数理解析研究所講究録 1477 巻 2006 年 174-177

N 人売り出しのノイジー・ゲーム

大阪府立大学・大学院理学系研究科情報数理科学専攻　寺岡　義伸（Yoshinobu Teraoka）
Department of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science,
Osaka Prefecture University
大阪府立大学・大学院理学系研究科情報数理科学専攻　北條　仁志（Hitoshi Hohjo）
Department of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science,
Osaka Prefecture University

1. はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする n 人非 0 和ゲームである。

n 人のプレーヤ（Player 1,…,n）が、小豆や大豆といった生産物の販売権を占有している。各プレーヤの市場占有率は対等であり、互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫があり、各期の初めに生産されると、n 人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すのが最適かのタイミングを考えなければならない。次の期に入ると新しい収穫があるので、全プレーヤはこの生産物を各期の終わりまでに売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、n 人の誰もが売りに出さない間は時間の経過に伴って上昇する。しかし、誰か一人が自分の持分を売りに出すと急激に（不連続的に）評価額は下落し、その後はまた時間の経過のしたがって上昇する。このような評価額の上昇と急激な下落が残り n-1 人全員が売りつくすまで繰りかえされる。n 人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額の変化と、他の n-1 人の売り出し時刻を考えに入れながら、自分の売り出し時刻を決定しなければならない。

この問題は、農作物の販売のような問題に限らず、土地の売買や大形船舶の発注のような問題にも応用でき、モデルの作り方で、様々な展開が可能となる。

このような問題にあっては、従来型のタイミング・ゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。n 人に誰か一人のプレーヤが売りに出した瞬間、そのことが直ちに残り n-1 人のプレーヤに知られてしまう場合（ノイジー）、そのプレーヤはノイジーと、逆に、あるプレーヤが売りに出したとき、そのことが残り n-1 人の誰にも知られない場合（サイレント）である。

ここで扱ったモデルに対して、2 人ゲームに関しては参考文献[5]で、2 人のプレーヤが、共にサイレントな状態にある場合と共にノイジーな状態にある場合の、各々に関して、定式化並びに平衡点を示してある。n 人全員がサイレントを仮定した報告は現在投稿中の論文で扱っている。本報告では、n 人全員がノイジーな状態にあるゲームを扱う。現実の売買ゲームを考えると、この種のモデルにあっては、全プレーヤがノイジーであるのが一般的であろう。

2．記号と仮定

問題を見やすくするため、１期間のゲームを考え、期間は単位区間 [0, 1] で表現する。また、以下のような記号を導入し、後の議論のため、それらに付随した仮定を以下のように設定する。

$v(t)$：n 人のどのプレーヤもまだ売りに出していないときの、時刻$t \in [0, 1]$における生産物の価値。

微分可能であり　$v'(t) > 0$ for $t \in [0, 1]$ を仮定する。

r：n 人の誰か１人が売り出したとき、売り出す度に生産物の価値が下落する割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定する。すなわち、誰か１人のプレーヤが売りに出すと、$t \in [0, 1]$ での評価額は$v(t)$から $rv(t)$ へ減少する。 また、k 人のプレーヤが売りに出した後は $r^k v(t)$ へ減少する。ここで、もしk 人のプレーヤが同時に売り出したときは、各プレーヤはその時点$t \in [0,1]$における生産物の評価額$\hat{v}(t)$を受け取る事が出来、その後、評価額は$r^k \hat{v}(t)$ へ減少するものとする。

3．定式化と主要結果

各プレーヤは[0, 1]内のどの時点においても、他の n-1 人のプレーヤが既に売りに出したか、未だ売りに出していないかを、情報として知ることが出来る。そこで、Player i の純戦略を x_i = ($x_i^{n-1}, ---, x_i^1, x_i^0$) とする。この意味は以下のようになる。予め[0, 1]に x_i^k を $0 \le x_i^{n-1} \le --- \le x_i^1 \le x_i^0 = 1$ と決めておき ($k = n-1, ---, 0$)、時刻x_i^kまでに他の k 人が未だ売りに出さなければ、Player i は このx_i^k で売りに出し、それまでに誰か１人が売りに出せばx_i^{k-1} に移行する。このように続けて n-1 人が全員売りに出せば、残り人数は０であるから、x_i^0 まで待って売りに出す。

