数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 218-223

非線形差分微分方程式における準周期解の存在定理とガレルキン近似解法

山梨大学大学院医学工学総合教育部 篠原康彰 (Yasuaki Shinohara),
鈴木智博 (Tomohiro Suzuki)
Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering,
University of Yamanashi

概 要

本稿では，差分微分方程式の準周期解について研究を行い，三角関数を基底関数とするガレルキン法を用いて近似解を得た．さらに，近似解に関する条件に基づき，準周期解の存在性を証明し誤差評価を行った．また，C 言語による数値実験結果を報告する．

1 はじめに

多くの研究者が，非線形常微分方程式の準周期解について研究している [1][2][3]．彼等は，準周期解の占部型存在定理を証明し，それに基づき近似解を求め誤差評価を行った．我々は，差分項を持つ非線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = X[t, x(t), x(t+\tau)] \tag{1}$$

について，線形常微分方程式における準周期解の存在定理を拡張し，方程式 (1) の準周期解の存在性を証明し，その誤差評価を示す．ここで，連続な多変数関数 $f_0(u_1, \ldots, u_m)$ が各変数 $u_1, \ldots, u_m$ について各々周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の多重周期関数であるとき，$f(t) = f_0(t, \ldots, t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ のように表せるならば，$f(t)$ は周期 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ を持つ準周期関数であると言う．

2 線形非同次微分方程式の準周期的一意解の積分表示

準周期関数 $A(t), f(t)$ に対して，線形非同次微分方程式

$$\frac{dx}{dt} - A(t)x = f(t) \tag{2}$$

の準周期解の存在定理に必要とされる性質について紹介する．もし以下の条件 I，II，III を満たす射影行列 P，正の定数 σ_1，σ_2 と非負関数 $C_1(t,s)$，$C_2(t,s)$ が存在するならば，方程式 (2) の同次方程式 $dx/dt - A(t)x = 0$ は一般化された指数的ディコトミーを満たすと呼ぶ ([1],[2])．

I. $|H(t)PH^{-1}(s)| \le C_1(t,s)e^{-\sigma_1(t-s)} \qquad (-\infty < s \le t < +\infty)$,

II. $|H(t)(E-P)H^{-1}(s)| \le C_2(t,s)e^{-\sigma_2(s-t)} \qquad (-\infty < t < s < +\infty),$

III. $\int_{-\infty}^{t} C_1(t,s)e^{-\sigma_1(t-s)}ds + \int_t^{+\infty} C_2(t,s)e^{-\sigma_2(s-t)}ds \le M \qquad (-\infty < t < +\infty).$

ここで，ノルム $|\cdot|$ をユークリッド空間内でのあるノルムとする．$H(t)$ は初期条件 $H(0)=E$ を満たす微分方程式 (2) の線形同次方程式の基本行列で，E は単位行列とする．以下の定理が線形非同次微分方程式の準周期的一意解の存在と積分表示の定理である．

定理 1 $A(t)$ を周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ を持つ準周期的な行列とする．線形同次方程式 $dx/dt - A(t)x = 0$ が一般化された指数的ディコトミーを満たすとする．そのとき任意の周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ を持つ準周期関数 $f(t)$ について，式 (2) は同じ周期 $\omega_1,\ldots,\omega_m$ を持つ唯一の準周期解 $x(t)$ を持ち，その解は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds \tag{3}$$

によって与えられる．ただし，

$$G(t,s) = \begin{cases} H(t)PH^{-1}(s) & for \quad t \le s \\ -H(t)(E-P)H^{-1}(s) & for \quad t > s \end{cases} \tag{4}$$

で $H(t)$ は初期条件 $H(0)=E$ を満たす線形同次方程式の基本行列とする．ここで，E は単位行列，P は一般化された指数的ディコトミーを満たす射影行列とする．さらに，解 $x(t)$ は関係式

$$\|x\| \le M\|f\|. \tag{5}$$

を満たす．ただし，M は一般化された指数的ディコトミーの定義の中で現れる正の定数である．ここで，$\|x\| = sup\{|x(t)| : -\infty < t < +\infty\}$ とする．

3 非線形差分微分方程式の準周期解の存在定理

この章では，本稿における最も重要な定理を紹介する．この定理は，非線形差分微分方程式 (1) における準周期解の存在性と一意性さらに誤差評価を行うための定理である．

