
 總 說

丸鋸刃の諸問題

—特に腰入れについて—

Some Problems of Circular Saw Blade

—Especially on Tensioning—

杉 原 彦 一

Hikoichi SUGIHARA

(木材物理第3研究室)

§1 は し が き

筆者はさきに帯鋸刃にかかる力について総説的、解説的な論をなした。¹⁾この度は丸鋸刃について同様の論をなしてみたい。

丸鋸刃に就て問題となる点は次節に於て述べるがこれを要するに、材質の問題、大いさ(直径と厚さとの関係)の問題、歯型の問題、挽材条件の問題、更に目立仕上の問題である。今ここに問題として特に論じてみたいと思うのはこの目立仕上の問題のうちで最も困難とされ科学的なメスの入れられなかつた腰入れの問題である。

所謂丸鋸の腰入れは古来目立職の秘術とされ、専ら経験と勘即ち修業によつて達成されて来たのであるが、それでは技術の進歩は望まれない。これが一般化即ち素人にも腰入れが簡単に出来るようにするためには、或はまた新しい腰入れの方法をみつけるためには、先ず丸鋸刃に作用する力とその及ぼす結果についての科学的な正しくくわしい解析が行なはれなければならない。

丸鋸刃とほゞ同じような条件の許にあるものとしてタービン翼車がある。この問題についてはすでに古く有名な STODOLA の研究²⁾があり、丸鋸刃について以下述べるような振動問題については FREUNDLICH が同じく30年も昔にタービン翼車について論じた所である。³⁾

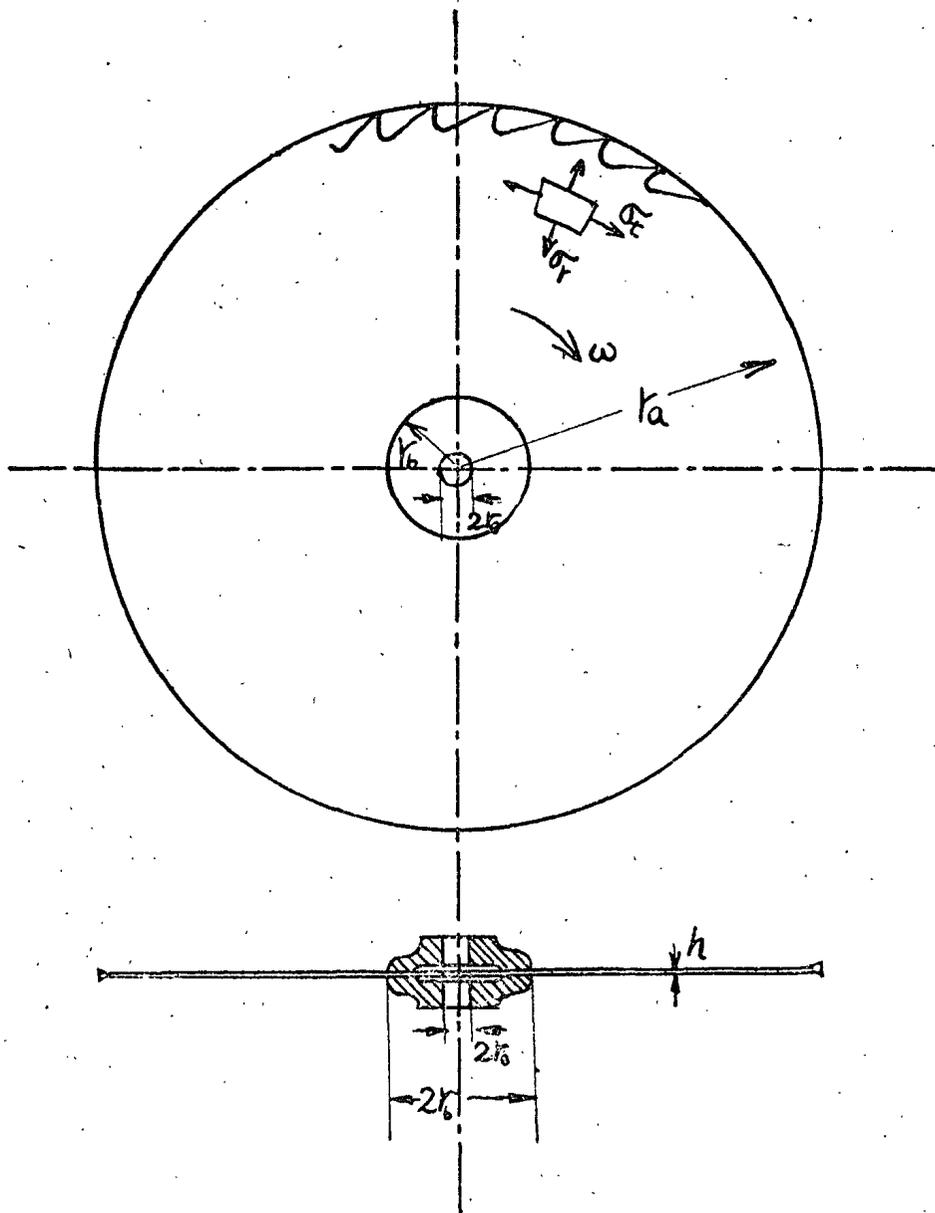
然るに丸鋸刃については最も困難な問題とされながらなぜ科学的な解析がなされ

なかつたのであろうか。最近に到つて漸く林 毅博士はこの問題を丸鋸について論
ぜられ⁴⁾、亦林業試験場の斎藤，仁賀氏等もこの問題に関して研究発表をされてい
る^{5) 6)}。

しかし林博士の論文⁴⁾副題にもある如く，回転円板の熱弾性撓屈の問題として甚
だ理論的で木材工業関係者にはすぐにのみこめない所が多いと思うので筆者はこの
報告を解説するような積りで本稿を進めて行こう。

問題をわかりやすく具体的にするために斎藤，仁賀氏⁵⁾が実験に使われた鋸を例に
とつて数値計算を行つて結果を示して行こう。即ち本稿の例で示す丸鋸刃の寸法，
常数，及び符号の意味は特にことわりなき限り次の如くである。

