フレーゲの論理主義と数の存在論

大西琢朗

0．はじめに

本論の目的は、フレーゲの「数は対象である」という数の存在論の内実と、それを確立するための方法を、主に『算術の基礎』[(1)]をテキストとして跡づけ、検討することにある。

彼によれば、数とは、我々から独立に存在する客観的な対象である。だが同時に、数は「空間的で物理的なわけでもなければ、また表象のように主観的なわけでもなく、非感性的」(GLA27)なものであり、通常の認知手段を通して我々に与えられるものではないとされる。ではなぜフレーゲは、このような一見して問題含みの数の存在論を採用したのか、それはどのように正当化しうるのか。

本論は、彼自身の論理主義プロジェクトの観点から、彼の数の存在論の必要性、必然性を明らかにし、その正当化の試みを擁護することを目指す。論理主義者フレーゲにとっての数とは、論理学以外の認識根拠を排除する形で与えられる、抽象的な、論理的対象であるが、それと同時に、算術という科学の研究対象として、またそれ自身数え上げの対象となるという意味で、客観的な存在者とされる。そして、彼の論理主義プロジェクトの遂行のために、数はそのようなものでなければならなかった。その存在論を確保するために彼が試みたのが、数の文脈的定義という戦略だった。そこでは、文脈原理と文の内容の分割というアイディアを基に、認識論的問題を抱えた数が、それにもかかわらず我々に与えられる可能性が模索されている。残念ながら、本論ではすべての問題を解決することはできず、決定的な擁護には至らない。ただ、その過程において、フレーゲの議論を支える興味深い諸洞察を明らかにし、最終的な解決へ向けた道筋を提示できれば、と考えている。

１．ヒューム原理と文脈的〈定義〉

『基礎』において大きく扱われる、数とは何かについての探究は、算術の基本法則を算術の諸観念の定義から論理法則のみを用いて導出する、という彼の論理主義プロジェクトにおいて、出発点となる「定義」の部分に属する。

フレーゲは『基礎』62 節から、この「数とは何か」という問いに対する積極的な回答の試みを始める。そこで彼が実質的に提示しているのは次のような〈定義〉、いわゆるヒューム原理（以下 HP と略記）である（括弧が付いているのは、フレーゲ自身はこれを定義と

しては不十分なものとして却下するからである)。

HP:　N(F) = N(G)　iff　F eq G.

［任意の概念ＦとＧについて、概念Ｆに帰属する数と概念Ｇに帰属する数が同一であるのは、概念ＦとＧが等数的であるとき、すなわち概念Ｆの下に属する対象と概念Ｇ に属する対象を一対一に対応づける何らかの関係が存在するときそのときに限る。］

『基礎』前半部の議論からフレーゲは「個数言明が概念についての言明を含む」(GLA46)という見解に至っている。言い換えれば、数（基数）は対象や対象の集積に帰属するものではなく、概念に帰属する。「数の本来の担い手」は概念である。では、概念に帰属する数それ自体は概念だろうか、それとも対象だろうか。フレーゲによれば、数詞（数を指示すると考えられる表現）の標準的な形式は「概念…に帰属する数」という確定記述である。それゆえ、数詞はフレーゲの用語で言えば（概念語ではなく）固有名のカテゴリーに属す表現であり、それが何かを指示するとすれば（概念ではなく）対象である。

それを踏まえたこの〈定義〉の目的はもちろん、その標準的な数詞が何を指示しているかを説明することにある。ただし、フレーゲの言うようにこの定義は「非常に変わった種類の定義のように思われ」(GLA63)る。なぜなら、この〈定義〉は数詞の指示体を何らかの仕方で提示することで、指示体を被定義項に割り当てるわけではないからだ。その代わりにこの〈定義〉がなそうとしているのは、被定義項を含む左辺［N(F) = N(G)］の真理条件を右辺によって与えることで、基数オペレータ「N(ξ)」によって表示される概念から対象への写像を、そして数詞によって指示される対象（数）を文脈的に定義することである。

