氏名	池田勉 いけだ つとむ
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第885号
学位授与の日付	昭和60年1月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	Standing pulse-like solutions of a spatially aggregating population model (ある集中過程を含む個体群モデルのパルス状定常解)
論文調査委員	(主査) 教授 山口昌哉 教授 池部晃生 教授 溝畑 茂

論 文 内 容 の 要 旨

生物個体群の数理モデルの一つに個体群のパターン形成を数学的に説明しようとしてつくられた非線型微分積分方程式がある。この方程式は退化型の拡散項と生物の個体の求心本能よりくる集中過程をあらわす項とからなり、 u を時刻 t と位置 x の関数としての個体群密度として、次のように書ける。

$$u_t(x, t) = (u^m)_{xx}(x, t) + \left[u(x, t) \left\{ \int_{x-r}^x u(y, t) dy - \int_x^{x+r} u(y, t) dy \right\} \right]_x$$

ここで r は生物の認識範囲を示す正パラメーターであり、 m は1より大きな数である。

申請者はこの方程式の定常解について次のような結果を得た。ここで $\| \cdot \|_\infty$ は L^∞ ノルム、 $\| \cdot \|_1$ は L^1 ノルムをあらわすこととする。

定理 I (i) 上の方程式は $r^2 \|u\|_\infty^{2-m} \leq 2$ となるような0でない定常解をもたない。(ii) $F(m)$ を次のように定義する：

$F(m) = 2^{1-2/m} \int_0^1 \{\eta(1-\eta)\}^{-1/m} d\eta$ と、各正数 $q \geq F(m)^2$ に対して、上の方程式は $r^2 \|u\|_\infty^{2-m} = q$ であり、 u の台の長さが r 以下の0でない定常解を必ずもつ。この定常解は台の内部で正值であり台は連結である。このような定常解を申請者は Standing Solitary Pulse とよんだ。(iii) 関数 $u(x)$ が上の方程式の0でない定常解ならば、 $u(x)$ は上述の Standing Solitary Pulse によって展開できる。すなわち、

$$u(x) = \sum_{i \in A} u_i(x) \tag{1}$$

ここに $\{u_i\}_{i \in A}$ は次の条件をみたす有限又は可算無限個の Standing Solitary Pulse 列である：

$$\begin{cases} \sup_{i \in A} \|u_i\|_\infty < +\infty, \quad \sum_{i \in A} \|u_i\|_1 < +\infty \\ i \neq j, i, j \in A (u_i \text{ と } u_j \text{ の台の間の距離}) \geq r \end{cases} \tag{2}$$

逆に $\{u_i\}$ を(2)をみたす Standing Solitary Pulse の列とすれば(1)で定義される $u(x)$ は上の方程式の0でない定常解である。

更に $m=2$ の場合には更に詳しい次の結果が得られている。定理 II は次のように述べられる。

(i) $r^2 \leq 2$ ならば0以外に定常解をもたない。

(ii) $r^2 > 2$ のとき方程式は $u_r(0) = 1$ 且つ $u_r(x)$ は連続な偶関数という条件をみたす唯一つの Standing Solitary Pulse $u_r(x)$ を定常解としてもつ。この定常解 u_r の台はコンパクトであり、その長さを $s(r)$ としておく。一方関数 $u(x)$ が方程式の 0 でない定常解となるための必要十分条件は、上の Standing Solitary Pulse u_r 有限個又は可算個の平行移動からなるパルス列が定理 I の(2)の条件をみたしそれによって(1)のように展開できることである。 $u_r(x)$ と $s(r)$ は次の性質をもつ：

- (a) $u_r(x)$ は $(-\infty, 0)$ で単調非減少、 $s(r)$ は r の単調非増加連続関数、(b) $s(r) = \pi (r \geq \pi)$, $s(r) > \pi (r < \pi)$, $r^2 \rightarrow 2$ のとき $s(r)$ は増加して無限大となる。(c) $r \geq \pi$ ならば、 $u_r(x) = \cos x$, $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ (d) $r < \pi$ ならば $(-s(r)/2, s(r)/2)$ 上で $u_r(x)$ は C^2 級であるが C^3 級ではない。なお定理 I は定理 II とともに $r = \infty$ のときにも有効である。

論文審査の結果の要旨

申請者の主論文は集中過程を含む、非線型拡散方程式で表現された生物個体群のパターン形成についての数学的研究である。この種の方程式の研究が単独方程式であるにもかかわらず困難であった理由はこの方程式が非線型拡散項（密度依存の拡散）と集中過程をあらわす積分であらわされた移流項をもつ微分積分方程式であり、取扱いの手がかりが見出せなかったことによっている。特別な場合 $r=0$ の場合には、方程式は多孔物質中を拡散する流れの方程式となり、積分項は消えるので Aronson の数篇の論文となった。また $r=\infty$ の場合には、このモデルの提唱者三村・永井の結果があるが、このモデルとしては現実的な $0 < r < \infty$ の場合には、現在まで全く結果は無かった。申請者は $0 < r \leq \infty$ の場合について、定常解に関する限り、きわめて詳細な、大局的構造を含めた数学的研究をなしとげ大きくこの方面の研究を前進せしめた。得られた二つの定理の特色を次のようにまとめることができる。

- 1) 非自明な定常解の存在の条件を明示したこと。
- 2) 台が連結で台の内では正值な定常解を Standing Solitary Pulse となづけ、これを定常解の最小単位としてとりあげ、その存在の条件と、任意の非自明定常解はこのような Standing Solitary Pulse の列によって展開できることを示したこと。又逆にそのような展開ができる関数は定常解であることを示した。
- 3) $m=2$ の場合には更に詳細に上に述べた展開のための列は唯一つの特別な形の Standing Solitary Pulse の有限又は可算個の平行移動によって得られることを示した。
- 4) $m=2$ のときはパルスの間隔と大きさについて、正確な定量的結果を得ていること。
- 5) 証明の方法も新しく、たとえば 2 階の微分と、2 階の差分とのバランスを研究するなど独創的なところが多い。

上の結果はこの種のモデル方程式の解の性質としては、予想外の詳細なものであり、申請者の考察がきわめて徹底したものであったことを示している。

参考論文 1, 2, 3 は非線型偏微分方程式の差分化の研究であり、4, 5, 6 は申請者の得意とする移流項の加わった拡散方程式の差分化の研究であり、特に 6 は重要なモノグラフである。7 は主論文の離散化の研究であり、いずれも申請者の学識の深さを示すものである。

よって本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。