数理解析研究所講究録 1467 巻 2006 年 62-70

CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS FOR REDUCIBLE DEGENERATE PRINCIPAL SERIES

慶應義塾大学・理工学部　宮崎琢也 (TAKUYA MIYAZAKI)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY

INTRODUCTION

複素あるいは実半単純群 G の許容表現 (π, H_π) のさまざまな (退化)Whittaker 模型の研究は重要である．G が quasi split の場合，極大べき単部分群 N に関する Whittaker 模型はいわゆる N に関する Jacquet 積分や Jacquet 函手の解析的，代数的研究を通じて多くの重要な性質が定式化され示されている．特に代数的な観点から見出される許容表現の associated variety と Whittaker 模型の存在性の関係 (Kostant, Vogan) は，ひとつの研究指針を与えるものと理解されているであろう．

実半単純群 G の許容表現 π を考える場合，複素の場合と比較すれば，対応する associated varieties などをふくめたそれらの表現論はより複雑になるのではあるが，それでもそれに応じた定式化を行うことでこのような方針を強く意識し続けていってもよいと思われる (Matumoto および Yamashita 等の研究)．

本稿では G が real の場合，特に π が generic でない場合に重要である一般化された Gelfand-Graev 模型 (Yamashita) の存在性について，π に付随する Lie(G) の巾零随伴軌道との関係を軸にして観察される一つの結果を述べることにする:

$G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ とその Siegel 極大放物型部分群 $P = MN$ を考える．G に関する導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の内で，abelian な巾零根基をもつ $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の θ-stable 放物型部分代数 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i$ $(0 \le i \le n)$ のユニタリ指標から誘導されたものを考える．非退化 n 次実対称行列 h から自然に定義される N のユニタリ指標 $\psi = \psi_h$ をとり，これに関する $\pi = A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda)$ の一般化された Gelfand-Graev 実現 (特にここでは Siegel-Whittaker 実現とよぶことにする) の空間

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}\big(H_\pi, \mathrm{Ind}_{M_\psi N}^G(\chi\psi)\big)$$

を考える ([Y])．このとき例えば次が成立する．

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Theorem. 次数 $n=2l$ を *even* とする．このとき *Siegel* 型導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda)$ の非退化な h に関する急減少 *Siegel-Whittaker* 実現は，h の符号数が $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda)$ の指標超函数に付随する余随伴巾零軌道 *(wave front set)* に整合する場合にのみ存在する．そのとき χ は自明なものにかぎり，またこの急減少実現の重複度は 1 である．

この結果を得るのに，まず上の Siegel 型導来函手加群が $\mathrm{Sp}(2l,\mathbb{R})$ の Siegel 退化主系列に部分表現として埋め込まれることを利用する．そのとき急減少 Siegel-Whittaker 実現は退化主系列表現の K-有限 vectors $f(g)$ に対する一般化された Jacquet 積分

$$J^{\psi}(f)(g)=\int_N \psi_h(n)^{-1}f(wng)dn, \qquad w=\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}$$

を通して理解される．主系列表現の族 $\{I(\nu)\mid \nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*\}$ に関するこのような一般化された Jacquet 積分の解析的性質は Yamashita ならびに Wallach によって研究され，パラメータ $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に関する正則解析接続や緩増大退化 Whittaker 模型との関係，その重複度などに対しての結果が得られている．本稿では特に一つの可約な退化主系列に対する ψ_h-Jacquet 積分を考え，それをいろいろな部分表現に制限した時に h に依存する性質を問題にする．そして実際，この一般化された Jacquet 積分は，保型形式，特に実解析的 Siegel-Eisenstein 級数，の Fourier 展開の研究において Siegel, Maass が用いた合流型超幾何函数にほかならないのであり，それに対する Shimura による詳しい解析[S82], [S00] を通じることによって上の問に対する答えを読み出すことができるということになる．この意味では本稿で述べることは表現の wave front set と緩増大退化 Whittaker 模型の存在性の上の定理のような (予想的) 関係についての内在的理解を与えるわけではなく実際，種々の情報のつきあわせである．しかしこれまで高階数群の non-tempered 表現の無限族に対する wave front set と退化 Whittaker 模型の存在性の対応関係の明示的な例を見なかったので，ここに述べることとした．また，例えば non-tempered な保型表現の研究においては，非正則 vector 値の合流型超幾何函数そのものに対する詳細な理解が大切であると思われる．