第 1 図



$r_a = 378\text{mm}$	刃の半径
$r_b = 76\text{mm}$	マンデュの半径 (マンデュの径を6吋とする)
$r_0 = 16\text{mm}$	軸孔半径
$h = 1.65\text{mm}$	刃の厚さ (16 B. W. G.)
$\gamma = 7.85\text{g/cm}^3$	鋼の密度
$\alpha = 11.0 \times 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$	鋼の線膨脹係数
$E = 21.0 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2$	鋼のヤング率
$\mu = 0.3$	鋼のポアソン比
$N = 1103 \text{ r.p.m.}$	刃の毎分回転数
$v = 44.0 \text{ m/s}$	刃の歯端速度
$\omega = v/r_a = 116 \text{ rad/s}$	回転角速度
$g = 9.80 \text{ m/s}^2$	重力の加速度
$t:$	刃の任意の点と外縁歯部との温度差 $^{\circ}\text{C}$
$\sigma_r:$	半径方向の応力 kg/mm^2
$\sigma_t:$	切線方向の応力 //
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$	刃 (円板) の曲げ剛性
$f:$	振動数 $1/\text{s}$
$p = 2\pi f$	振動率
$(r, \theta):$	刃の中心を原点とするときの極坐標
$\xi:$	半径方向の変位

§ 2 丸鋸刃の諸問題

a) 問題となる現象

丸鋸刃に於て問題となる諸点を現象として現われて来る面からみると刃の振動と摩屈及び挽肌不良の3つになると思う。以下しばらくこの3つを説明分析してみよう。

1) 刃の振動

刃の振動と言えは刃自体の横振動のことであるが、一般に刃が振れると言っている場合には軸の振動が混入していることがみのがされやすい、刃が振動して困るとよく言われるが原因は刃にあるのではなく機体に、そして軸受に対する取付方法に、また回転部分の不均衡による遠心力にあることが多いことは注意を要することである。

機体の構成、軸受の取付、刃の調整等が適当に行われておれば丸鋸の回転を如何に速くしても、丸鋸刃を一端に持つ軸の危険速度(固有振動数)に迫ることは殆んど考えられない、問題となるのは刃の横振動である。刃にかかる種々の周期力例えば挽材の際の歯端にかかる力等はこの横振動の固有振動数と関連し、そしてまた熱応力、遠心力によるこの固有振動数の変化と関連して種々の問題を生じるのである。この横振動が発展し次の挫屈の問題即ち腰入れの問題を起してくるのである。

2) 刃の挫屈

振動していないでスムーズに運転している刃でもいざ挽材を行つてみると挽けないで刃が焼けたり、挽曲つたり、刃の回転を停止せしめたりする。或は能率よく早い送り速度では挽材が出来ない、即ち挽曲りとか能率の低下とか、挽材不能と言う現象を生ずる。かかる場合一般に刃の腰入れがまずいと考えられる。これが刃の挫屈問題である。即ちかかる現象は腰入れが不適當であるため刃が挫屈を起すからであると考へられる。これについて検討を加えるのが本稿の主たる目的であるがその原因は一にかかつて切削仕事及び摩擦仕事によつて歯縁部に発生する熱のために回転円板たる丸鋸刃が熱弾性挫屈を起すからである、挽材条件の不適當、歯型の不良、刃の剛性の不足等を論外としても尙正常と考えられる切削仕事や摩擦仕事によつて生ずる熱に原因してこの挫屈が生じることがある。これに対する対策として従来腰入れが行われて来たものである。

3) 挽肌不良

挽材も能率よく挽曲りも生じないけれど製品品質がよくない、即ち挽肌の不良と言う現象がある。勿論これは実際には挽曲りとか、能率の低下とか先述の挫屈及び振動の問題と密接に関連して来るけれどもその直接原因として考えられる所は

イ) 刃の振動

ロ) 歯振の不揃い

ハ) 切削不良

である。イ) については既に述べたがロ), ハ) は次に述べる目立技術や歯型の問題となつて来る。

b) 諸問題への対策

a) に於ては現象として表われてくる側から問題をとりあげてみた。これ等に対しては勿論今までに種々の根本的或は二次的な種々の手段がとられて来ている。それでこの諸問題への対策, 手段と言う側から問題をながめてみよう。これは大きく5つに分れると思う。即ち目立仕上, 歯型, 刃の大きさ, 挽材条件, 材質がこれである。

1) 目立仕上

目立仕上は更に

イ) 歯先研磨

ロ) 歯振出し

ハ) 腰入れ

の3つに分れる。即ちイ) 歯先研磨は目立機の問題であり, 現在丸鋸の目立は主として手動にて行われているがこれは次の歯振出しと共に精度の点がおろそかになされ勝ちで注意を要する。^{7). 8). 9).} 一般に鋸刃の歯の理論的切込量は0.1mm前後であるから目立の精度もこの数値を基準にして考えなければならない。こうした見方をすると最近外国に於て登場しつつあるやに思われる数個の歯しかもたない丸鋸と言うものが首肯される。即ち役にも立たない数多くの歯を数十個も出鱈目の目立をするよりも数個の歯を正確に充分目立をする方がよいではないかと言うことである。またこれ等の精度が挽肌に及ぼす影響は想像に難くない。

然し何んと言つても丸鋸で問題となるのは腰入れである, §1 はしがきに於ても述べた如く現在の方式は秘術とさへ言われる域にある。何か新しい劃期的な方法はないであろうか。

2) 歯型

歯型の問題は歯先の角度, 歯室面積, 歯の強度, 歯数これらが互に相関連して問

題となる、そしてこれらの因子が挽材動力、鋸屑の排除、従つて発生する熱を左右し、挫屈の問題を左右するのである。歯型の問題は切削抵抗、鋸屑排除、歯の強度と言う点より研究されねばならない。

3) 刃の大きさ

これは刃の半径に対して厚さを如何にするか、即ち剛性を如何にするかと言う問題であり換言すれば現在やかましく言われている薄鋸の問題である。この剛性の問題は次節以下に述べる如く直接にまた間接には挽材条件をとおして挫屈に関係する問題である。

4) 挽材条件

これは回転数、従つて歯端速度また送り速度、挽巾、挽材位置を如何にすべきかと言う問題であり、仕事の能率、製品品質に対する要求と鋸刃の技術的制約との調和の問題である。

5) 刃の材質

これは刃を使用する我々の側から刃の製造者、冶金学への注文である。そしてこれは大体相反撥する要求が同時になされるのが常である。例えば刃は耐摩耗性があり且靱性がなければならない。即ち度々の目立は作業能率を下げるから耐摩耗性は高くなければならぬ、しかし一方に於て切削は衝撃的な速さで行なはれるし、歯先は歯振出し加工を行わねばならないから靱性が必要である。而して一般に耐摩耗性は硬度を上げることによつて得られ、硬度を上げれば靱性は低下する。