2．論理的対象としての数

では、なぜフレーゲはこのような「非常に変わった種類の定義」を試みたのか。それは、数詞の指示体を直接提示できないから、にほかならない。数は、フレーゲにとって、「自存的対象」(GLA57)であり、「すべての人にとって厳密に同一」(GLA93)なものとされる。また、我々あるいは数学者の心の働きによって自由に創造されるようなものでもない(GLA96)。数は、客観的真理を追求する算術という科学において、発見され、研究の対象となる、我々から独立した客観的な存在者である。だがその一方で、冒頭で述べたように、数とは知覚によっても、（空間的・時間的）直観によっても、主観的表象（イメージ）によっても与えられえない、きわめて抽象的な存在者なのである。

この論点は、論理主義プロジェクト全体の見地から理解できるだろう。フレーゲの論理主義は、算術から論理学以外の認識根拠を追放しようとする試みだが、その根底には、算術の普遍的な応用可能性についてのフレーゲの洞察がある(GLA14, 19, 24)(2)。簡単に言えば、物理的なもの（例えば卵）であれ、幾何学的なもの（例えば三角形）であれ、抽象的なもの（例えば数学の定理）であれ、それが例えば 3 個あるならばその個数は共通して 3 であり、2 個のものと 3 個のものを合わせれば 5 個、つまりどのようなモノの個数であれ、その個数について算術の真理、「2+3=5」は妥当するのである。

フレーゲの論理主義とは、算術を論理学と同等の普遍的な応用可能性を持つ学問として特徴づけようとする立場である。もし仮に、数が上のような標準的な認知手段を通して我々に与えられるものだとすれば、それは、算術の認識根拠の中に、物理学や幾何学や心理学といった特殊科学が入り込んできたことを意味する。なぜそのような「特殊な知識領域に関係するような真理」(GLA3)が、他の領域でも妥当しうるのだろうか。そのような疑念を予め排除できるよう、算術を論理学によって基礎づけると同時に、その応用可能性をも説明してしまおうというのがフレーゲの意図である。

しかし、このことは、数と我々の間の認知的ルートが閉ざされた、ということでもある。とすれば当然のことながら「我々が数について表象や直観を何も持ちえないのだとすれば、いったいどのようにして数は我々に与えられるのか」(GLA62)という認識論的な問題が提起されることになる。数は、論理学以外の認識根拠を排除するような形で与えられるはずだから、それを「論理的対象」と呼ぶことができるだろう。そのようなものが存在するだろうか。果たして上の HP によって、数は我々に与えられるのだろうか。

3．文脈原理

『基礎』62-65 節におけるフレーゲは、HPを用いた文脈的〈定義〉によって数詞の指示が確立される、その可能性を探る[3]。そこで持ち出されるのがいわゆる文脈原理である。

> 命題という連関でのみ、語は何かを意味する。したがって、問題となるのは、数詞が現れる命題の意義を説明することだろう。(GLA62)

> 全体としての命題が意義を持つならば、それで十分である。そのことによってまた命題の部分もその内容を得るのである。(GLA60)

１節で見たように、HP において、左辺の数詞を含む文に対してその全体の内容、すなわ

ち真理条件が右辺によって与えられた。すると、そこに文脈原理を適用すると、それで十分である。つまり、数詞の数への指示は確立される、ということのようである。どういうことか。彼の議論をもう少し見てみよう。まず「数詞を含む文」と言っても、そのような文は無数に存在する。だが、数詞が固有名として対象を指示すると見なすとすれば、

> それによって我々には、ある範囲の、意義を持つべき諸命題が与えられている。すなわち、それは再認を表現する命題である。記号 a が我々に一つの対象を表示すべきだとしたら、我々は、b が a と同一かどうかを至る所で決定する規準を持たなければならない。(GLA62)