記号: 正方行列 g の行列式を $\delta(g)$，またトレースを $\sigma(g)$ とかく．実数 x に対して $\mathbf{e}(x)=\exp(2\pi ix)$ とおく．自然数 $n\geq 1$ に対して $\kappa=\kappa_n=\frac{n+1}{2}$ とかく．

I. Confluent hypergeometric functions

この節は G. Shimura [S82] を参照．実 n 次対称行列全体を S とかき，そのうち正定値なもの全体のなす錐を S_+ と記す．S には普通の加法測度を考える．実 n 次対称

行列 $h \in S$ をひとつとるとき変数 $(y,\alpha,\beta) \in S_+ \times \mathbb{C}^2$ に関する合流型超幾何函数を

$$\xi(y,h;\alpha,\beta) = \int_S \mathbf{e}^{-\sigma(hu)} \delta(u+iy)^{-\alpha} \delta(u-iy)^{-\beta} du$$

で定義する．この積分が絶対収束するのは $\mathrm{Re}(\alpha+\beta) > 2\kappa - 1$ の時で，したがってこの函数はこの開領域上の解析関数をあたえる．この函数は Siegel, Maass が $\mathrm{Sp}(n)$ 上の実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 展開をしらべるときに現れた．特に $n=1$ のとき, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha+\beta) > 1$ において

$$\begin{aligned}
\xi(y,h,\alpha,\beta) &= i^{\beta-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i h u} (y-iu)^{-\alpha} (y+iu)^{-\beta} du \\
&= i^{\beta-\alpha} \Gamma(\alpha)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i h u} (y+iu)^{-\beta} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-(y-iu)t} dt\, du \\
&= i^{\beta-\alpha} \Gamma(\alpha)^{-1} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-yt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-2\pi h)u} (y+iu)^{-\beta} du\, dt \\
&= \begin{cases} i^{\beta-\alpha} (2\pi)^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha)^{-1} \Gamma(\beta)^{-1} h^{\alpha+\beta-1} e^{-2\pi h y} \sigma(4\pi h y, \alpha, \beta) & \text{for} \quad h > 0, \\ i^{\beta-\alpha} (2\pi)^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha)^{-1} \Gamma(\beta)^{-1} |h|^{\alpha+\beta-1} e^{-2\pi |h| y} \sigma(4\pi |h| y, \beta, \alpha) & \text{for} \quad h < 0, \\ i^{\beta-\alpha} (2\pi)^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha)^{-1} \Gamma(\beta)^{-1} \Gamma(\alpha+\beta-1) (4\pi y)^{1-\alpha-\beta} & \text{for} \quad h = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

とかけることがわかる ([S75])．ここで

$$\begin{aligned}
\sigma(y,\alpha,\beta) &= \int_0^{\infty} (u+1)^{\alpha-1} u^{\beta-1} e^{-yu} du \\
&= y^{-\beta} \int_0^{\infty} (1+y^{-1}t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} e^{-t} dt, \qquad y > 0,\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

は $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ において絶対収束する．Siegel は[Si] の中で，ガンマ函数の Hankel 積分表示を考えるのと同様に，この σ に対する $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ で正則な contour 積分表示

$$-2i \sin(\pi\beta) \sigma(y,\alpha,\beta) = y^{-\beta} \int_{\infty}^{(0+)} (1+y^{-1}t)^{\alpha-1} (-t)^{\beta-1} e^{-t} dt$$

を考えることで

$$\begin{aligned}
\omega(y,\alpha,\beta) &:= y^{\beta} \Gamma(\beta)^{-1} \sigma(y,\alpha,\beta) \\
&= -\frac{\Gamma(1-\beta)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} (1+y^{-1}t)^{\alpha-1} (-t)^{\beta-1} e^{-t} dt
\end{aligned}$$

が α, β に関して entire であり，かつさらに加えて函数等式

$$\omega(y,\alpha,\beta) = \omega(y, 1-\beta, 1-\alpha)$$

が成立することを述べている.

