放物型擬微分作用素の基本解の正値性について

大　塚　研　一

On the Positivity of Fundamental Solutions
for Parabolic Pseudodifferential Operators

Kenichi OTSUKA

Abstract: In this study, we will investigate the positivity of fundamental solutions for parabolic pseudodifferential operators. As for parabolic systems of differential operators, we have obtained the necessary and sufficient condition for the positivity of fundamental solutions. In case of pseudodifferential operators, we will show that the same condition is necessary for positivity. That is, the order of operators must be equal to or less than 2. We can prove this by the essentially same method used in the case of differential operators. However, this is not a sufficient condition for the positivity.

Key words: Positivity, Fundamental solution, Parabolic, Pseudodifferential operator

はじめに

良く知られているように，熱方程式の初期値問題

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j{}^2}u(t,x)=0 \quad (t>0, x\in R^n), \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases}$$

において，初期値 $u_0(x)$ が非負ならば，解 $u(t,x)$ も非負になる。これは，解 $u(t,x)$ が基本解 $E(t,x,y)=(4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x-y|^2/4t)$ を使って

$$u(t,x)=\int E(t,x,y)u_0(y)\,dy$$

と表される事を考慮すると，基本解が非負である事と同値な条件である。同様に，もっと一般の２階の放物型微分作用素についても，基本解が正値性を持つ事は古くから知られている。

筆者は以前の論文で，放物型微分作用素系（連立方程式）の基本解が正値性を持つための必要十分条件を示した[1)]。すなわち，

1．２階，

2．対角成分以外は０階，

3．その０階の係数は非負，

である。特に（1）のような単独方程式の場合には，条件１（２階であること）が必要十分条件とな

京都大学医療技術短期大学部一般教育（京都市左京区聖護院川原町53）
Division of General Education, College of Medical Technology, Kyoto University
1993年７月31日受付

る。

この論文では，微分作用素の拡張である擬微分作用素について，放物型で単独の場合に基本解が正値性を持つためには，「2階以下」が必要条件であることを示す。方法は微分作用素の場合と本質的には同じであるが，残念ながら十分性については微分作用素の時のようにすっきりとした結果は望めないように思える。

記 号 と 定 義

1．擬微分作用素

$p(x,\xi)$ を $2n$ 変数 $(x,\xi)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ の無限回微分可能な関数とするとき，$p(x,\xi)$ を表象とする擬微分作用素 $p(x,D)$ を

$$p(x,D)u(x)=(2\pi)^{-n}\int\exp(ix\xi)p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

と定義する。ここで，

$$\hat{u}(\xi)=\int\exp(-ix\xi)u(x)dx$$

は $u(x)$ のフーリエ変換である。

表象のクラスとしては種々のものが設定されているが，ここでは $S^m_{\rho,\delta}$ で考える。無限回微分可能な関数 $p(x,\xi)$ が $S^m_{\rho,\delta}$ $(m,\rho,\delta$ は実数，$0\leqq\delta<\rho\leqq1)$ に属する表象であるとは，任意の指数 α,β に対し定数 C が存在して，

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha}p(x,\xi)\right|\leqq C\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

が成立する事をいう。ここで，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，各 α_j は非負の整数，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n},\quad \langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},\quad |\xi|^2=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2$$

である（β も α と同様）。

フーリエ変換の性質により，係数が滑らかな m 階の微分作用素

$$\sum_{|\alpha|\leqq m}a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$$

は，表象 $\sum_{|\alpha|\leqq m}a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ の擬微分作用素とみなす事ができる。

2．基本解

$p(t,x,D)$を t を媒介変数とする擬微分作用素とするとき，$E(t,s,x,y)$ が $p(t,x,D)$ の基本解であるとは，十分に滑らかな関数 $u_0(x)$ に対し

$$u(t,x)=\int E(t,s,x,y)u_0(y)dy$$

で定義される $u(t,x)$ が初期値問題

$$(2)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)+p(t,x,D)u(t,x)=0 & (t>s, x\in R^n),\\ u(s,x)=u_0(x)\end{cases}$$

の解になる事である。

基本解が任意の点 (t,s,x,y) で負にならないとき，基本解が正値性を持つという。

3．その他

以下の文中で，C,C' 等はそのつど適当な定数を表すものとする。

主　定　理

$p(t,x,\xi)$ は t を止めるごとに $S^m_{\rho,\delta}$ に属する表象で，媒介変数 t について連続とする。次の仮定をおく。

(A-1)　$\overline{p(t,x,-\xi)}=p(t,x,\xi)$。

(A-2)　正の定数 ε,R が存在して，$|\xi|\geqq R$ を満たすすべての ξ に対し $p(t,x,\xi)$ の実部 $\mathrm{Re}\,p(t,x,\xi)$ が

$$\mathrm{Re}\,p(t,x,\xi)\geqq\varepsilon\langle\xi\rangle^m$$

を満たす。

(A-3)　η の m 次正斉次関数　$p_0(\eta)$ が存在して，

$$\lim_{t\to+0}\int_0^t p(\sigma,0,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma=p_0(\eta)$$

