4 + s\zeta_4 \cdot \epsilon_4 \tag{40}$$

$$\eta_2 \cdot \eta_1 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot \zeta_2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_2 \cdot \zeta_2 \tag{41}$$

$$\eta_3 \cdot \eta_1 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 + \zeta_1 \cdot \epsilon_3 + \zeta_2 \cdot \epsilon_3 \tag{42}$$

$$\eta_4 \cdot \eta_1 = \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 + \zeta_2 \cdot \epsilon_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 + \zeta_1 \cdot \epsilon_4 + \sum_{2\leq k:even\leq s-2} \epsilon_1 \cdot \xi_{(k,4)} \tag{43}$$

$$\eta_1 \times \eta_1 = s \sum_{2\leq k:even\leq s-2} \xi_{(k,4)} + s\epsilon_4 + s\zeta_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_2 \tag{44}$$

2. θ 型生成元同士の積において、

$$\theta_2 \cdot \theta_2 = \bar{0} \tag{45}$$
$$\theta_3 \cdot \theta_2 = \bar{0} \tag{46}$$
$$\theta_4 \cdot \theta_2 = \bar{0} \tag{47}$$

$$\theta_3 \cdot \theta_3 = \bar{0} \tag{48}$$
$$\theta_4 \cdot \theta_3 = \bar{0} \tag{49}$$

$$\theta_4 \cdot \theta_4 = \eta_4 \cdot \eta_4 \tag{50}$$

$$\theta_1 \cdot \theta_2 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot \zeta_2 \tag{51}$$
$$\theta_1 \cdot \theta_3 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 + \epsilon_1 \cdot \zeta_3 \tag{52}$$
$$\theta_1 \cdot \theta_4 = s \sum_{2\leq k:even\leq s-2} \xi_{(k,2)} \cdot \epsilon_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 + \epsilon_1 \cdot \zeta_4 \tag{53}$$

$$\theta_1 \cdot \theta_1 = s \sum_{2\leq k:even\leq s-2} \xi_{(k,4)} + s\epsilon_4 + s\zeta_4 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \tag{54}$$

3. η 型生成元と θ 型生成元との積について、次の関係が成り立つ:

(55) $$\eta_2 \cdot \theta_2 = \bar{0}$$
(56) $$\eta_3 \cdot \theta_2 = \eta_2 \cdot \theta_3 = \bar{0}$$
(57) $$\eta_4 \cdot \theta_2 = \eta_2 \cdot \theta_4 = \bar{0}$$

(58) $$\eta_3 \cdot \theta_3 = \bar{0}$$
(59) $$\eta_4 \cdot \theta_3 = \eta_3 \cdot \theta_4 = \bar{0}$$

(60) $$\eta_4 \cdot \theta_4 = s \sum_{1 \leq k : odd \leq s-1} \xi_{(k,4)} \cdot \epsilon_4$$

(61) $$\eta_1 \cdot \theta_2 = \theta_1 \cdot \eta_2 = \bar{0}$$
(62) $$\eta_1 \cdot \theta_3 = \theta_1 \cdot \eta_3 = \bar{0}$$

(63) $$\theta_1 \cdot \eta_4 = \eta_1 \cdot \theta_4$$

(64) $$\eta_1 \cdot \theta_1 = s \sum_{1 \leq k : odd \leq s-1} \xi_{(k,4)}$$

4. $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ の構造

命題 4.1.

$$H^*(G, \mathbb{Z}G) \simeq \mathbb{Z}[\mathcal{G}] / (\mathcal{L}),$$

但し、$\mathcal{G}$ は *2* 節で紹介した生成元の集合、$\mathcal{L}$ は *3* 節で紹介した関係式全部 (1〜64) の集合とする。

この節では、この命題の証明を簡単に紹介する。

(準備)

補題 4.2. 各 q に対して、$H^q(G, \mathbb{Z})$, $H^q(G, \mathbb{Z}z)$ の位数は次で与えられる。

1. $q : odd$ のとき、$2^{\frac{q-1}{2}}$,
2. $q \equiv 2 \pmod 4$ のとき、$2^{\frac{q+2}{2}}$,
3. $q \equiv 0 \pmod 4$ のとき、$2^{\frac{q}{2}} + 2s$.