このような合流型超幾何函数に関する解析接続, 函数等式は, Kaufhold [K] によって特に次数 $n = 2$ の時に一般化され, そして主にそこで考察 (低次数への帰着) の一般化と $S_{\mathbb{C}}$ 上の微分作用素を適用することにより, Shimura によって任意の次数 n に対して一般に定式化された; [S82], Theorem 4.2. ここでは今回もちいることだけ次に述べることとし, 詳しい事実, 特に函数等式, は上を参照.

Theorem. (Shimura) 実対称行列 $h \in S$ の正, 負の固有値の個数をそれぞれ p, q, および 0 固有値の個数を r とする; つまり $p + q + r = n$. このとき

$$\Gamma_r(\alpha + \beta - \kappa)^{-1}\Gamma_{n-q}(\alpha)\Gamma_{n-p}(\beta)\xi(y, h; \alpha, \beta)$$

は変数 (α, β) に関して $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上正則である. ここで

$$\Gamma_m(s) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(s - \frac{i}{2}\right)$$

である.

Remark. [S82] では合流型超幾何函数は一般の柱状領域上で定義があたえられ, それら全てに上の定理が定式化されている. また[S99] に他の場合が研究されている.
Question: この Theorem は一変数の時のように整函数であることがわかる積分表示を与えて証明できないのか.

II. Degenerate principal series of $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$

この節は S. T. Lee [L] を参照. この節では $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ とし, P を G の Siegel 極大放物型部分群とする. $g \in G$ の Iwasawa 分解を $g = n \cdot m(a)k$, $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, とかくことにする. またこのとき $|a(g)| = |\delta(a)|$ と書く. これは well-defined である.

複素パラメータ $s \in \mathbb{C}$ に対して G の P に関する退化主系列表現を, 空間

$$I(s - \kappa) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid \text{ smooth, } f(pg) = |a(p)|^s f(g)\}$$

への右 G-移動として定義する. この表現は G の極大コンパクト部分群 $K \simeq U(n)$ 上のある函数たちの空間にも実現をもつ. このとき Frobenius 相互律より

Lemma. *$I(s - \kappa)$ の K-types は全て重複度 1 以下である.*

ことがわかる.

Siegel 退化主系列表現 $I(s-\kappa)$(の指標超函数) に付随する wave front set は $\mathfrak{n}^*$ ($\mathfrak{n}$ は P のべき単根基の実 Lie 環) から張られる $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})^*$ 内のべき零余随伴軌道になる．これは $n+1$ 個の既約成分をもつ．$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ のべき零軌道の分類と閉包隣接関係はよく知られている．いま $I(s-\kappa)$ の wave front set の $n+1$ 個の開部分余随伴軌道を signed Young tableaux(符号付き Jordan block) をもちいてパラメトライズすれば，$Jord(2^{i,+}2^{n-i,-})$, $0 \le i \le n$, のように与えることができる．

さて $I(s-\kappa)$ は generic な $s \in \mathbb{C}$ に関しては既約であることが知られている．また可約な表現を与える $s \in \mathbb{C}$ や，そのときの組成因子の様子がわかることは重要である．実際，実半単純群のいろいろな可約退化主系列表現に関するこの種の問題は，近年さまざまな観点から良く研究されているもののようである．今回はその中から Lee [L] の結果を用いることにする．

[L] の緒定理の正確な定式化はここではあげないが，それによれば，$I(s)$ に関して例えばつぎのことが詳しくわかっている:

(i) $I(s-\kappa)$ が可約になる $s \in \mathbb{C}$ の決定；

(ii) (i) の場合の $I(s-\kappa)$ の socle filtration の K-types を用いた記述による決定;

(iii) (ii) で与えられた組成因子のユニタリ化可能性の決定.