となる。

これらの仮定の下で，次の主定理が成立する。

定　理。

仮定 (A-1)～(A-3) の下で，$m>2$ のときは，$p(t,x,D)$ の基本解 $E(t,s,x,y)$ は正値性を持たない。

注　意。

1)　仮定 (A-1) は，初期値 $u_0(x)$ が実数値の時に解 $u(t,x)$ も実数値になるための条件であって，解の符号を考えるためには必要な条件である。

2)　仮定 (A-2) は，「一様強放物型」の条件である。もっと弱める事が望まれるが，ここでの証明は適用できなくなるように思われる。

3)　仮定 (A-3) は，主要部がはっきりしていれば，満たされる。例えば，

$$p(t,x,\xi)=p_1(t,x,\xi)+p_2(t,x,\xi)$$

と書けて，$p_1(t,x,\xi)$ は $|\xi|\geqq 1$ で ξ について m 次正斉次，かつ

$$p_2(t,x,\xi)|\xi|^{-m}\to 0\quad(|\xi|\to\infty)$$

のような場合である。

証　　明

1．基本解の構成と極限

Tsutsumi[2] により，もう少し弱い条件の下で，基本解が擬微分作用素の形で求められている。

すなわち，

命題 4.1。

以下の条件を満たす擬微分作用素 $e(t,s,x,D)$ が存在する。

1)　十分に滑らかな関数 $u_0(x)$ に対し

$$u(t,x)=e(t,s,x,D)u_0(x)$$

とおくと，$u(t,x)$ は初期値問題（2）の解である。

2） 十分大きな N に対して，

$$e(t,s,x,\xi)=\sum_{j=0}^{N}e_j(t,s,x,\xi)+(t-s)f_N(t,s,x,\xi),$$
$$e_j(t,s,x,\xi)=a_j(t,s,x,\xi)\exp\left(-\int_s^t p(\sigma,x,\xi)\,d\sigma\right)$$

と書く事ができて，次の評価を持つ。

$$a_0(t,s,x,\xi)\equiv 1,\quad |a_j(t,s,x,\xi)|\leqq C\langle\xi\rangle^{-(\rho-\delta)j}\omega_j,\quad |f_N(t,s,x,\xi)|\leqq C(t-s)\langle\xi\rangle^{2m-(\rho-\delta)(N+1)},$$

ここで

$$\omega_j=\max\{\omega^2,\omega^{2j}\},\quad \omega=\int_s^t \mathrm{Re}\,p(\sigma,x,\xi)\,d\sigma。$$

方程式の解 $u(t,x)$ が

$$u(t,x)=e(t,s,x,D)u_0(x)=(2\pi)^{-n}\int\exp(ix\xi)e(t,s,x,\xi)\hat{u}_0(\xi)\,d\xi$$
$$=(2\pi)^{-n}\iint\exp(i(x-y)\xi)e(t,s,x,\xi)u_0(y)\,dyd\xi$$

と表されるので，我々の基本解 $E(t,s,x,y)$ は，この $e(t,s,x,\xi)$ を用いて

$$E(t,s,x,y)=(2\pi)^{-n}\int\exp(i(x-y)\xi)e(t,s,x,\xi)\,d\xi$$

と表される。

命題4.2。

$$\lim_{t\to+0}t^{n/m}E(t,0,0,t^{1/m}y)=(2\pi)^{-n}\int\exp(-iy\eta)\exp(-p_0(\eta))\,d\eta$$

が成り立つ。ここで，$p_0(\eta)$ は仮定（**A-3**）のものである。

証　明。

命題4.1に従い，

$$t^{n/m}E(t,0,0,t^{1/m}y)=\sum_{j=0}^{N}E_j(t,y)+F_N(t,y),$$
$$E_j(t,y)=t^{n/m}(2\pi)^{-n}\int\exp(-it^{1/m}y\xi)e_j(t,0,0,\xi)\,d\xi$$
$$F_N(t,y)=t^{1+n/m}(2\pi)^{-n}\int\exp(-it^{1/m}y\xi)f_N(t,0,0,\xi)\,d\xi$$

と書き，それぞれの項を評価する。

まず，$F_N(t,y)$ については，命題4.1の評価により

$$|F_N(t,y)|\leqq Ct^{2+n/m}\int\langle\xi\rangle^{2m-(\rho-\delta)(N+1)}\,d\xi$$

となり，N が十分大なら積分は収束するので，

$$|F_N(t,y)|\leqq C't^{2+n/m}\to 0\quad(t\to+0)$$

である。

次に，$E_j(t,y)$ については，$t^{1/m}\xi=\eta$ とおくと，

$$E_j(t,y)=(2\pi)^{-n}\int\exp(-iy\eta)e_j(t,0,0,t^{-1/m}\eta)\,d\eta,$$

$$e_j(t,0,0,t^{-1/m}\eta)=a_j(t,0,0,t^{-1/m}\eta)\exp(-\int_0^t p(\sigma,0,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma)$$

