数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 234-240

あるIsoclineをもつLiénard系における周期軌道の非存在定理

(Non-existence theorem of closed orbits for the Liénard systems with some Isoclines)

日本大学理工学部　林　　誠 (Makoto Hayashi)

College of Science and Technology

Nihon University

1　序

次の型の Liénard 系を考える.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{L}$$

ここで, $F(x)$ と $g(x)$ には適当な滑らかさを仮定することによって, 初期値問題に対する解の一意性が成り立っているものとする.

Math. Sci. Net で検索することでわかるように, 系 (L) に対する研究成果は非常に多く, 歴史もある. 例えば, 筆者に関係ある分野でいえば, (A) 解軌道の漸近的挙動, (B) 周期軌道の存在とその個数, (C) 周期軌道の非存在, (D) ホモクリニック軌道などの特別な軌道の存在, などがある. 系 (L) は簡単な様相をしているにもかかわらず, これらの分野に対する完全な結果は与えられていないのが現状である. 特に, ここでは分野 (C) について, 従来の方法では証明できない系を例 (§2) に取り挙げ, その具体的解法を与える (§3) ことによって研究方針を述べる. 次に, 主結果 (§4) を述べその証明を与える. 最後に, 従来知られている系に応用することで, 既知の結果との一致, または改善点をみる (§5).

系 (L) の軌道の定性的性質を的確にとらえるには, 系特有の Isocline の存在とその軌道の横断が深く関わっている. [S] や [S-H] などでは, 系 (L) の Isocline である $y = F(x)$ を, 軌道が垂直方向に横断することがあるかどうかを, その分野の目的の中心に置いている. この研究では, 系 (L) を同値な系 (M) に変換することで, 系 (M) の 2 つの異種の Isocline の存在に注目し, 軌道をこれらの Isocline で挟み込むことで閉軌道の非存在を明らかにする.

この論文を通して次を仮定する. $x = 0$ の近傍では,

[C1]　　$xF(x) > 0$　かつ　$xg(x) > 0$

が成り立っているものとする. このとき, 少なくとも原点は平衡点の 1 つであり, それは安定で, その Poincaré 指数は $\mathrm{Ind}(0,0) = +1$ である. それは原点の近傍での系 (L) のベクトル場の回転数を数えることによって簡単にわかる.

2 具体例

Example 1: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ に対して, 次の型の系 (L) を考える.

$$F(x) = x^4 + \beta x^3, \qquad g(x) = x^2 + \alpha x \tag{E1}$$

系 (E1) の平衡点は, $(0,0)$, $(-\alpha, \alpha^4 - \beta\alpha^3)$ の 2 点であり, それぞれの指数は $\mathrm{Ind}(0,0) = +1$, $\mathrm{Ind}(-\alpha, \alpha^4 - \beta\alpha^3) = -1$ である. 系 (E1) の閉軌道の非存在を考えたい.

これまでに知られている方法には, (1) Bendixson–Dulac の方法 (例えば [Zh]), (2) 代数的不変曲線の存在を利用した方法 ([H1]), (3) 平面曲線 $(F(x),\ G(x))$ の自分自身との交わりを利用した方法 (例えば [S-H]), ここで $-\alpha \le x$ に対して $G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$ である. しかしながら, これらの方法ではいずれも, 系 (E1) の閉軌道の非存在を証明することは難しい. それは下記によりわかる.

(1) では, ある C^1-級関数 $B(x,y)$ が存在して, 原点を含むある領域 G 内で

$$\frac{\partial B(x,y)(y - F(x))}{\partial x} - \frac{\partial B(x,y)g(x)}{\partial y} \neq 0$$

が成り立つことを示す必要がある. 領域 G, 関数 $B(x,y)$ を決定することは難しい.

(2) においては, 系 (E1) には代数的不変曲線が存在しないことが [O] により知られている. [H1] で与えられた方法は無効である.

(3) の方法は, $0 \le \alpha \le \beta$ のときには有効である. このとき曲線 $(F(x), G(x))$ は, $x = u_1 < -\beta$, $x = u_2 > 0$ において自分自身と交わる. 従って, 領域 $D = \{(x,y) \mid x \ge -\alpha\}$ 上には閉軌道は存在しない (このことは, [H2] からも直ちにわかる). 一方, 閉軌道が点 $(-\alpha, \alpha^4 - \beta\alpha^3)$ を含むように直線 $x = -\alpha$ と交わるならば, 閉軌道の指数は 0 となり Poincaré index theorem に反する. 以上の事実より, この場合には閉軌道は存在しないことが示される.