定理 2 D をノルムを持つ $|\cdot|$ ユークリッド空間内の有界領域とする．(1) 式で与えられた関数 $X(t,x,y)$ が実数軸 R 上の t について周期 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ を持つ準周期的な関数であり，領域 $D\times D$ 上の (x,y) について連続微分可能であると仮定する．非線形差分微分方程式 (1) は R 上で周期 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ を持つ準周期的な近似解 $x=\overline{x}(t)$ を持ち，$\overline{x}(t)$ は連続微分可能であり，

$$\left|\frac{d\overline{x}(t)}{dt} - X[t,\overline{x}(t),\overline{y}(t)]\right| \le r \tag{6}$$

を満たすと仮定する．$d\overline{x}(t)/dt$ についても実数軸 R 上で周期 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ を持つ準周期的な関数であると仮定する．さらに，以下の条件 $(a), (b), (c), (d)$ を満たす正の定数 δ，負でない定数 $\kappa < 1$，$\mu < 1$ と周期 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ を持つ準周期的な行列 $A(t)$ が存在すると仮定する．

(a) 線形同次方程式 (2) は一般化された指数的ディコトミーを満たす，

(b) $D_\delta = \{x : |x(t) - \overline{x}(t)| \le \delta \; for \; \exists t \in R\} \subset D$,

(c) 関係式 $\|\Phi(t,x,y) - A(t)\| \le \frac{\kappa}{M}$ と $\|\Psi(t,x,y)\| \le \mu$ が実数軸上の任意の点 t と $D_\delta \times D_\delta$ 上の (x,y) で成り立つ，

(d) 関係式 $\kappa + M\mu < 1$ と $\frac{Mr}{(1-\kappa-M\mu)} \le \delta$ が成り立つ．

ここで，$\Phi(t,x,y)$，$\Psi(t,x,y)$ は関数 $X(t,x,y)$ の x と y それぞれに関するヤコビ行列であり，M は一般化された指数的ディコトミーの定義に現れる正の定数．

このとき，与えられた系 (1) は実数軸 R 上のすべての t において D_δ 内に含まれ，周期 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ を持つ準周期的な解 $x = x(t)$ を唯一持つ．さらに，実数軸 R 上すべての t において以下の関係式 (7) を満たす．

$$|x(t) - \overline{x}(t)| \le \frac{Mr}{(1-\kappa-M\mu)} \tag{7}$$

4 m次のガレルキン近似解法

ここで，2階の差分微分方程式における m 次のガレルキン近似解法について説明する．

$$x''(t) = Z[t, x(t), x'(t), x(t+\tau), x'(t+\tau)] \tag{8}$$

上記の方程式を連立方程式に変形して，以下の形式で考える．

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= x'(t) \\ dx'(t)/dt &= Z[t, x(t), x'(t), x(t+\tau), x'(t+\tau)]. \end{aligned} \tag{9}$$

一般的に2つの周期 ω_1, ω_2 を持つ準周期関数 $f(t)$ の定義に対応して，2変数 u_1, u_2 について周期 ω_1, ω_2 をそれぞれ持つ多重周期関数 $f(u) = f(u_1, u_2)$ を導入する．このとき，2つの周期を持つ方程式 (9) を以下のように置く．

$$\begin{aligned} Dx(u) &= x'(u) \\ Dx'(u) &= Z[u, x(u), x'(u), x(u+\tau), x'(u+\tau)]. \end{aligned} \tag{10}$$

ただし，$u = (u_1, u_2)$，$u + \tau = (u_1 + \tau, u_2 + \tau)$，$D = \partial/\partial u_1 + \partial/\partial u_2$ とする．$Z[u, x, x', y, y']$ は変数 $u = (u_1, u_2)$ について，周期 ω_1, ω_2 を持つ多重周期関数である．

この方程式(10)における近似解 $x_m(u)=x_m(u_1,u_2)$ とその導関数 $x'_m(u)=\partial x_m(u)/\partial u_1 + \partial x_m(u)/\partial u_2$ を未定係数を含む三角関数を用いて以下のように置く.

$$x_m(u) = a_0+\sum_{i=1}^{l}\{a_{2i-1}\sin(p(i),\nu,u)+a_{2i}\cos(p(i),\nu,u)\} \quad (11)$$

$$x'_m(u) = a'_0+\sum_{i=1}^{l}\{a'_{2i-1}\sin(p(i),\nu,u)+a'_{2i}\cos(p(i),\nu,u)\} \quad (12)$$