かくの如き我々の側から提出する材質への要求は、我々が材質の改良を行うのではないけれども、科学的に検討され、充分正確に分析整理されているであろうか。冶金、製造の分野へ要求する前にその要求を我々はよく検討しなければならない、即ち例えば挫屈の起らない材質の刃を造つてくれと言う要求であつてはならない。挫屈はこう言う条件のもとに、刃のこう言う性質の為に起る故にかかる性質のない、しかもしかじかの性質をそなえた刃がほしい、そしてその諸性質は如何なる順位に大切であるかを述べて要求しなければならない。

§ 3 腰 入 れ と は

従来丸鋸の腰入れについてはすべて次の如く説明されて来た。"丸鋸は鋸断に際し摩擦熱のためまた遠心力により齒縁が伸びると考えられる。これに対処して予め鋸身の中央部分を伸ばす仕事が丸鋸の腰入作業である"と。

甚だ巧妙な説明でなるほどと理窟がわかつたように思つて感心するけれどもこの説明はごまかしである。なぜならばこの説明によれば摩擦熱のためにそしてまた遠心力のために齒縁部が伸び鋸が不安定となり振動を生じ、遂に挫屈現象を起すに到り挽材に耐えなくなるからあらかじめ中央部を延しておいて、即ち腰入れを行つて、齒縁部が伸びたとき丁度釣合つて安定し振動、挫屈を防ぐから挽材を続行することが出来るのであると言うことになる。しかしながら後で明らかにする如く熱のため刃は外縁で伸びようとするけれども内部の抵抗のため伸びられない、ために内部に引張力を与えその反作用として外縁部に圧縮力を生じそのために挫屈を起すのであり、遠心力が大なれば大なるほど、即ち高速回転を行うほど刃は安定となり振動（刃の横振動）は減少して行くのである。しかるにこの説明によれば遠心力が大なるほど腰入れの必要が大となる、即ち挫屈を起しやすくなると言うように解されるからである。

結論を先に言うならば林博士が証明されている如く遠心力は鋸を安定させる作用をなし、また、TIMOSHENKO¹⁰⁾も述べている如く遠心力は撓みに対して抵抗を与え、その結果として刃の固有振動数が増加するのである。鋸に挫屈を起さしめる原因は専ら切削仕事及び摩擦によつて発生する熱が刃に温度勾配を生ぜしめこれにより生ずる熱応力のためである。

腰入れと言う操作は一にかかつて此の熱応力を打消す或は少なくするのが目的である。従つてまた丸鋸の挫屈を防止する根本的な対策は鋸刃の温度分布を均一ならしめる或は温度勾配をなくすることに向けられるべきである。しかし直接に温度分布を均一にすることを考えずに第二次的手段として熱応力を打消すような固有応力を腰入れ作業によつてあらかじめ与えておくと言う手段即ち、腰入れを現在まで取つて来ているのである。

新しい腰入れ法——丸鋸刃の挫屈防止の方法はこの温度分布の勾配をなくすると言う根本対策から考えられねばならないと思う。かかる観点より"注水"と言うこと

即ち冷却或は逆に温水をかける等「加熱」と言うことが考え直されてもよいと考える。

以下挫屈について振動と連関しつつ腰入れを論じて行こう。

§ 4 挫 屈 (Buckling) と は

前節 § 3 に於て腰入れとは回転円板の熱応力による挫屈を防ぐための予防手段であると述べた。挫屈現象を起せばもはや鋸刃は平面の円板として回転せず、三次元的変形をなし即ち盆のように凹んだり、或はしわがよつたような波を打つた形状となり挽材に耐えなくなるからである。しからば一体挫屈とはどんな現象であろうか。

一般に挫屈と言う現象は次の如く説明されている。或材に或力を加えると一定の変形を起す。加える力を漸次増せばそれに応じて変形は大となつて行く。所が材の形状、力の加え方によつてはその加える力が或る大きさに達するとそれ迄の変形とは全然様子の變つた変形即ち異種の変形に突然移行する。この現象を挫屈と言いつこの時の力を挫屈荷重と言う。

丸鋸の場合もこの挫屈現象が前述の如く熱応力のために起るのである。即ち如何によくバランスがとれた振動のない刃でも挽材を行つて切削熱や摩擦熱が生じ熱応力が大となつて或程度まで来ると、それまで平面的に伸び或は縮みしていたものが急に別の種類の変形即ち刃が皿のように凹んだり或は波形をしたりするに到るのである。

この円板の挫屈問題については、円板が回転せず唯内圧或は外圧を受ける場合の種々な支持条件に対する研究結果が「弾性安定要覽」¹¹⁾に集録されている。

また円板が回転している場合、即ち遠心力を考慮した場合の振動問題については古く SOUTHWELL 等の研究がある。^{12) 13)} しかしこの研究では熱応力には全然ふれていない。円板の熱応力について論じたものには STODOLA ²⁾、及び NADAI ¹⁴⁾の研究がある。しかしこれらは回転を考慮に入れていない。

回転円板で熱応力を考慮に入れて論じたものはわずかにタービン翼車についての J.von FREUNDLICH ³⁾、のものがあるにすぎない。丸鋸について論じたものは今までなかつたが最近丸鋸刃の挫屈についてこれと腰入れとの関係を論ぜられた林博

士の研究¹⁴⁾が発表された。

林博士は妹沢博士の振動法¹⁴⁾と RAYLEIGH のエネルギー法¹⁶⁾とを併用してこの問題を解いて居られる。而して丸鋸の挫屈と振動とは共に深い関係にあるから挫屈問題を論ずる順序として振動の問題から述べて行こう。

§ 5 丸鋸刃の振動について

刃の振動には今此所に述べようとする刃の横振動の外に前述した如く、機体及び軸受の振動、更に軸の振動が入交ってくる。回転数を大にすればするほど大きくなって行くのはこの種の振動であり、横振動は逆に減少し安定して行くことは先述の通りである。刃の挫屈従つて腰入れにつながるものは横振動である。この事は注意されねばならない。

刃の横振動は弾性体としての円板が中心に於て或る半径で固定されて回転している場合の振動問題として取扱いうる。我々の目的とする挫屈、腰入れの問題も見方によつては林博士の取扱われたように、この横振動の特別な場合と考えられるのである。

妹沢博士の振動法によれば挫屈荷重の決定法として、その物体の微小撓み振動を考へて、その固有振動の週期が無限大即ち変形が復元しない、換言すれば振動数が 0 となるときの応力状態が即ち挫屈荷重であるとするのであるから、次節にのべる種々の力による応力状態を求め、かかる状態にある円板の固有振動数を計算し、これが 0 となる条件を入れるとそのような応力状態従つて挫屈荷重を知りうるわけである。