一方, $\alpha > \beta$ のときには, (i) $x = u_1 \le -\alpha$, $x = u_2 > 0$ または (ii) $x = u_1 > -\alpha$, $x = u_2 > 0$ のいずれかにおいて曲線 $(F(x), G(x))$ は自分自身との交わりをもつ. (i) の場合には, $\alpha \le \beta$ のときと同じ理由により閉軌道の非存在が示される. (ii) の場合には, 領域 D 上で閉軌道が存在する可能性がある. つまり, 方法 (3) では系 (E1) の閉軌道の非存在を示すことはできない. 従って, 上に述べた従来の方法では系の閉軌道の非存在を証明することはできない.

3 系 (E1) に対する解法

ここでは, $\alpha > \beta$ をみたす $\beta = 2$, $\alpha = 3$ に対する系 (E1) の閉軌道の非存在を, [1] ある 2 つの Isocline curves の利用, [2] Poincaré index theorem の利用, [3] 不変集合の構成 により証明できることをみる.

[1] $\varphi(x) = 2x^3$ に対して

$$E(x) = F(x) - \varphi(x) = x^4$$

$$H(x) = E(x) - \frac{g(x)}{\varphi\,'(x)} = x^4 - \frac{x+3}{6x}$$

とおく. 系 (E1) に対して $y = z + 2x^3$ なる変数変換を施せば

$$\begin{cases} \dot{x} = z - E(x) \\ \\ \dot{z} = -\varphi'(x)(z - H(x)) \end{cases} \tag{E1*}$$

の型の Liénard 系になる. この系に対して, 2 つの Isocline curves $z = E(x)$, $z = H(x)$ を考えることができる. 前者は Vertical Isocline, 後者は Horizontal Isocline と呼ぶことができる.

[2] もし系 (E1)* に閉軌道が存在するとすれば, それは Poincaé index theorem から, 原点のみを平衡点として含まなければならない. そして, 関数 $E(x)$ と $H(x)$ の特性から, 曲線 $z = E(x)$ を垂直方向に横切った閉軌道は曲線 $z = H(x)$ と交わることができない.

[3] $G(x) = G(-2)$ を満たす $x = a_2 > 0$ が $1 < a_2 < 2$ の範囲で唯一つ存在し, $H(a_2) > -\varphi(a_2)$ が成り立つことがわかる. そこで, $W(x,z) = (1/2)(z + \varphi(x))^2 + G(x)$ なる Liapunov 関数を考える. 系 (E1)* の解 $(x(t), z(t))$ に対して, $\dot{W}(x(t), z(t)) \leq 0$ $(x(t) \in [-2, a_2])$ であり, $W(x,z) = G(a_2)$ は $x \in [-2, a_2]$ で定義された原点を含む閉曲線である. このとき, 領域

$$\Omega = \{(x,z) \mid (z + 2x^3)^2 \leq 2\{G(-2) - G(x)\}\}$$

は系 (E1)* の負の不変集合になっている.

以上の事実 [1], [2], [3] から, 系 (E1)* に閉軌道が存在すれば, それは曲線 $z = E(x)$ を垂直に横断し, 曲線 $z = H(x)$ に交わることなく領域 Ω を外側から内側に横断し, 再び Ω を横断することはない. これは領域 $D = \{(x,z) \mid -2 \leq x \leq a_2\}$ に閉軌道が存在しない事実に反している. このような手順で相平面解析を行えば, 系 (E1) の閉軌道の非存在が示される.

4 主結果

系 (L) に条件 [C1] を仮定する. $g(x)=0$ を満たす x は 0 と α (≤ 0) のみとし, $F(x)=0$ を満たす $x \leq 0$ があるときにはその最大値を a_1 とする. $\alpha > 0$ に対しても同様な議論ができる.

$\varphi(0)=0$, $\varphi'(x)>0$ $(x>0)$ を満たす連続微分可能な関数 $\varphi(x)$ に対して、$y=z+\varphi(x)$ なる変数変換を系 (L) に施すことによって与えられるリエナール型微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x} = z - E(x) \\ \\ \dot{z} = -\varphi'(x)(z - H(x)) \end{cases} \tag{M}$$

$$E(x) = F(x) - \varphi(x), \qquad H(x) = E(x) - \frac{g(x)}{\varphi'(x)}$$

を考える. 系 (M) には 2 つの平衡点 $(0,0)$, $(\alpha, E(\alpha))$ が存在し, その Poincaé 指数はそれぞれ $+1$, -1 である. またこの系には, 2 つの Vertical isocline $z=E(x)$ と Horizontal isocline $z=H(x)$ が存在する.