ただし, $l=m(m+1)$, $(p(i),\nu,u)=p_1(i)\nu_1u_1+p_2(i)\nu_2u_2$, $\nu_1=2\pi/\omega_1,\nu_2=2\pi/\omega_2$, $p(i)=\{(p_1(i),p_2(i)):i=1,2,\cdots\}$. 具体的に $p(i)$ のとる値は, $p(1)=(1,0)$, $p(2)=(0,1)$, $p(3)=(2,0)$, $p(4)=(1,1)$, $p(5)=(0,2)$, $p(6)=(-1,1),\cdots$ である. また $a'_0=0$, $a'_{2i-1}=-(p_1(i)\nu_1+p_2(i)\nu_2)a_{2i}$, $a'_{2i}=(p_1(i)\nu_1+p_2(i)\nu_2)a_{2i-1}$ である. ここで a_0, a_{2i}, a_{2i-1} を α を用いて

$$\alpha=(a_0,a_{2i-1},a_{2i};i=1,2,\cdots,l)$$

と表す. このベクトル α を未定係数法により求める方法をガレルキン法と呼ぶ. 次に, 決定方程式を求める. (11) 式を (10) 式に代入して右辺を Fourier 展開し m 項で打ち切った式と (12) 式を未定係数である a'_0, a'_{2i-1}, a'_{2i} について比較しそれぞれについて決定方程式を作成する.

$$\begin{aligned}
F_0(\alpha) &= (1/\omega)\int_0^{\omega} Z_m(u)du=0,\\
F_{2i-1}(\alpha) &= 2(1/\omega)\int_0^{\omega} Z_m(u)\sin(p(i),\nu,u)du+(p_1(i)\nu_1+p_2(i)\nu_2)^2a_{2i-1}=0,\\
F_{2i}(\alpha) &= 2(1/\omega)\int_0^{\omega} Z_m(u)\cos(p(i),\nu,u)du+(p_1(i)\nu_1+p_2(i)\nu_2)^2a_{2i}=0\\
&\qquad\qquad (i=1,2,\cdots,l)
\end{aligned}$$

$F_0(\alpha)$ は a'_0, $F_{2i-1}(\alpha)$ は a'_{2i-1}, $F_{2i}(\alpha)$ は a'_{2i} に対応した決定方程式になる. ただし, $(1/\omega)\int_0^{\omega}du=(1/\omega_1\omega_2)\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2}du_1du_2$, $Z_m(u)=Z[u,x_m(u),x'_m(u),x_m(u+\tau),x'_m(u+\tau)]$ である. この決定方程式の積分表示部分を N 個の標本点を持つ台形公式を用いて近似的に書き直すと以下の形式になる.

$$\begin{aligned}
F_0(\alpha) &= (1/4N^2)\sum_{k,n=1}^{2N} Z_m^{kn}=0,\\
F_{2i-1}(\alpha) &= (1/2N^2)\sum_{k,n=1}^{2N} Z_m^{kn}\sin(p(i),\nu,u^{kn})+(p_1(i)\nu_1+p_2(i)\nu_2)^2a_{2i-1}=0,\\
F_{2i}(\alpha) &= (1/2N^2)\sum_{k,n=1}^{2N} Z_m^{kn}\cos(p(i),\nu,u^{kn})+(p_1(i)\nu_1+p_2(i)\nu_2)^2a_{2i}=0.
\end{aligned}$$

ただし, $N=m(m+1)+1$, $u^{kn}=(u_1^k,u_2^n)$, $u_1^k=(2k-1)\omega_1/4N$, $u_2^n=(2n-1)\omega_2/4N$, $Z_m^{kn}=Z[u^{kn},x(u^{kn}),x'(u^{kn}),x(u^{kn}+\tau),x'(u^{kn}+\tau)]$ $(k,n=1,2,\cdots,2N)$ である. このとき決定方程式をベクトル表記を用いて

$$F(\alpha)=(F_0(\alpha),F_{2i-1}(\alpha),F_{2i}(\alpha);i=1,2,\cdots,l) \quad (13)$$

と記述する．次に，決定方程式 $F(\alpha)$ のヤコビ行列 $J(\alpha)$ を求める．求め方は $F_0(\alpha)$ を未定係数である $a_0, a_{2j}, a_{2j-1}(j=1,2,\cdots,l)$ でそれぞれ偏微分しヤコビ行列 $J_{0,0}(\alpha)$, $J_{0,2j}(\alpha)$, $J_{0,2j-1}(\alpha)$ を求める．同様にして $F_{2i}(\alpha), F_{2i-1}(\alpha)$ についても a_0, a_{2j}, a_{2j-1} でそれぞれ偏微分しヤコビ行列 $J_{2i,0}(\alpha)$, $J_{2i,2j}(\alpha)$, $J_{2i,2j-1}(\alpha)$, $J_{2i-1,0}(\alpha)$, $J_{2i-1,2j}(\alpha)$, $J_{2i-1,2j-1}(\alpha)$ を求める．ただし，$i,j=1,2,\cdots,l$. 求めた行列をまとめてヤコビ行列 $J(\alpha)$ とする．最後に，α を求めるために以下のような Newton-Raphson 法を用いて α を計算する