この固有振動数は振動の型即ち変形の状態と板の剛性と応力状態によつて決定されるものであり、従つて円板の応力分布がわかっているときは、変形を周辺条件を満足するように仮定して RAYLEIGH のエネルギー法によつて決定することが出来る。

今或る力学系に於て其の系の運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを U とすれば、 C を定数として

$$T + U = C \dots\dots\dots (1)$$

なることはよく知られている。しかるに振動系に於ては振幅最大なる位置に於て $T=0$ となるから、このとき U は最大で $U=U_{max}=C$ となる。同様に $U=0$ のとき T は最大 $T_{max}=C$ となる。従つて (1) より

$$T_{max} = U_{max} \dots\dots\dots (2)$$

我々が今考へている丸鋸に於てはポテンシャルエネルギー U は変形のエネルギー U_1 と遠心力及び熱応力に抗してなす変形仕事に相当するエネルギー U_2 とよりなると考えられる。従つて

$$(U_1)_{max} + (U_2)_{max} = T_{max} \dots\dots\dots (3)$$

今円板の撓み即ち V を

$$V = V_0(r, \theta) \cos pt \dots\dots\dots (4)$$

とする。ここに t は時間を、 p は最初にのべた如く振動率で $p=f/2\pi$ 、 V_0 は r, θ の函数として変形を表わす函数である。しかるときは (例えば文献 10 参照)。

$$\begin{aligned} T &= \int_{r_b}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{r}{g} \cdot h \cdot r \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{r h}{g} \cdot p^2 \int_{r_b}^{r_a} \int_0^{2\pi} r \cdot v_0^2 \sin^2 pt dr d\theta \end{aligned}$$

故に

$$T_{max} = \frac{1}{2} \frac{r}{g} h \cdot p^2 \int_{r_b}^{r_a} \int_0^{2\pi} v_0^2 r d\theta dr \dots\dots\dots (5)$$

次に

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_b}^{r_a} \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \right)^2 \right\} \right] r d\theta dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (U_1)_{max} &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_b}^{r_a} \left[\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right] \right)^2 \right\} \right] r d\theta \cdot dr \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

同様に

$$(U_2)_{max} = \frac{h}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_b}^{r_a} \left\{ \sigma_r \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} \right)^2 + \sigma_t \left(\frac{\partial v_0}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r d\theta \cdot dr \dots\dots\dots (7)$$

従つて(3)式に(5), (6), (7)を入れることにより

$$p^2 = \frac{(U_1)_{max} + (U_2)_{max}}{\frac{1}{2} \frac{r}{g} h \int_0^{2\pi} \int_{r_a}^{r_b} v_0^2 r d\theta dr} \dots\dots\dots (8)$$

をうる。この(8)より p 従つて固有振動数 f を求めることが出来る。

しかしそのためには(5), (6), (7)が計算出来ること即ち $V_0(r, \theta)$ と σ_r, σ_t を知ることが必要である。換言すれば振動の変形状態と応力状態を知らねばならない。

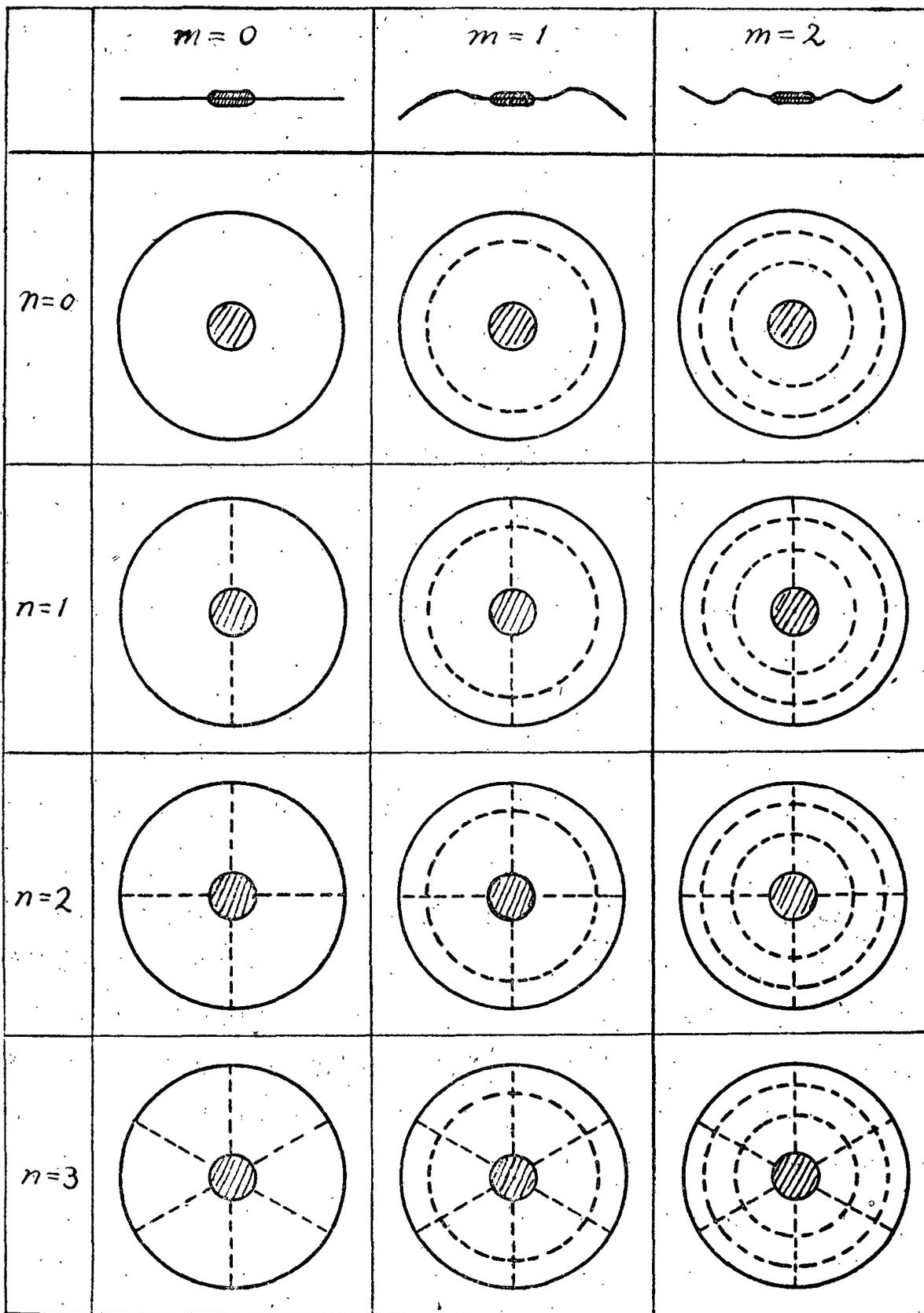
円板は種々なる振動の型をもっているがこれらの振動型は次の2つに大別することが出来る。