$a_1 \leq \alpha$ のときに系 (M) の閉軌道が存在しないことは、従来の手法 ([S-H] または [H2]) で簡単に示せる. そこで, $\alpha < a_1$ の場合を考える.

$G(x) = \displaystyle\int_0^x g(\xi)d\xi$ とするとき, $G(x)=G(a_1)$ を満たす正の数 $x=a_2$ が唯一つ存在することから, これに対して

$$P_{a_2} = -\min_{x\in[0,a_2]}\{-\varphi(x) - \sqrt{2(G(a_2)-G(x))}\}$$

とおく. 系 (M) に相平面解析を行うことで次の 2 つの結果が与えられる：

定理 1

$$[\mathrm{C2}] \;\; \varphi'(a_2)F(a_2) \geq g(a_2) \quad \wedge \quad [\mathrm{C3}] \;\; P_{a_2} \leq \inf_{x\in[a_2,+\infty)} H(x)$$

を満たすならば, 系 (L) に閉軌道は存在しない.

定理 1 の証明：もし系 (M) に閉軌道 C が存在するとすれば, それは Poincaé index theorem から, 原点のみを平衡点として内部に含み, 直線 $x=\alpha$ と交わることはできない. また, 2 つの Isoclines $z=E(x)$ と $z=H(x)$ の特性から, 曲線 $z=E(x)$ を垂直方向に横断した閉軌道 C は, 曲線 $z=H(x)$ と交わることができない.

次に, 系 (M) に対する Liapunov 関数として $W(x,z)=(1/2)(z+\varphi(x))^2+G(x)$ を考える. 系 (M) の解 $(x(t),z(t))$ に対して, $\dot{W}(x(t),z(t)) = -g(x(t))F(x(t)) \leq 0$ $(x(t)\in[a_1,a_2])$ が成り立つ. また, 平面曲線 $\Gamma : W(x,z)=G(a_2)$ は $x\in[a_1,a_2]$ で定義された原点を含む閉曲線であり,

このとき, 領域

$$\Omega = \{(x,z) \mid (z+\varphi(x))^2 \leq 2\{G(a_2)-G(x)\}\}$$

は系 (M) の負の不変集合になっている. 更に, 曲線 Γ 上の右端点 R $(a_2, -\varphi(a_2)$ は条件 [C2] から, 領域 $\{(a_2,z) \mid z \leq H(a_2)\}$ に存在する. よって, 条件 [C3] から軌道 C は曲線 $z=E(x)$ を垂直に横断し, 曲線 $z=H(x)$ に交わることなく領域 Ω を外側から内側に横断し, 再び Ω を横断することはできない. これは, 領域 $D=\{(x,z) \mid a_1 \leq x \leq a_2\}$ に閉軌道 C が存在しない事実 (例えば [H2]) に反している. ■

<u>定理</u> 2

$$\text{[C4]}\quad \varphi'(a_2)F(a_2) < g(a_2) \quad \wedge \quad \text{[C5]}\quad P_{a_2} \leq \inf_{x\in[0,+\infty)} H(x)$$

を満たすならば, 系 (L) に閉軌道は存在しない.

定理 2 の証明は定理 1 と同様である. 但し, 曲線 Γ 上の点 R は条件 [C4] から, 領域 $\{(a_2,z) \mid H(a_2) \leq z \leq E(a_2)\}$ に存在する. しかし, 条件 [C5] から, 閉軌道 C は不変領域 Ω に留まることになり矛盾が生じる. ■

5 他の系への応用

この節では, 前節で与えられた結果を 3 つの Liénard 系に応用し, 系 (E2) と系 (E3) では既存の結果と一致することをみる. 系 (E4) では従来の結果が部分的に改善されることをみる.

<u>Example 2:</u>

[S-Y] では, Lipschitz dynamical system と呼ばれる次の Liénard 系の閉軌道の非存在が与えられている.

$$F(x)=\begin{cases} 2x-(3/2) & (x\geq 1) \\ (1/2)x & (0<x<1), \\ (1/4)x(x+2) & (x\leq 0) \end{cases} \qquad g(x)=x \tag{E2}$$

そこでは, §2 で述べた (3) の方法を使うことで, 系 (E2) の閉軌道の非存在が与えられている. この系に対して定理 1 が適用される. 今, $\varphi(x)=x$ とおけば,

$$E(x)=\begin{cases} x-(3/2) & (x\geq 1) \\ -(1/2)x & (0<x<1) \\ (1/4)x(x-2) & (x\leq 0), \end{cases} \qquad H(x)=\begin{cases} -(3/2) & (x\geq 1) \\ -(3/2)x & (0<x<1) \\ (1/4)x(x-6) & (x\leq 0) \end{cases}$$

の型の系 (M) が与えられる. 簡単な計算から, $a_2=2$, $\varphi'(2)F(2) > g(2)$ であり,

$P_2 < \inf_{x\in[2,+\infty)} H(x) = -3/2$ が成り立つことがわかる. 従って, 主結果を使っても系 (E2) の閉軌道の非存在が示される.