固有名の機能は、世界の中からただ一つの存在者、対象をピックアップして、我々がその対象について語ることを可能にすることにある。ある固有名がその機能を果たすためには、すなわち我々が、その固有名の指示する一意的な対象について語ることできるためには、その対象を他の存在者から区別し、かつ、その対象が「別の装い」(GLA66)をして（例えば時空的な位置を変えて、あるいは別の固有名の指示体として）現れたときに、それらが「別の装いをしてはいるが同一な対象である」と認知できる、のでなければならない。

このことから考えると、文脈原理が語っているのは、その固有名を含む「再認を表現する命題」に真理条件を与えてやれば―そして、それら再認命題のいくつかが真ならば―その指示は確立する、すなわち「客観的なこと」、「何か事実的なこと」(GLA26)、客観的な真理を表現する文の一部として、その固有名は客観的な世界の構成要素たる対象を指示すると言える、ということである。

そしてHPとは、数の再認規準を与えようとするものにほかならない。HPに従えば、我々はある一つの数ともう一つの数が同一なのか、異なるのかを判断できる。しかも、重要なことだが、その判断のために必要なのは論理学の知識のみなのである。HPの左辺に真理条件を与える右辺は、論理的語彙（論理定項と変項）のみによって構成されている(4)。それゆえ、二つの数の帰属先の概念が与えられれば、論理学の言語に通暁している人なら誰でも、その二つの数が同一かどうかを、すなわち左辺の真理値を決定できる。そこに論理学以外の認識根拠が入り込む余地はない。

とすれば、数は論理的対象として我々に与えられたことにならないか。つまり、数詞の数への指示は確立されたことにならないか。二つ、問題がある。一つにはもちろん、上のように解釈された文脈原理に関する問題、もう一つには、HP の与える再認規準は実は完全なものではない、という問題である。前者については、後で問題を定式化して詳しく検

討することにして、先に後者を見ておく。後者はいわゆる「シーザー問題」であり、この問題のために、フレーゲは HP を不完全な定義として斥けることになる。

4. シーザー問題とフレーゲの定理

まずシーザー問題とは何か、について確認しておこう。この命名の由来となったシーザーはこの HP とは異なる脈絡において登場する(GLA56)が、それを現在の脈絡に置き換えると、シーザー問題とは次のような問題である(GLA66)。

すなわち、我々は HP によって、その両辺に標準的な数詞が現れた同一性文の真理値を決定できる。しかし、数詞が片側にしか現れていない文、例えば「N(F) = ジュリアス・シーザー」の真理値を HP によって決定することができない。もちろん、我々はこの文が偽だと考える。シーザーは数ではない。しかし HP は、このような文を確かに偽であるとして斥けられるような真理条件を与えてはくれない。つまり、一般に「N(F) = q」という形式をした文の真理条件について、HP は何も語らないのである。

このことが意味するのは、HP が数の再認規準を完全には与えてくれない、ということだ。この問題のために、フレーゲは HP を数の定義としては不十分なものだとして却下し、概念の外延という観念を用いた明示的定義へと戦略を転換する。そして、HP は定義ではなく、数の明示的定義から証明される定理となる。だが、この戦略転換は周知のように致命的だった。『算術の基本法則』で提示されることになる、この外延（値域）の観念を支配する基本法則 V はラッセルのパラドクスを引き起こすのである。

そこで、この致命的なステップを踏み出すのではなく、HPの時点で留まって、フレーゲを救うことはできないか、として、フレーゲ・タイプの論理主義的な算術の基礎づけを目指すのが、新論理主義（新フレーゲ主義）である。彼らの試みは、HPの豊かな生産性に動機づけられている。すなわち、1965 年にパーソンズが、1983 年にライトがそれぞれ独立に証明したように(Parsons, 1965, Wright, 1983, chap. 4)、2 階述語論理にこのHPを公理として付け加えた体系は矛盾に陥ることなく、そこからペアノ公理がすべて導出可能なのである（いわゆるフレーゲの定理(5)）。