ここで (ii), (iii) の情報 (つまり minimal K-type が特定できるユニタリ化可能な既約組成因子) と $I(s-\kappa)$ の無限小指標をあわせることによって Siegel 退化主系列表現 $I(s-\kappa)$ の組成因子として現れる導来函手加群が特定できることに注意しておく:

複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の θ-stable Siegel 放物型部分 Lie 環を $\mathfrak{q}_i$ $(0 \le i \le n)$ とかく．ここで $\mathfrak{q}_i$ の Levi 部分環 $\mathfrak{l}_i$ は $\mathfrak{u}(i,n-i)$ の複素化．標準的な正条件をみたす $\lambda \in \sqrt{-1}\cdot\mathfrak{u}(i,n-i)^*$ に対して $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda)$ を $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ のコホモロジー誘導加群とする．$K_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約有限次元有理表現の highest weight を整数の減少列 $(r_1,\ldots,r_n)$, $r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_n$, であらわすことにする．このとき例えば

Proposition. (Lee, [L] Theorem 5.2.$+\alpha$) 次数 n は *even* とする; $n=2l$. このとき整数 $k \ge l$ に対して，退化主系列表現 $I(k-\kappa)$ はその組成因子に *Siegel* 型導来函手加群

$$A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda_{k,i}); \qquad i \equiv k \pmod 2 \text{ かつ } 0 \le i \le n,$$

ただし $\lambda_{k,i} \in \sqrt{-1}\cdot\mathfrak{u}(i,n-i)^*$ は $I(k-\kappa)$ の無限小指標にあうように k, i に対して適切に指定されるもの，に同型な既約部分加群をそれぞれちょうど一つづつもつ.

ことがわかる.

Remarks. (i) 上の導来函手加群 $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda_{k,i})$ の minimal K-type の最高ウエイトは $(\underbrace{k-n+i,\ldots,k-n+i}_{i},\underbrace{i-k,\ldots,i-k}_{n-i})$ である．例えば $n=2$ のとき，

k: even ならば，$I(k-\frac{3}{2})$ は (k,k), $(-k,-k)$ を 1 次元極小 K-type にもつ正則 (反正則) 離散系列表現 (の極限) を部分加群にもち，

k: odd ならば，$I(k-\frac{3}{2})$ は $(k-1,1-k)$ を極小 K-type とする non-tempered な導来函手加群を部分加群にもつ．

ここでわかるように，ここであげた中には例えば"odd weight" の正則離散系列表現などが現れていないが，それは $n\cdot m(a)\in P\mapsto \mathrm{sgn}(\delta(a))|\delta(a)|^s$ から誘導した退化主系列表現を考えるときそのユニタリ組成因子として現れることがわかる ([L]+α)．このようにしてあつめられた，例えば $(3,3)$, $(2,-2)$, $(-3,-3)$ をそれぞれ極小 K-type にもつ，3 つの Siegel 型導来函手加群は non-tempered local Arthur packet をなす (正則，反正則離散系列は一組として考えた方がよい)．同様に一般に n: even のとき，θ-放物型部分環 $\mathfrak{q}_i$ に関する Siegel 型導来函手加群はその Siegel 退化主系列表現へのうめこみの様子にしたがって，"parity によって" ふたつの組にわけて考えられる．

(ii) $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda)$ の指標超函数に付随する実べき零余随伴軌道 (wave front set) は既約であって，$Jord(2^{i,+},2^{n-i,-})$ の閉包である．

(iii) ここでは n: even のときしか考えなかったが，奇次数のときも退化主系列表現 $I(s-\kappa)$ の様子は[L] で述べられている．

III. Differential operators and proof of Main Theorem

この節では $n=2l$ を even とし，我々の Main Theorem の証明について述べる．さらに $k\geq n$ とし，この場合に $I(k-\kappa)$ に現れる導来函手加群を考察することにする．無限小指標が退化した場合も，個々の step で状況に応じて命題の定式化が少し異なってくるが基本的な考察としては以下の手順に準じるものでよい．

$0\leq i\leq n$ に対して highest weight $(\underbrace{k-i,\ldots,k-i}_{n})$，および $(\underbrace{i-k,\ldots,i-k}_{n})$ をもつ $K_{\mathbb{C}}$ の 1 次元表現をそれぞれ τ_i^+, τ_i^- とかく．また以下では $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_n=\{{}^tz=z=x+iy\in M_n(\mathbb{C})\mid y:\ 正定値\}$ への作用を考え，上半空間の座標を用いた表示を適宜行う．いま $i\equiv k \pmod 2$ かつ $0\leq i\leq n$ をみたす整数 i に対して以下のふたつの合流型超幾何函数を考える:

$$\delta(y)^{s/2}\xi\left(y,h;\frac{s-k+i}{2},\frac{s+k-i}{2}\right); \tag{1}$$

これは退化主系列表現 $I(s-\kappa)$ の K-type τ_i^- に属する合流型超幾何函数である；

$$\delta(y)^{s/2}\xi\left(y,h;\frac{s+k-i}{2},\frac{s-k+i}{2}\right); \tag{2}$$

これは K-type τ_i^+ をもつ $I(s-\kappa)$ に関する合流型超幾何函数である.