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - J^{-1}(\alpha_0)F(\alpha_n) \quad (n=0,1,\cdots). \tag{14}$$

ただし，α_0 は α_n の初期値として与える．Newton-Raphson 法によって求められた α を (11) 式に代入して近似解を求める．

5 数値実験

ここでは実際に定理を当てはめ，非線形差分微分方程式について m 次のガレルキン近似解法を用いて数値実験を行った．用いた方程式は，Van der Pol の方程式に差分項を持たせた以下の非線形差分微分方程式である

$$x''(t) - 2\lambda(1-x(t)^2)x'(t) + x(t) = \varepsilon x(t+\tau)^3 + g\cos\nu_1 t + h\cos\nu_2 t. \tag{15}$$

この方程式をベクトル形式に書き換えると，

$$dz(t)/dt = Az(t) + \eta(z) + \phi(t). \tag{16}$$

ただし，

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix}, \ \eta(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\lambda x(t)^2 x'(t) + \varepsilon y(t)^3 \end{pmatrix},$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ g\cos\nu_1 t + h\cos\nu_2 t \end{pmatrix}.$$

ここで，$y(t) = x(t+\tau)$ とする．また，(16) 式の x に関するヤコビ行列 Φ，y に関するヤコビ行列 Ψ は以下の通りになる．

$$\Phi(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-4\lambda x(t)x'(t) & 2\lambda - 2\lambda x(t)^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t,x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3\varepsilon y(t)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

上記の方程式において変数の値はそれぞれ $\omega_1 = 2\pi/\sqrt{2}$，$\omega_2 = 2\pi/\sqrt{5}$，$\varepsilon = 1/32$，$g = 1/32$,h=1/32,$\tau = -0.1$，$\delta = 0.05$ としたときの数値結果を Table 1 に示す．

Table 1: 数値実験結果

λ	M	κ	μ	$\kappa + M\mu$	誤差評価
1/2	4.000	3.287×10^{-1}	4.680×10^{-3}	3.474×10^{-1}	8.919×10^{-5}
1	3.000	3.180×10^{-1}	4.101×10^{-3}	3.303×10^{-1}	2.663×10^{-5}
10	0.192	9.453×10^{-1}	4.812×10^{-3}	9.462×10^{-1}	1.060×10^{-6}

Table1 よりすべての λ で定理の条件 $\mu < 1, \kappa < 1, \kappa + M\mu < 1$ を満たしていることがわかる．この結果から分かるように，μ の値が大きくなってしまうと $\kappa + M\mu$ の値も大きくなってしまい定理の条件を満たさなくなってしまう．我々の近似解において，μ は非常に重要なパラメーターである．

6 まとめ

本稿では，差分微分方程式における数値解析の方法と非線形差分微分方程式における準周期解の存在性について論じた．この定理は非線形差分微分方程式における準周期解の存在性とその一意性，さらに近似解と厳密解との誤差評価を与える定理になっている．ガレルキン近似解法のアルゴリズムを用いて，実際に定理の条件を満たす近似解を求めた．この定理を用いて，より多くの準周期解を持つ非線形差分微分方程式の近似解が求められることを望む．

参考文献

[1] Y.Shinohara, M.Kurihara and A.Kohda, "Numerical Analysis of Quasiperiodic Solutions to Nonlinear Differential Equations", *Japan journal of applied mathematics* Vol.3, No.2(1986), pp.315-330.

[2] Y.Shinohara, A.Kohda and H.Imai , Existence and Uniqueness of Quasiperiodic Solutions to Quasiperiodic Nonlinear Differential Equations, Analysis of Ordinary Differential Equations and Its Applications,Ed. T.Mitui and Y.Shinohara, World Scientific(1995), pp.147-163.

[3] Y.Shinohara, A.Kohda and T.Mitui, On quasiperiodic solution to Van der Pol equation. *J.Math. Tokushima Univ.*,18(1984),pp.1-9.

[4] M.Kurihara and T.Suzuki, Galerkin's Procedure for Quasiperiodic Differential Difference Equations, *Reports Fac.Eng.Yamanashi University,* Vol.38(1985), pp.77-83.