確かにシーザー問題のために、HP は厳密には定義とは見なせない。また、HP は（後で見るように）存在論的コミットメントを伴うため、論理的真理と見なすこともできないだろう(cf. Boolos, 1990)。したがって、フレーゲの定理それ自体では、算術の基本法則を定義と論理法則のみから導出せよ、というフレーゲ自身の条件を満たしてはいない。

だが、フレーゲの定理という事実を基にこう考えることもできるかもしれない。HPは厳密な定義とは見なせないものの、数というものについて何か本質的なことを表現している

“文脈的説明”なのだ、と。そこで仮にHPが、「特殊な知識領域に関係するような真理」を用いることなく知られうる、数概念についての概念的真理、ないしは分析的真理であると言えるならば（そしてシーザー問題が何らかの方法で解決されうるならば）、算術の基本法則は分析的真理であるHPから論理的に導出されうる、それ自身分析的な真理となるのではないか。つまり、算術の分析性を示そうとしたフレーゲの意図は、少し形を変えて（弱い形で）実現できるのではないか。これが新論理主義者たちの目論見(6)である。

HP の認識論的ステイタスについての議論などを含む、彼らのプロジェクト全体の検討は別の機会に譲るほかないが、数の存在論についての本論の以下の議論は彼らのラインに従ったものである。すなわち、シーザー問題は現在の文脈とは独立に解決しうる問題だと考え、ひとまずその解決を前提した上で、HP と文脈原理のみによって（外延の観念を持ち出すことなく）数詞の数への指示を確立する道を探ることにする。

5. 数の存在論の必要性

それでは、先に挙げた一つめの問題に戻ろう。文脈原理によれば、数詞を含む再認命題に真理条件を与えること、つまり数の再認規準の定式化は、数詞が指示を持つための十分条件である。数詞は客観的真理を表現する文の部分として、ある存在者、すなわち数を指示する。そして、シーザー問題の解決を前提すれば、HP によって数の再認規準が与えられ、数詞の数への指示は確立されるはずである。

本当にそうか。事態はむしろその逆を示しているように見える。HP の左辺の表面構文は、それが数についての文であることを示唆している。しかし、左辺の真理条件として与えられる右辺は、概念間の関係（両概念の下に属する対象間の一対一関係）を主張する文であり、そこに数は登場しない。とすれば、我々は数詞を用いて数について何ごとかを語っているように思っているが、それは見せかけだけのことであり、実際にそこで語られていたのは右辺の内容でしかなかった。つまり、左辺は全体として右辺に翻訳あるいは還元され、数詞は擬似的な固有名として解消され、それゆえに（右辺が示している通り）数への指示などなされていない、このように考えられるのではないか。

まず、このような還元的な読みはフレーゲの意図していることではない、ということを指摘したい。彼はあくまで、数詞は指示を持つ真正の固有名である、と考えており、それを正当化するための議論も持っている。だが、その議論を吟味する前に、その意図自体について問わねばならないだろう。なぜ、上のような還元的な読みをフレーゲは拒否せねばならないのか。HP によって数の再認命題（それは算術において最も基本的な文形式、すなわち等式でもある）の内容が与えられ、我々はそれを理解し、その真偽を判断すること

ができる。それで十分ではないのか。なぜフレーゲはそれに加えて、認識論的問題を抱えた数の存在にまでコミットしようとするのか。

それは、論理主義プロジェクト遂行のために、すなわち算術の基本法則の一つ、自然数系列の無限性の証明のために、それ自身数えられるモノとしての数の存在が必要だったからである。自然数系列が無限であるとは、すなわち任意の数 n に対して常に、その n の直続者 n+1 が存在する、ということである。そして、数は概念に帰属する、その概念の下に属する対象の個数であるというフレーゲの枠組において、それを証明するためには、n までの数が与えられたとき、常にその下に n+1 個の対象が属するような概念を見つけられるのでなければならない。そこで、もし数が論理的対象として存在すると言えるならば、まさにそこで与えられた 0 から n までの数を数えればよい。その個数は n+1 個である。つまり、n までの数が与えられれば、常に n の直続者 n+1 が帰属する概念として、「0 から n までの数」をとることができる（もちろん、新論理主義におけるフレーゲの定理の証明もこのアイディアを利用している）。