ところで、このゲームにあっては、どのプレーヤにとっても条件は同じであるから、どのプレーヤが自分の設定時点より先に行動したのかは問題でなく、それまでに何人がどの時点で行動したのかが問題となってくる。従って、Player 1 に注目し、他の n-1 人の行動時刻を小さい方から順に並べたものを $y_{(1)} \le y_{(2)} \le --- \le y_{(n-1)}$ とおくと、Player 1 にとっての期待利得は

$$M_1(x_1, ---, x_n) = \begin{cases} v(x_1^{n-1}), & 0 \le x_1^{n-1} \le y_{(1)} \\ rv(x_1^{n-2}), & y_{(1)} < x_1^{n-2} \le y_{(2)} \\ ----, & ------- \\ r^{n-1} v(x_1^0), & y_{(n-1)} < x_1^0 = 1 \end{cases}$$

と表現することが出来る。

ここで、当面の問題として $v(0) \le r^{n-1}v(1)$ を仮定した場合を扱う。そこで、a_k を方程式 $v(a) = r^k v(1)$ の区間 $[0,1]$ における唯一つの根とする。ここに $k = 0,1,---,n-1$ である。従って、$a_0 = 1$ となる。そこで 純戦略 $a = (a_{n-1},---,a_1,a_0)$ を考える。そうすると

$$M_1(x_1,a,---,a) = r^k(x_1^{n-k-1}) \le r^k v(a_{n-k-1}) = r^{n-1}v(a_0) = r^{n-1}v(1),$$

$$\text{for } a_{n-k} < x_1^{n-k-1} \le a_{n-k-1}, \quad k = 1,---,n-1.$$

が成立する。以上より、定理１を得る。

定理１．$v(0) \le r^{n-1}v(1)$ と仮定する。そこで、a_k を区間 $[0, 1]$における方程式 $v(a) = r^k v(1)$ の唯一つの根とする。ここに $k = 1,---,n-1$ である。そうすると純戦略 $a = (a_{n-1},---,a_1,a_0)$ の組 $(a,---,a)$ は、この非０和ゲームの Nash 平衡点を構成する。その結果、各 Player i への平衡値を v_i と置くと、$v_i = M_i(a,---,a) = r^{n-1}v(1)$ となる（$i = 1,---,n$）。

次に、$r^{n-1}v(1) < v(0)$ に関して考察する。 いま、Player i が純戦略 $0 = (0, x_i^{n-2},---,x_i^0)$ を採用したとすると

$$M_1(x_1,0,---,0) = r^{n-1}v(x_1^{n-1}) \le r^{n-1}v(1) < v(0), \quad \text{if } x_1 > 0$$

が成立し、かつ

$$M_1(0,0---,0) = v(0) > r^{n-1}v(1)$$

であるから、次の定理を得る。

定理２．$r^{n-1}v(1) < v(0)$ とする。この時 純戦略 $0 = (0, x_i^{n-2},---,x_i^0)$ は、この非 O 和ゲームに対して Nash 平衡点となる。 結果として Player i への平衡値 v_i は

$$v_i = M_i(0,---,0) = v(0), \quad i = 1,---,n$$

となる。

n が十分に大きいときは $r^{n-1}v(1) < v(0)$ と考えてよい。定理１の結果は、販売権を持つ者の数が少ないか、売り出し開始時期における生産物の評価額が十分な時間経過の後の評価額に比べてあまりにも低いときは、十分市場の動向を観察してから売り出すことか経済均衡に繋がることを主張している。また、定理 2 の結果は、販売権を持つ者の数がある程度以上大きくなると、生産物を最初から売りに出すことが経済均衡に繋がり、その結果、価格も安定するという事実を説明付けている。

今後へ残された問題

ここでは r と定数と仮定したが、t∈経過時刻[0, 1] の関数とした場合への一般化は複雑ではあるるが、現実的であり、興味深い。また、ここでは、1人が売り出す度に評価額が割引率 r で減少させる仮定を設けたが、売り出した人数分の1となる考え方もある。現実の市場がどのように動いているのか、十分な調査が必要と思われる。

本論文では、各プレーヤの売り出し時刻が他の売り出し時刻と一致したとき、同時に売り出したプレーヤの数に影響されず、その時刻より前に売りに出していた人数にのみ影響されると仮定した。この仮定により、解析が容易になり、結果も明快になったが、現実の市場においてこの仮定が現実的であるか検討も今後の課題であろう。

参考文献

1. M. Dresher, Games of Strategy : Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. S. Karlin, Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Econimics, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.
3. Y. Teraoka and Y. Yamada, Games of production development in manufacturing, Lecture Note in Economic and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing, Springer, Berlin, 1997, 58-67.
4. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person games on territory, Game Thory and Applications, Vol.Ⅴ, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2000, 134-141.
5. Y. Teraoka and H. Hohjo, Two person games of timing on sale, Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research, Nanzan University, Nagoya, 2005, 281-289.
6. Y. Teraoka and H. Hohjo, N-person silent game on sale, Preprint, 2005.