Example 3:

Example 2 と同じく, [S-Y] にある次の Liénard 系:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x, \qquad g(x) = x \tag{E3}$$

を考える. 系 (E3) の閉軌道の非存在を与えるために, $\varphi(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x$ をとる. このとき, $\varphi'(x) = 0$ となる点 x が存在するため, 曲線 $z = H(x)$ には不連続点 $x = p$ $(-2 < p < -3/2)$ がある. ここで,

$$E(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3, \qquad H(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{12x}{8x^3 + 6x^2 - 12x + 9}$$

である. しかしながら, $a_2 = 3/2 > p$ であるため, 定理 1 を適用することへの影響はないことがわかる. $x > 3/2$ に対して, $H'(x) > 0$ であり,

$$\varphi'(\frac{3}{2})F(\frac{3}{2}) > g(\frac{3}{2}) \ \wedge \ P_{\frac{3}{2}} < -\varphi(\frac{3}{2}) < \inf_{x\in[\frac{3}{2},+\infty)} H(x) = H(\frac{3}{2}) = -\frac{191}{224}$$

であることが計算されるので, [S-Y] と同じく系 (E3) の閉軌道の非存在が示される.

Example 4:

W.A. Coppel は [C] の中で次の Liénard 系の閉軌道の非存在を考察した.

$$F(x) = ax^2 + bx, \qquad g(x) = x^2 + x \tag{E4}$$

この系には, $(0,0)$, $(-1, a-b)$ の 2 つの平衡点がある. $0 < a \leq b$ のとき, 系の閉軌道が存在しないことは簡単にわかる. そこで $a > b$ のときに主結果を応用する. $b^2 \geq 4$ に対して, $\varphi(x) = \frac{b - \sqrt{b^2-4}}{2}x = mx$ とおけば,

$$E(x) = ax^2 + (b-m)x, \qquad H(x) = (a - \frac{1}{m})x^2$$

である. $a^2 - ab + 1 > 0$ ならば, $x > 0$ のとき, $0 < H(x) < E(x)$ であり $E'(x) > 0$, $H'(x) > 0$ である. このとき, 軌道 C は曲線 $z = E(x)$ を垂直に横断し, 曲線 $z = H(x)$ に交わることなく平衡点である原点に吸い込まれる. つまり, 系 (E4) には閉軌道は存在しない. 従って, [C] の結果とから

$$S = \{(a,b) \mid b(b - \frac{a}{2}) \geq 0\} \text{ または } T = \{(a,b) \mid b(b - \frac{a}{2}) < 0 \ \cap \ b^2 \geq 4\}$$

ならば, 系 (E4) は閉軌道をもたないことがわかる. 領域 T が主結果によって新たに得られた改善領域である. これは 1 つの改善例であり, $\varphi(x)$ の選び方により, より条件の弱い結果を導くことができる.

6 参考文献

[C] W.A. Coppel, *Some quadratic systems with at most one limit cycle,* Dynamic Reported, 2 (1998), 61–68, New York : Wiley.

[H1] M. Hayashi, *On the non-existence of the closed orbit for a Liénard system,* Southeast Asian Bulletin of Math., 24 (2000), 225–229.

[H2] M. Hayashi, *On the uniqueness of the closed orbit of the Liénard system,* Math. Japon., 46 (1997), 371–376.

[H3] M. Hayashi, *Non-existence theorem of closed orbits for the Liénard systems with some Isoclines,* (in preparation).

[O] K. Odani, *The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic, J. Differential Equations*, 115 (1995), 146–152.

[S] J. Sugie, *Homoclinic orbits in generalized Liénard systems,* J. Math. Anal. Appl., 309 (2005), 211–226.

[S-H] J. Sugie and T. Hara, *Non-existence of periodic solutions of the Liénard system,* J. Math. Anal. Appl., 159 (1991), 224–236.

[S-Y] J. Sugie and T. Yoneyama, *On Liénard systems which has no periodic solutions,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 113 (1993), 413–422.

[Zh] Zhang Z. and others, "Qualitative Theory of Differential Equations", Trans. Math. Monographs, 102, Ams. Math. Soc., 1992.