先のような還元的な読みを採用し、論理的対象としての数が存在しないと考えるならば、上の n+1 個の対象をどこかから持ってこなければならない。このことは実質的に、無限公理を前提することに等しい(cf. Wright, 1983, chap. 1, sec. 6, Dummett, 1991, chap. 11)。とすれば、今度はその公理の認識論的ステイタスを説明するという負担がのしかかることになる。反対に、HP によって数の存在が確立できたならば、フレーゲ（あるいは新論理主義者）は論理的対象の存在論の内部に留まることができ、その負担は回避できる。そのためには、HP を還元的に読むのではなく、それによって数詞の指示を確立せねばならない。そのようなことは可能なのか。可能だとすれば、それはいかにしてか。次節でその問題にとりかかろう。

6．数への指示確立へ向かうプロセス

数詞が擬似的な固有名であるように見えるのは、左辺が数同士の同一性を主張する文としての表面構文を持っているにもかかわらず、その真理条件として与えられる右辺の内容（概念間の関係）はそうではないからだった。そして、同一性とは概念間ではなく、対象間にのみ成立する関係であるから、左辺を（右辺に還元されるものではなく）真正の同一性文と見なすことができれば、左辺の「=」の両辺に置かれた数詞もまた、真正の固有名と見なすことができる。では、その“真正”性をどのように示すのか。

我々の意図は、両辺に数がくる等式として見なせる判断について、その内容を形成

することである。したがって、我々が求めているのは、相等性［同一性］を特にこの場合のために説明することではなく、既知の相等性概念を用いて、互いに等しいと見なせるものを獲得することなのである。(GLA63・括弧内引用者)

我々は、数の概念とは独立に、同一性がいかなる関係であるかについての知識を持っている。同一性とは、同値関係であり、かつ普遍的な真理保存的交換可能性を保証する関係である (cf. GLA65)。すなわち、それに関して反射性・対称性・推移性が成り立ち、任意の F について a = b かつ Fa ならば、Fb である。そして、HP の右辺が概念間の一対一対応という同値関係を表現するものとされていることによって、左辺がまさに上に挙げた同一性文としての構文論上のふるまいを示すのである。例えば「=」の推移性、すなわち「N(F) = N(G) かつ N(G) = N(H)ならば、N(F) = N(H)」は、右辺の一対一対応が持つ推移性、すなわち「F eq G かつ G eq H ならば、F eq H」によって保証されている。また交換可能性についても、数詞の現れうる文脈をひとまず両辺に数詞が来る“同一性”文（ここで問題の「=」の両辺が数詞であるような文）に制限してやれば、「=」の推移性から成立する。つまり、推論における左辺の「=」は同一性関係を表示するものとして、数詞は固有名として、見かけ上はふるまうようになっているのである。

だとすれば、文脈原理が主張しているのは、左辺が構文論上は同一性文としてふるまうならば、それは見かけだけではなく、真正の同一性文だ、ということにほかならない。すなわち、数詞を含む再認命題に真理条件を与え、かつ、その再認命題が同一性文としての構文論的なふるまいを示すならば、数詞は客観的に真なる思想を表現する文の一部として、ある対象を指示する、と言っているのである。

だが、これでも問題は解決していない。HPによる文脈的〈定義〉のプロセスをまとめつつ、検討してみよう(7)。その説明が成功するとすれば、それは次のようなメカニズムによって、数詞の指示を確立する。まず、認識論的問題を抱えた数についての再認命題（の一部）、すなわちHPの左辺の真理条件を、右辺によって与える。右辺は論理的語彙のみによって構成されており、我々は問題なく右辺の、それによって左辺の真理値を決定することができる。つまり、右辺は説明的・認識論的に先行して(prior)いる。