Proposition. h を非退化とし，その符号数を (p,q), $p+q=n$, とする. $s=k$ と特殊化するとき，(1) の合流型超幾何函数について

$$\delta(y)^{k/2}\xi\left(y,h;\frac{i}{2},\frac{2k-i}{2}\right)\neq 0 \iff n-i\leq q\leq n,\ 0\leq p\leq i$$

また (2) の合流型超幾何函数について

$$\delta(y)^{k/2}\xi\left(y,h;\frac{2k-i}{2},\frac{i}{2}\right)\neq 0 \iff n-i\leq p\leq n,\ 0\leq q\leq i$$

が成立する.

Proof. これは第 I 節の Theorem において与えられたガンマ函数の項

$$\Gamma_{n-q}\left(\frac{i}{2}\right)^{-1}\Gamma_{n-p}\left(\frac{2k-i}{2}\right)^{-1} \text{ および } \Gamma_{n-q}\left(\frac{2k-i}{2}\right)^{-1}\Gamma_{n-p}\left(\frac{i}{2}\right)^{-1}$$

を調べればよい. いま $k\geq n$ と仮定したから $2k-i\geq 2n-n=n$ であるので $\Gamma_{n-p \text{ or } q}\left(\frac{2k-i}{2}\right)^{-1}$ の方から 0 がでることはない. よって消えない条件はそれぞれ, $n-q\leq i$ および $n-p\leq i$ で与えられる. □

Remark. さらに highest weight $(\underbrace{2k-n,\ldots,2k-n}_{i},\underbrace{0\ldots,0}_{n-i})$ をもつ $K_{\mathbb{C}}$ の表現を σ_i, および highest weight $(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-i},\underbrace{n-2k,\ldots,n-2k}_{i})$ をもつ既約表現を $\check{\sigma}_i$ とかくことにする. $\tau_i^\pm$ 達は 1 次元表現であるからテンソル積

$$\tau_i^-\otimes\sigma_i \quad \text{および} \quad \tau_{n-i}^+\otimes\check{\sigma}_{n-i}$$

は既約であり，それぞれ highest weight $(\underbrace{k-n+i,\ldots,k-n+i}_{i},\underbrace{i-k,\ldots,i-k}_{n-i})$ をもつ $K_{\mathbb{C}}$ の同値な既約表現である. さらに，いま τ_i^-, σ_i および τ_{n-i}^+, $\check{\sigma}_{n-i}$ をそれぞれ $I(s-\kappa)$ の K-type として実現するとき，II 節の重複度 1 の Lemma を適用すれば，これらふたつの既約なテンソル積同じく $I(s-\kappa)$ の K-type として実現するとき全く同一の空間への作用を与えていることに注意する.

Proof of Main Theorem: the case $k \geq n = 2l$. いま述べた Remark のもとで τ_i^-, σ_i, τ_{n-i}^+, $\check{\sigma}_{n-i}$, そしてそれぞれのテンソル積すべて $I(s-\kappa)$ の K-type として実現されているとする．Shimura により [S00], Chapter III, 12-13 節で研究されている $\mathfrak{H}_n$ 上の differential operators

$$(D_{\tau_i^-}^{\sigma_i} f^-)(\zeta), \quad (E^{\check{\sigma}_{n-i}} f^+)(\check{\zeta}),$$

$f^- \in \tau_i^-$, $f^+ \in \tau_{n-i}^+$, $\zeta \in \sigma_i$, $\check{\zeta} \in \check{\sigma}_{n-i}$ を考える; [S00], p.94, (12.23). ここで[S00], Lemma 13.9 にあるように f^-, f^+ をそれぞれとり，$z = x + iy \in \mathfrak{H}_n$ に関して広義一様絶対収束する合流型超幾何函数の変数 z に関する微分と定義積分の順序を交換する．そのとき[S00], Lemma 13.9 で与えられた微分公式と上で述べた $\tau_i^- \otimes \sigma_i$ と $\tau_{n-i}^+ \otimes \check{\sigma}_{n-i}^+$ の主系列における実現が同一であるという注意から，適当な $\zeta \in \sigma_i$ および $\check{\zeta} \in \check{\sigma}_{n-i}$ の対をとることによって，

$$D_{\tau_i^-}^{Z}\left(\mathrm{e}^{\sigma(hx)}\xi\left(y, h; \frac{s-k+i}{2}, \frac{s+k-i}{2}\right)\right)(\zeta)$$