- 1) 中心に関して対称であり、同心円の形の節線即ち節円を持つ振動 (第2図第1列) 節円の数を m とする。
- 2) 直径を節線として持つ即ち節直径を有する非対称振動 (第2図第1行) 節直径の数を n とする。

実験の結果によれば、対称型の振動即ち節円を有する振動は起ることが甚だ稀である。¹⁰⁾これは節円を有する型の振動の振動数が一般に節直径を有する型の振動数よりも大で¹³⁾そのような振動を起すには多大のエネルギー源を必要とするからである。作用する周期力の振動数がこれらの各型の固有振動数と一致するとき共振して大なる振動となるのであるが、一般に作用する周期力を調和解析したとき問題を起すような大きな力はすべて低次の周期を有するものであるから、先ず問題となるような振動は最低の固有振動数を有する型の振動となる。

従つて我々もまた丸鋸刃の振動に於て特に挫屈を考える場合には節直径を有する型の振動のみを考えることにしよう。且 $n = 3$ までを考えれば充分と思われる。

第 2 圖



林博士は中心点で固定された ($r_0, r_0 \rightarrow 0$) 回転円板の振動型を即ち変形を境界条件 (中心固定, 周辺自由) を満足するように, そして節直径の数を n として

$$v = v_0(r, \theta) \sin pt$$

$$= a (r/r_a)^2 \left(1 + c_1 \frac{r}{r_a} + c_2 \frac{r^2}{r_a^2} \right) \cos n\theta \cdot \sin pt \dots\dots\dots (9)$$

即ち $v_0 = a (r/r_a)^2 \left(1 + c_1 \frac{r}{r_a} + c_2 \frac{r^2}{r_a^2} \right) \cos n\theta$

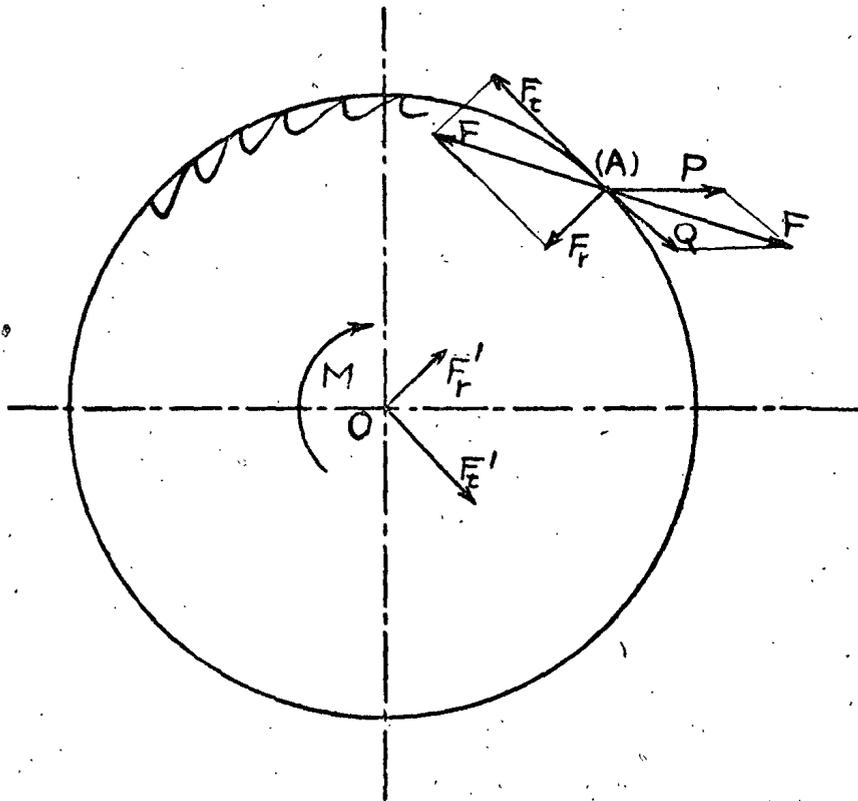
と仮定して計算を行われた。筆者もこれにならおう。

次に応力分布の状態を求めてみよう

§ 6 鋸刃に作用する力と振動

丸鋸刃に作用する力として考えられるのは, 回転により生じる遠心力, 材を挽くために生じる切削力, 材を切り込ますための送り力, 更に発生する熱のために生じる熱応力である。

第 3 図



a) 切削力と送り力
 切削力や送り力は実際には一点に作用するものでなく刃の円周の相当部分にわたって分布して作用するものであるが, 今は簡単のため一点 A に集中して作用するものとする。切削力 Q と送り力 P との合力 F を切線方向の力 F_t と法線方向の力 F_r とにわけて考える

ならば, この F_t と F_r に釣合うものは中心に働くと考えて (実際には $r = r_0$ なる円周

上に分布して働くが) これを F'_t, F'_r なる反力及び $F_r r_a = M$ なるモーメントとする。かかる状態にあるときの円板の応力状態については (F_t と M 及び F'_t)、(F_r と F'_r) の夫々の場合に分けて古く MICHELL が平面応力問題として解いている。

しかしこの値は大変小さい。例えば例題に於て30吋の丸鋸の所要動力として常識的に考えられる7.5 HPをとるならば、空転のための所要馬力を2.5 HPと見て周速44m/sとすれば F_t の最大は (F_r による軸受の摩擦損を無視しても)

$$(7.5 - 2.5) \times 75 = F_t \cdot 44$$

より F_t の最大は6.8kgとなり、大体の見当として F_t は7kgまでと考えられるから、これより MICHELL の与えた式より各部の応力を求めるとA点やO点の特異な点をのぞけば殆んど問題にならない大いさとなる。