だが、数えられるモノとしての数の存在を確保するために、還元的な読みは斥けられたのだった。左辺の真理値は数への指示を含まない右辺を参照することで決定できるが、それでも左辺は表面構文の示唆するとおりの同一性文として、そこに含まれる数詞は対象を指示する真正の固有名として見なされねばならなかった。つまり、存在論的なコミットメントに関しては、優先される(prior)のは右辺ではなく左辺である。

そして、このプロセスを可能にしたのが文脈原理であった。文脈原理によって、論理的対象とされる数の認知の問題は、数詞を含む文全体の真理の問題へ転換される。この問題転換によって、後者の問題を右辺によって解決し、数に関する認識論的問題が回避される。かつ、それと同時に、左辺の表面構文が示唆するとおりの存在論が導入される。つまり、数詞の数への指示が確立される。

しかし、右辺の説明的・認識論的先行性と、左辺の存在論的優先性を並列すればすぐに予想できることだが、数の存在論と数詞を含んだ文についての我々の理解の間にはギャップがある。HP を受容するならば（かつ、シーザー問題が解決できるならば）、我々は構文論的には数の再認命題である文たちの真理値を決定できる。だが、そのときでも我々は数詞を含む文を、数について語っているものとして理解してはいないのである。我々に与えられる理解は右辺によって与えられるものだけであり、それに従えば我々は左辺を、概念間の（一対一対応という）同値関係を主張するものとしてしか理解していない。そこには数は登場しない。つまり、還元的な読みの問題はまだ完全には解決していない。

このような、言わば理解の伴わない存在論に実質はないだろう。それでも HP によって数が「我々に与えられた」と言うために持ち出されるのが、次のようなプロセスである。

> 我々はその［右辺の］内容を元とは違った仕方で分割し、それによって新しい概念［数］を獲得するわけである。(GLA64・括弧内引用者)

右辺で与えられた内容から出発し、数の理解に到達するためには、その内容を左辺の表面構文の示唆するとおりの新しい仕方で把握する、すなわち数について語るものとして把握し直すことが必要である。フレーゲは、その再把握を「内容の分割」と表現する。次節ではこの発想について簡単に見ておくことにする。

7．内容の分割と概念形成

フレーゲが考えているのは次のようなことである。まず、ある文の内容が与えられる。次に、その把握された内容は「元とは違った仕方で分割」することができる。それによって、最初の段階の理解では把握されていなかった、新しい概念が姿を現す。つまり、我々の元々の文の理解に何か新しいものが付け加わる。本論の文脈では、HP の右辺には現れていなかった数概念（そしてその下に属する対象としての個々の数）についての理解が、右辺の内容に付け加わる。

果たしてそのようなことは可能なのか。おそらくこれは、フレーゲの言語哲学、文の意

味理解に関する思想全体に関わる問題であり、ここでは十分に検討する余裕はない。ここではただ、この内容の分割と新概念の獲得という着想が、フレーゲにとって決して特異なものではないということ、すなわち、HPによる文脈的〈定義〉の場面において特別に持ち出されてきたものではないということのみを指摘したい。つまり、フレーゲの文の内容という観念[8]は、一般的に、多様な仕方での分割とそれによる新しい概念の形成というアイディアを許容するものなのである。

「2+3=5」という簡単な数式で考えてみよう。通常、この文（式）は「ある演算結果が数 5 に等しい」という内容を表現していると読まれるだろう。『概念記法』で提示された彼の洞察は、この読み方も多様な読み方のうちの一つにすぎない、ということだ。我々は、この文を構成する記号（数字、「+」、「=」）の理解から、この文全体の内容（真理条件）を把握する。だが、構成された式は多様な仕方で分析（分解、分割）可能であり、それに応じてその内容も分析できる。上の通常の読み方は、この式を「ξ＝ζ」という“関数”部分と「2+3」及び「5」という“項”部分に分析し、文全体の内容をその分析の観点から——すなわち、相等性（同一性）関係に立つ二つの数、という仕方で——捉えたものだ。他の仕方での分析、例えば「ξ= 5」という関数と「2+3」という項への分析も可能である。この場合、我々はこの文の内容を、2+3 という数が概念「5 に等しい」の下に属する、という事態の表現として捉えているのである。