と

$$E^{Z}\left(\mathrm{e}^{\sigma(hx)}\xi\left(y, h; \frac{s+k-i}{2}, \frac{s-k+i}{2}\right)\right)(\check{\zeta})$$

とは $s \in \mathbb{C}$ に関する有理函数 $c(s)$ 倍を除いて一致することがわかる．そしてこれらは $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda_{k,i})$ の極小 K-type における合流型超幾何函数を与える．ここで $s = k$ とするとき $c(k) \neq 0$ が確かめられるので，上の Proposition と II 節の Remarks (i) と (ii) を適用して定理の主張が得られる．

The case $k = l$. 無限小指標が regular でない場合も得に $k = l = n/2$ のときは上の Proposition の段階で直接，定理の主張が得られることを注意する．このとき $A_{\mathfrak{q}_i}(\lambda_{l,i})$ の minimal K-type はどれも 1 次元

$$(k-n+i, \ldots, k-n+i, i-k \ldots, i-k) = (i-l, \ldots, i-l)$$

である．

IV. Concluding remarks

(i) これまで h は非退化としていたが，I 節の Theorem にあるように 0-固有値があっても同様の議論により合流型超幾何函数の h の符号数 (p, q, r) に関する vanishing, non-vanishing を議論することができる．これは実解析的 Siegel-Eisenstein 級数の Fourier

展開の計算には必要なことである．実際この目的のもとで，無限小指標が regular でないある n 次退化主系列表現達に対して，退化した場合もふくめた $h \in S_n$ に関する退化 Whittaker 実現についての (非) 自明性の決定が行われている (Y. Hasegawa).
(ii) Lee [L] にある退化主系列の組成因子のリストは Shimura [S00] の微分作用素の作用の記述に現れる多項式 $\psi_Z(s)$ を $\sigma_Z \in \widehat{K_{\mathbb{C}}}$, $s \in \mathbb{C}$ を動かしかつ特殊化して調べても再現できるところがある．これは実際，[L] は微分の作用をみて分解をみたわけなので，当然ではあるが注意しておく．

References

[K] G. Kaufhold, *Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades*, Math. Ann. **137** (1959), 454-476.

[M] H. Maass, *Siegel's modular forms and Dirichlet series*, Lecture Notes in Mathematics **216** (1971), Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

[Mt] H. Matumoto, *$C^{-\infty}$-Whittaker vectors corresponding to a principal nilpotent orbit of a real reductive linear Lie group, and wave front sets*, Compositio Math. **82** (1992), 189-244.

[L] S. T. Lee, *Degenerate principal series representations of* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$, Compositio Math. **103** (1996), 123-151.

[S75] G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. of the London Math. Soc. **31** (1975), 79-98.

[S82] G. Shimura, *Confluent hypergeometric functions on tube domains*, Math. Ann. **260** (1982), 269-302.

[S99] G. Shimura, *Generalized Bessel functions on symmetric spaces*, Jour. für die reine und angewandte Math. **509** (1999), 35-66.

[S00] G. Shimura, *Arithmeticity in the Theory of Automorphic Forms*, Mathematical Surveys and Monographs **82** (2000), American Mathematical Society.

[Si] C. L. Siegel, *Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen*, Math. Z. **63** (1956), 363-373.

[Y] H. Yamashita, *On Whittaker vectors for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 263-298.

[Y2] H. Yamashita, *Finite multiplicity theorems for induced representations of semisimple Lie groups. II. Applications to generalized Gelfand-Graev representations*, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 383-444.

[W] N. R. Wallach, *Lie algebra cohomology and holomorphic continuation of generalized Jacquet integrals*, Advanced Studies in Pure Mathematics **14** (1988), Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, 123-151.