従つて切削力及び送り力が刃の応力状態に及ぼす影響は無視してよいと考えられる。勿論無理な送り力を与えたり或は発熱のため今將に挫屈を起さんと言うような状態になつているときにはそれ自体としては小でも大きな役目をはたすことにはなる。

b) 遠心力のみを考えた場合

遠心力によつて円板内に生じる応力及び半径方向の変位 ξ は周知の如く

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3+\mu}{8} \frac{r}{g} \omega^2 r^2 + b_1 + \frac{b_2}{r^2} \\ \sigma_t &= -\frac{1+3\mu}{8} \frac{r}{g} \omega^2 r^2 + b_1 - \frac{b_2}{r^2} \\ \xi &= \frac{r}{E} \left\{ -\frac{1-\mu^2}{8} \frac{r}{g} \omega^2 r^2 + (1-\mu) b_1 - (1+\mu) \frac{b_2}{r^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

である。 b_1, b_2 は周辺条件より定まる定数である。我々の場合この周辺条件として次の2つを取ろう。

$$\left. \begin{aligned} r = r_a : \sigma_r &= 0 \\ r = r_b : \xi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$r = r_b$ で $\xi = 0$ と言う条件は厳密には成立しない。何となれば固定しているマンチューそれ自体やはり遠心力のため変位を起すからである、しかしその変位は刃が自由なときの $r = r_b$ に於ける変位に比して無視しうるほど小であるから近似的に(11)

の条件が成立つとみてよいと考えられる。

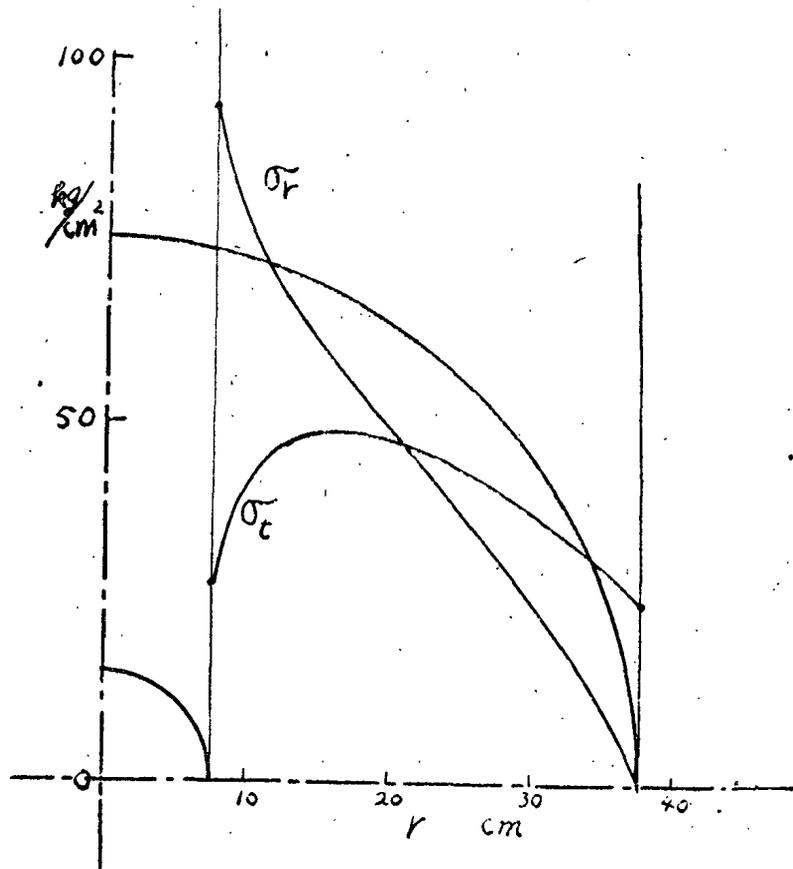
(11) の条件によつて b_1, b_2 を定めると (10) 式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{8} \frac{r}{g} \omega^2 \left\{ -(3+\mu)r^2 + (1+\mu) \frac{(3+\mu)r_a^4 + (1-\mu)r_b^4}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} + (1-\mu) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} \frac{(3+\mu)r_a^2 - (1+\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \right\} \\ \sigma_t &= \frac{1}{8} \frac{r}{g} \omega^2 \left\{ -(1+3\mu)r^2 + (1+\mu) \frac{(3+\mu)r_a^4 + (1-\mu)r_b^4}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} - (1-\mu) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r_a^2 r_b^2}{r^2} \frac{(3+\mu)r_a^2 - (1+\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)'$$

第 4 図

となる。これによつて例題の σ_t, σ_r を計算すれば第 4 図の如くなる。周辺条件により応力状態が非常に異なることがわかる。⁵⁾

遠心力が円板の撓みに対して抵抗を与え円板の固有振動数を増加せしめることは先にも述べたが、今極端な場合として全然剛性がない物体（ゴム等はこれに近い）を考えると振動中の変形の復元力は遠心力のみによるものでこの場の p を p_1 とすれば(8)より



$$p_1^2 = \frac{(U_2)_{max}}{2\pi r_a} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{r}{g} h \int_0^{r_b} \int_{r_b} r v_0^2 dr d\theta$$

を得る。

而してこの場合の厳密解は SOUTHWELL が文献(13)に与えている。それによればこの場合固定する円の大きさには無関係で（但し境界条件は少し異なる。 $\xi \neq 0$ である）

$$p_1^2 = \lambda \omega^2 \dots\dots\dots (12)'$$

で、 λ は第1表の如くである。

第 1 表 λ の値

	n=0	n=1	n=2	n=3
m=0	—	1	2.35	4.05
m=1	3.3	5.95	8.95	12.3

例題のディメンジョンを入れて p_1^2 を夫々第1表に対応して求めると第2表の如くなる。

第 2 表 $p_1^2 \times 10^{-4}$ の値

	n=0	n=1	n=2	n=3
m=0	—	1.345	3.16	5.46
m=1	4.44	8.00	12.05	16.5

これよりすれば例題の刃の寸法で最小の固有振動数 ($n=1$ $m=0$) でも $f_1 = 18.5$ 1/s となる。因に歯数を80とすれば理想的な場合歯が切込む回数は 1470 1/s である。また刃の回転数は 18.4 1/s である。

c) 曲げ剛性のみを考えた場合

回転せず静止している円板の固有振動数は曲げ剛性のみにより定まる。即ち $\sigma_r = \sigma_t = 0$ であるから(7)式に於て

$$(U_2)_{max} = 0$$

従つてこの場合の p を p_2 とすれば(8)より

$$p_2^2 = \frac{(U_1)_{max}}{2\pi r_a} \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{r}{g} h \int_0^r \int_{r_b} v_0^2 r d\theta dr$$