補題 4.3. 各 q に対して、$H^q(G, \mathbb{Z}C_y)$, $H^*(G, \mathbb{Z}C_{yx})$ の位数は次で与えれる。

1. $q : even$ のとき、$2^{\frac{q+2}{2}}$,
2. $q : odd$ のとき、$2^{\frac{q-1}{2}}$.

補題 4.4. 各 q に対して、$\bigoplus_{1 \leq k \leq s-1} H^q(G, \mathbb{Z}C_{x^k})$ の位数は次で与えられる。

1. $q : odd$ のとき、0,
2. $q \equiv 2 \pmod 4$ のとき、$(2s)^{s-1}$,
3. $q \equiv 0 \pmod 4$ のとき、$(2s)^{s-1}$.

今、先に紹介した生成元と関係式によって定義される環 $\mathcal{F}$ を次の様に定義する。次に、$\mathcal{I}, \mathcal{Z}, \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{X}$ を次で定義する。

定義.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \{I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4\}\\
\mathcal{Z} &= \{Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_4\}\\
\mathcal{E} &= \{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4\}\\
\mathcal{D} &= \{D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4\}\\
\mathcal{X} &= \{X_{(k,2)},\ X_{(k,4)}\} \quad (1 \le k \le s-1)
\end{aligned}
$$

今、対応 f を次で定める。

$$
\begin{cases} \epsilon_1 \longmapsto I_1 \\ \epsilon_2 \longmapsto I_2 \\ \epsilon_3 \longmapsto I_3 \\ \epsilon_4 \longmapsto I_4 \end{cases}
\quad
\begin{cases} \zeta_1 \longmapsto Z_1 \\ \zeta_2 \longmapsto Z_2 \\ \zeta_3 \longmapsto Z_3 \\ \zeta_4 \longmapsto Z_4 \end{cases}
\quad
\begin{cases} \xi_{(k,2)} \longmapsto X_{(k,2)} & (1 \le k \le s-1) \\ \xi_{(k,4)} \longmapsto X_{(k,4)} & (1 \le k \le s-1) \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \eta_1 \longmapsto E_1 \\ \eta_2 \longmapsto E_2 \\ \eta_3 \longmapsto E_3 \\ \eta_4 \longmapsto E_4 \end{cases}
\quad
\begin{cases} \theta_1 \longmapsto D_1 \\ \theta_2 \longmapsto D_2 \\ \theta_3 \longmapsto D_3 \\ \theta_4 \longmapsto D_4 \end{cases}
$$

この対応を用いて、抽象的に望む構造を持つ環を $\mathcal{F}$ とする:

$$\mathcal{F} = \mathbb{Z}[\mathcal{G}\text{ を対応 } f \text{ で書き換えたもの}]/(\mathcal{L}\text{ を対応 } f \text{ で書き換えたもの}).$$

補題 4.5. $\mathcal{F}_q$($\mathcal{F}$ の q 次成分全体)において、次が成り立つ。

$$\mathcal{F}_q = \mathfrak{I}_q + \mathfrak{Z}_q + \mathfrak{E}_q + \mathfrak{D}_q + \mathfrak{X}_q \qquad (q \ge 0).$$

ただし、$\mathfrak{I}_q, \mathfrak{Z}_q, \mathfrak{E}_q, \mathfrak{D}_q, \mathfrak{X}_q \subset \mathcal{F}$ は、それぞれ次で定義される。

定義. $\mathfrak{I}_q$ は次の元で生成される $\mathbb{Z}$-加群:

1. q : 奇数のとき,

$$
\begin{aligned}
&I_4^i I_2^j I_3 && ,4i+2j+3=q\\
&I_4^i I_2^j I_1 I_3 && ,4i+2j+5=q
\end{aligned}
$$

2. q : 偶数のとき,

$$I_4^i I_2^j \qquad ,4i+2j=q$$

$\mathfrak{Z}_q$ は次の元で生成される $\mathbb{Z}$-加群:

1. q : 奇数のとき,

$$
\begin{aligned}
&I_4^i I_2^j Z_3 && ,4i+2j+3=q\\
&I_4^i I_2^j I_3 Z_1 && ,4i+2j+5=q
\end{aligned}
$$

2. q : 偶数のとき,

2.a. $q \equiv 2 \pmod 4$ ならば,

$$I_4^i Z_2^j \qquad ,4i+2j=q$$

2.b. $q \equiv 0 \pmod 4$ ならば,

$$
\begin{aligned}
&I_4^i Z_2^j && ,4i+2j=q \quad i \ge 1\\
&I_4^i Z_4 && ,4i+4=q
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{E}_q$ は次の元で生成される $\mathbb{Z}$-加群:

1. q : 奇数のとき,

$$\begin{array}{ll} I_4^i I_2^j I_3 E_1 & , 4i+2j+5=q \\ I_4^i I_2^j E_3 & , 4i+2j+3=q \end{array}$$

2. q : 偶数のとき,

2.a. $q \equiv 2 \pmod 4$ ならば,

$$\begin{array}{ll} I_4^i I_2^j E_1 & , 4i+2j+2=q \\ I_4^i I_2^j E_2 & , 4i+2j+2=q \end{array}$$

2.b. $q \equiv 0 \pmod 4$ ならば,

$$\begin{array}{ll} I_4^i I_2^j E_1 & , 4i+2j+2=q \\ I_4^i I_2^j E_2 & , 4i+2j+2=q \\ I_4^i E_4 & , 4i+4=q \end{array}$$

$\mathfrak{D}_q$ は次の元で生成される $\mathbb{Z}$-加群:

1. q : 奇数のとき,

$$\begin{array}{ll} I_4^i I_2^j I_3 D_1 & , 4i+2j+5=q \\ I_4^i I_2^j D_3 & , 4i+2j+3=q \end{array}$$

2. q : 偶数のとき,

2.a. $q \equiv 2 \pmod 4$ ならば,

$$\begin{array}{ll} I_4^i I_2^j D_1 & , 4i+2j+2=q \\ I_4^i I_2^j D_2 & , 4i+2j+2=q \end{array}$$

2.b. $q \equiv 0 \pmod 4$ ならば,

$$\begin{array}{ll} I_4^i I_2^j D_1 & , 4i+2j+2=q \\ I_4^i I_2^j D_2 & , 4i+2j+2=q \\ I_4^i D_4 & , 4i+4=q \end{array}$$

$\mathfrak{X}_q$ *(q:偶数)* は次の元で生成される $\mathbb{Z}$-加群:

1. $q \equiv 2 \pmod 4$ ならば、

$$I_4 X_{(k,2)} \quad (1 \leq k \leq s-1).$$

2. $q \equiv 0 \pmod 4$ ならば、

$$I_4 X_{(k,4)} \quad (1 \leq k \leq s-1).$$

命題 4.1 の証明. $\mathcal{F}$ から $H^*(G, \mathbb{Z}G)$ への全射準同型が存在するが、各次数 q での位数を比較することにより、これは同型であることを示したい。補題 (4.5) により

$$\mathcal{F} = \bigoplus_q (\mathfrak{I} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{E} + \mathfrak{D} + \mathfrak{X}).$$

である。この事と、補題 (4.2)〜(4.4) を用いて、各次数 q について $\mathcal{F}_q$ の位数は高々 $|H^q(G, \mathbb{Z}G)|$ であり、$\mathcal{F} \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G)$ を得る。 □

REFERENCES

[1] David Handel, *On products in the cohomology of the dihedral groups.* Tohoku Math. J. (2) **45**(1993), no.1, 13-42.

[2] Stephen f. Siegel And Sarah J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra.* Proc. London Math. Soc. (3) **79**(1999), no.1, 131-157

[3] Tsunenobu Asai, Hiroki Sasaki, *The mod 2 cohomology algebras of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* Comm. Algebra **21** (1993), no.8, 2771-2790

[4] Edwin Weiss, *Cohomology of Groups.* Academic Press (1969)

[5] C.B.Thomas, *Characteristic classes and the cohomology of finite groups.* Cambrige University Press. (1986)