となる。命題 4.1 から，$\gamma=\min\{2,(\rho-\delta)j/m\}$ に対し

$$\mathrm{Re}\int_0^t p(\sigma,0,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma\geqq\varepsilon|\eta|^m,\quad |a_j(t,0,0,t^{-1/m}\eta)|\leqq Ct^{\gamma}\langle\xi\rangle^{2m-(\rho-\delta)j}$$

となることが分かるので，$j\geqq1$ のとき

$$|E_j(t,y)|\leqq C't^{\gamma}\to0\quad(t\to+0)$$

となる。

最後に，$E_0(t,y)$ については，

$$|\exp(-\int_0^t p(\sigma,0,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma)|\leqq C\exp(-\varepsilon|\eta|^m)$$

と

$$\int_0^t p(\sigma,0,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma\to p_0(\eta)\quad(t\to+0)$$

とから，Lebesgue の定理により，

$$\begin{aligned}E_0(t,y)&=(2\pi)^{-n}\int\exp(-iy\eta)\exp(-\int_0^t p(\sigma,0,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma)\,d\eta\\&\to(2\pi)^{-n}\int\exp(-iy\eta)\exp(-p_0(\eta))\,d\eta\quad(t\to0)\end{aligned}$$

となり，命題が証明された。(証明終)

2．主定理の証明

命題4.2の極限関数を $E(y)$ とおくと，$E(y)$ は恒等的には0でない。一方，$p_0(\eta)$ が m 次正斉次関数だから，$m>2$ のとき

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j^2}\exp(-p_0(\eta))$$

の $\eta=0$ での値は0になる事が分かる。ところがフーリエ変換の性質から，この値は $\int|y|^2E(y)\,dy$ に等しい。すなわち，

$$\int|y|^2E(y)\,dy=0。$$

$E(y)$ は恒等的には0でないから，正の所も負の所も存在する。$E(y)$ の定義から，$E(t,0,0,t^{1/m}y)$ も，従って $E(t,s,x,y)$ も負の値をとる点が存在する。(証明終)

注　意。

仮定 (A-3) を，「ある s,x が存在して，

$$\lim_{t\to+0}\int_s^{s+t}p(\sigma,x,t^{-1/m}\eta)\,d\sigma=p_0(\eta)\ \text{となる」}$$

と一般化する事もできる。このとき，定理の証明には

$$\lim_{t\to+0}t^{n/m}E(s+t,s,t^{1/m}x,t^{1/m}y)$$

を考えれば良い。

十分条件について

もっとも簡単な，表象 $p(t,x,\xi)$ が ξ だけに依存する場合を考えてみる。この表象を $p(\xi)$ と書く事にすると，簡単な計算により

$$e(t,s,x,\xi)=\exp(-(t-s)p(\xi)),$$
$$E(t,s,x,\xi)=(2\pi)^{-n}\int\exp(i(x-y)\xi)\exp(-(t-s)p(\xi))\,d\xi,$$
$$E(y)=(2\pi)^{-n}\int\exp(-iy\eta)\exp(-p(\eta))\,d\eta$$

となる事が分かる。この $E(y)$ が正値性を持つための必要条件について，次のような結果がある（小松彦三郎[3)] §3.4)。

命題 5.1。

$E(y)$ が正値性を持つならば，すべての $\eta\in R^n$ について $\mathrm{Re}\,p(\eta)\geqq\mathrm{Re}\,p(0)$ が成立する。

例えば，$p(\xi)=|\xi|^2=\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2$ とすると，これは最初に述べた熱方程式を表すもので，基本解は正値性を持つ（$m\leqq2$)。ところが，この $p(\xi)$ の $|\xi|\leqq1$ の部分だけを変形して $\mathrm{Re}\,p(0)$ を大きくすると，命題5.1の条件を満たさなくなり，正値性が失われてしまう。微分作用素の場合その表象が ξ の多項式でなければならないので，このような変形は不可能であるが，擬微分作用素の範囲では可能である。このように，擬微分作用素の場合には，$m\leqq2$ であっても，正値性を持つかどうかは一般には判定できない。

文　　献

1) Otsuka K : On the Positivity of the Fundamental Solutions for Parabolic Systems. J Math Kyoto Univ 1988 ; 28 : 119-132

2) Tsutsumi C : The Fundamental Solution for a Degenerate Parabolic Pseudo-Differential Operator. Proc Japan Acad 1974 ; 50 : 11-15

3) 小松彦三郎 : Fourier 解析．小平邦彦監修，岩波講座基礎数学．東京 : 岩波書店，1978 : 164-171