となる。

而してこの場合についても SOUTHWELL は次の如き厳密解を与えている。

$$p_2^2 = \nu \frac{Dg}{hr_a^4 r} \dots\dots\dots (13)$$

ν は中心 1 点で固定したと考えた場合には第 3 表の如くなる。

第 3 表 ν の 値

	n=0	n=1	n=2	n=3
m=0	14.1	—	29.0	156
m=1	438	422	1210	2840

これより例題の刃について p_2^2 を計算すれば、第 4 表の如くなる。

第 4 表 $p_2^2 \times 10^{-4}$

	n=0	n=1	n=2	n=3
m=0	0.451	—	0.927	4.99
m=1	14.0	13.5	38.7	90.8

第 3 表に於て 'n=1, m=0' の所の ν が与えられていないのは、中心 1 点で固定したと考える場合にはそのような振動は存在しないことになるからであるが、実際問題としてかかることはありえないから、これに極くわずかでも固定円周を認めるならば、 $\nu = 2.87$ となる。

SOUTHWELL は更に固定円の半径の大いさの p^2 に及ぼす影響を論じている。これによつて我々の $r_b/r_a = 0.2$ の場合を $m = 0$ の場合について示せば次の如くなる。

第 5 表 $p_2^2 \times 10^{-4}$ (図上より読みとつた大体の値)

	n=0	n=1	n=2	n=3
m=0	0.82	0.68	1.45	6.0

従つて例題の丸鋸を静止させた状態での固有振動数は最低の $n = 1, m = 0$ の場合で $f_2 = 131/s$ となる。

さて回転円板の固有振動数 p は以上(8)と(11)、(12)とより

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \dots\dots\dots (14)$$

しかるに p_1^2, p_2^2 は一方厳密解として(11)'、(12)'によつてあたえられるから(12)'と(13)'を(14)に用いて p^2 、従つて振動数 f を求めることが出来る。

これを例題について示せば、例題の丸鋸刃が腰入れもせず、また挽材もしていない状態で唯回転している場合の p は第6表の如くである。但し境界条件は少し異なる。即ち SOUTHWELL の解では固定円(マンチュー)は刃の横方向の変位 (V_0) を許さないのみとしている ($r=r_0 : V_0=0$) に対し本稿では更に $\xi = 0$ と言う条件を加えている。

第 6 表 $p^2 \times 10^{-4}$

	n=0	n=1	n=2	n=3
m=0	1.48*	2.03	4.61	11.5

* $m=0, n=0$ の場合の p_1^2 を与える振動は存在しない。したがつて p_1^2 の厳密解を得ないからこの値を厳密には与え得ない。しかし後述の(14)'式に於ける p^2 を示す式に於ける λ の値を採用すれば近似的に求めうる。よつて本稿では文献(4)の値 $\lambda = 0.488$ をとり $p_1'^2 = 0.66 \times 10^4$ を用いた。

これより最低の固有振動数は $n=0, m=0$ の型で $f = 201/s$ となる。従つて一分間の振動数は約 1200 である。

しかしながら(12)', (13)'のように厳密解が求まらないときは(12), (13)に於て V_0 を適当に仮定してこれを V_{01}, V_{02} としこの V_{01}, V_{02} を用いて(12), (13)より夫々 p_1^2, p_2^2 に相当する $p_1'^2, p_2'^2$ を求めるとやはり近似的に

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= p_1'^2 + p_2'^2 \\ \text{但し } p^2 &> p_1'^2 + p_2'^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)'$$

より p^2 を求める。そして更にくわしくやるためには(8)式の V_0 を仮定して V_{03} とし

これより p を近似的に p' として求めると

$$\left. \begin{array}{l} p'^2 = p^2 \\ p'^2 > p^2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。¹⁸⁾ 従つて

$$p'^2 > p^2 > p_1'^2 + p_2'^2 \dots\dots\dots (16)$$

より、一層くわしく p^2 の値を推定しうる。

d) 熱 応 力

温度分布が軸対称で、半径方向にのみ変化するとして温度差分布函数 t を

$$t = t_0 \left(\frac{r - r_b}{r_a - r_b} \right)^k \dots\dots\dots (17)$$

と仮定しよう。ここに t_0 は外周 ($r=r_a$) と内周 ($r=r_b$) とに於ける温度差である。

実験結果によれば^{5), 6)} $k = 2$ が近似的に成立している。

熱応力を示す式は円板の場合^{19) 20)}

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r = - \frac{\alpha E}{r^2} \int r t dr + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_t = \frac{\alpha E}{r^2} \int r t dr + C_1 - \frac{C_2}{r^2} - E \alpha t \\ \xi = \frac{1+\mu}{r} \alpha \int t r dr + \frac{1-\mu}{E} r C_1 - \frac{(1+\mu)}{E} \frac{C_2}{r} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここに C_1, C_2 は周辺条件によつて定まる常数である。

周辺条件としては我々は遠心力の場合と同じ条件をとろう即ち

$$\left. \begin{array}{l} r = r_a : \sigma_r = 0 \\ r = r_b : \xi = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

この場合もやはり、 $r=r_b$ で $\xi = 0$ と言う条件は厳密には成立しない。なぜならマ
ンヂューそのものが全然熱膨脹を起さないとは考えられないからである。しかしそ
れは非常に小で刃のそれに対して殆ど問題とならないから (19) なる周辺条件を採
用して差与えないと考える。

(19) なる条件によつて (18) 式の C_1, C_2 を決定すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma E}{r^2} \left[- \int_{r_a}^r t r dr + \frac{(1+\mu)r^2 + (1-\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \int_{r_b}^{r_a} t r dr \right] \\ \sigma_t &= \frac{\sigma E}{r^2} \left[\int_{r_a}^r t r dr + \frac{(1+\mu)r^2 - (1-\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \int_{r_b}^{r_a} t r dr \right] - \sigma E t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)'$$

を得る。これに (17) を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma E t_0}{r^2} \left[- \left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right)^k \left\{ \frac{(r-r_b)^2}{k+2} + \frac{(r-r_b)r_b}{k+1} \right\} + \frac{(1+\mu)r^2 + (1-\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{(r_a-r_b)^2}{k+2} + \frac{(r_a-r_b)r_b}{k+1} \right\} \right] \\ \sigma_t &= \frac{\sigma E t_0}{r^2} \left[\left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right)^k \left\{ \frac{(r-r_b)^2}{k+2} + \frac{(r-r_b)r_b}{k+1} - r^2 \right\} + \frac{(1+\mu)r^2 - (1-\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{(r_a-r_b)^2}{k+2} + \frac{(r_a-r_b)r_b}{k+1} \right\} \right] \end{aligned} \right\} (18)''$$