この、項と関数への分析という着想が、彼独自の画期的な論理学の開発を可能にした、ということは周知のことだろう。そして、それと同時に彼は、この分析が概念形成の手段として用いられうる、と主張するのである(GLA88)。その“概念形成”は上の例でも既に現れている。上の文内容の把握に必要なのは、個々の記号が表示する数、演算（加法）、関係（同一性）についての理解だけだった。しかし、例えば二つめに見た分析では、我々の文理解の中に、概念「5 に等しい」が現れている。この概念についての理解は明らかに元の文の内容把握には必要なかったものだ。その意味でこの概念は我々にとって新しいものであり、それは文の分析によって形成されたものである。

このように、フレーゲにおける文の内容という観念は、合成により得られる全体の把握と、項ー関数分析による内容の捉え直しと新概念の形成、というダイナミックなプロセスを許容するものである。それゆえ、『基礎』64 節における、内容の分割と新概念の獲得という説明についても、この路線で考えればどうだろうか。ただし、ここには明らかな難点がある。HPにおける内容の分割は、上のような項ー関数分析の一事例ではないのである。項-関数分析による新概念の形成は、文に対する構文論的な操作に基づいている。すなわち、所与の文の一部を取り去って空所と見なし、例えば上の「ξ= 5」（空所部分をギリシャ文

字で示す）のように述語（関数部分）を形成する、という操作を文に対して施すことによって、その述語の表示する概念が獲得されるのである。一方、HPによる文脈的説明において想定されているのは、右辺の内容から出発し、左辺の構文論的ふるまいを基にその内容を分割し、数についての理解を得る、というプロセスであり、明らかに項ー関数分析におけるそれとは異なっている。上のような着想をそのままの形で適用することはできないだろう(9)。

だが、フレーゲの哲学の中にはこの路線以外に、文脈的〈定義〉における内容の分割という発想を理解可能にする観点はないように思われる。そして、私の見るところ、フレーゲの意味理解のモデルにおける、このダイナミックな側面はこれまで必ずしも十分な検討がなされてきたわけではない。また本論も確たる答えを持っているわけでもない。それゆえ、分析あるいは分割による新概念の形成という観点から、フレーゲの言語哲学を再検討し、そのアイディアを洗練させることで、HP による数の存在論の確立にもより強い正当化が与えられるのではないか、その見通しのみを提示することで、ひとまず本論を終えたいと思う。

8．おわりに

本論で検討してきた数の文脈的〈定義〉は、フレーゲの様々な洞察やアイディアが注ぎ込まれた試みである。数の応用可能性についての洞察があり、そこから生じた数の認知という問題は、文脈原理によって、数詞を含む再認言明の真理の認知という問題へ転換された。この問題転換にもかかわらず、実質をもった数の存在論を可能にするために、今度は HP の右辺の同値関係を左辺の同一性関係へと読み換える、内容の分割というアイディアが持ち出され、本論はその起源を、彼の論理学の根本洞察である項-関数分析に求めた。そして、この試みは重要な成果をもたらしうる。もし HP による文脈的〈説明〉によって数の存在が確立されうるならば、数についての我々の常識とも言える内容を表現した HP は同時に、そこから（自然数系列の無限性を含めた）算術の基本法則を導出できる、数学的にきわめて強力な原理となりうるのである。

本論では不問に付したシーザー問題のためにこの文脈的〈定義〉は却下され、外延の観念の導入によって、フレーゲはパラドクスへの道を進んでしまう。だが、HP の地点に留まるならば、我々はフレーゲからまだ多くのことを学びうると思われる。また、本論では、そのシーザー問題、及び、内容の分割の問題が未解決のものとして残った。今後の課題としたい。

註

(1) 以下、本書に限って「『基礎』」あるいは「GLA」と略記し、引用・参照箇所は、「GLA」の後に節番号を付すことで指示する。
(2) フレーゲの数学の哲学における、応用可能性についての洞察を強調する論者にはダメットがいる。本論も Dummett(1991, pp. 59-61, 255- 259) から多くを学んだ。
(3) 以下の文脈的〈定義〉の理解とその説明に関して本論はその多くを Wright(1983, chap. 1)に負っている。
(4) HP の右辺を現代の標準的な論理的表記法で表すと
「$\exists R[\forall x(Fx \rightarrow \exists_1 y(Rxy \wedge Gy)) \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists_1 x(Rxy \wedge Fx))]$」となる。
(5) この命名は Boolos(1990)によるものである。
(6) そのプロジェクトの全体像は Hale & Wright(2005)で把握できるだろう。またもちろん、Wright(1983)、Hale & Wright(2001)も参照。
(7) この節の以下の議論は、Wright(1983)に端を発した、C.ライト及び B.ヘイルの新論理主義陣営とダメットの論争を参考にまとめたものである。煩雑さを避けるため、参照箇所を一括して次に挙げる。Wright(1983, chap. 1)、Dummett(1991, pp167-176, 194-195)、Hale(1997, pp95-96)、Hale(1994)。
(8) 本論では、この内容という観念を、『基礎』の段階では導入されていない Sinn と Bedeutung の区別のうち、Sinn の領域に属するものと考えているが、より詳細な検討は必要である。また、Macbeth(2005)は、フレーゲの概念記法についての徹底的な探究を通して、その設計理念として、「思想（内容）の多様な分析の可能性」を摘出した。本論の以下の議論は、彼女の探究に触発されたものである。
(9) Dummett(1991, pp. 173-176)、Hale(1997, pp. 97-98)も、これら二つのアイディアに親近性を認めつつ、しかし両者の具体的な手続きの違いから、この路線を維持できないものと考えている。Macbeth(2005, pp. 156-166) は、HP における内容の分割を、ある条件の下での項－関数分析による概念形成の一事例と考える。その条件とは、適切な対象の存在（HP の場合は数）が存在する、という独立した理由を我々が持っているとき、すなわち文脈的〈定義〉に先立って問題の対象の存在が認められているとき、というものである。それゆえ、本論が検討しているような、数が存在するという、まさにその理由を与えようとする文脈的〈定義〉は、彼女の考えでは不可能だということになる。

文献

Boolos, G. (1990).'The Standard of Equality of Numbers', In Boolos, G. (Ed), *Meaning and method: in honor of Hilary Putnam*(pp. 261-77), Cambridge University Press, reprinted in Demopoulos (1995, pp. 234-254.)

Dummett, M. (1991). *Frege: Philosophy of Mathematics*, Duckworth.

Demopoulos, W. (Ed.) (1995). *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press.

Frege, G. (1884). *Die Glundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl,*. Wilhelm Koeber.
(2001, 三平正明・土屋俊・野本和幸訳, 『算術の基礎』, 野本和幸・土屋俊編『フレーゲ著作集 2 算術の基礎』所収, 勁草書房.)

Hale, B. (1994). 'Dummett's Critique of Wright's Attempt to Resuscitate Frege', *Philosophia Mathematica, 3*, 122-147, reprinted in Hale & Wright(2001, pp. 189-213).

――― (1997). '*Grundlagen* § 64', *Proceedings of the Aristotelian Society, 97*, 243-261, reprinted in Hale & Wright(2001, pp. 91-116).

Hale, B. & Wright, C. (2001). *The Reason's Proper Study - Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

――― (2005). 'Logicism in the Twenty-First Century', In Shapiro, S. (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*(pp. 166-202), Oxford University Press.

Macbeth, D. (2005). *Frege's Logic*, Harvard University Press.

Parsons, C. (1965). 'Frege's Theory of Numbers', In Black, M. (Ed.), *Philosophy in America*(pp. 180-203), Cornell University Press, reprented in Demopoulos(1995, pp. 182-210).

Wright, C.(1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen Universtiy Press.

〔哲学博士課程〕