となる。この (18)'' 式を用いて $t_0=20^\circ\text{C}$, $k=2$ なる場合を計算した結果が一第5図の実線でしめしたものである。

次に温度分布の式を、中心の方が高く外周部分で低い場合として

$$t = t_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right)^k \right\} \dots\dots\dots (17)'$$

と仮定すれば (18)' は

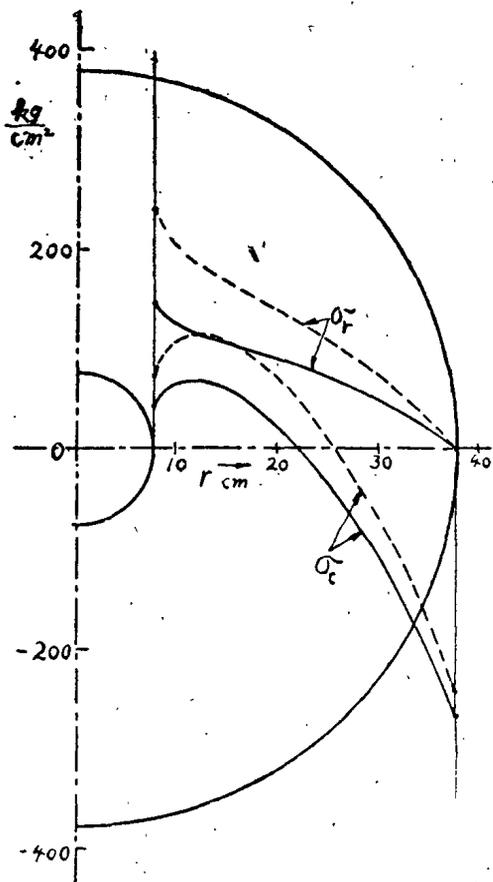
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma E t_0}{r^2} \left[- \frac{1}{2} (r^2 - r_b^2) + \left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right)^k \left\{ \frac{(r-r_b)^2}{k+2} + \frac{(r-r_b)r_b}{k+1} \right\} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1+\mu)r^2 + (1-\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \left\{ \frac{1}{2} (r_a^2 - r_b^2) - \frac{(r_a-r_b)^2}{k+2} - \frac{(r_a-r_b)r_b}{k+1} \right\} \right] \\ \sigma_t &= \frac{\sigma E t_0}{r^2} \left[\frac{1}{2} (r^2 - r_b^2) - r^2 - \left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right)^k \left\{ \frac{(r-r_b)^2}{k+2} + \frac{(r-r_b)r_b}{k+1} - r^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\mu)r^2 - (1-\mu)r_b^2}{(1+\mu)r_a^2 + (1-\mu)r_b^2} \left\{ \frac{1}{2} (r_a^2 - r_b^2) - \frac{(r_a-r_b)^2}{k+2} - \frac{(r_a-r_b)r_b}{k+1} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)'''$$

となる。この (18)''' 式を用いて $t_0=20^\circ\text{C}$, $k=4$ なる場合を計算した結果が第6図の実線である。

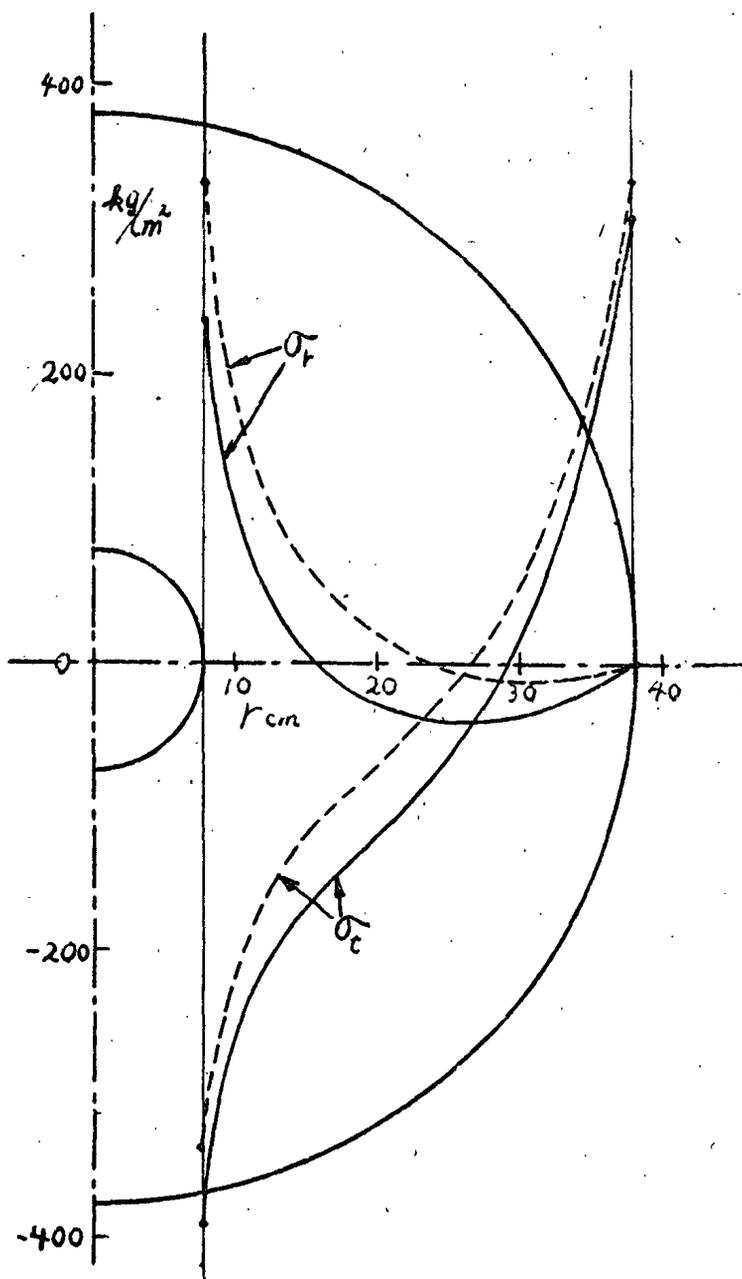
第4図と第5図、第6図の実線を加えたものが第5図及び第6図の点線である。即ち、第5図、第6図の点線は遠心力及び熱応力を考慮した場合の応力分布状態を

示す。

第 5 図

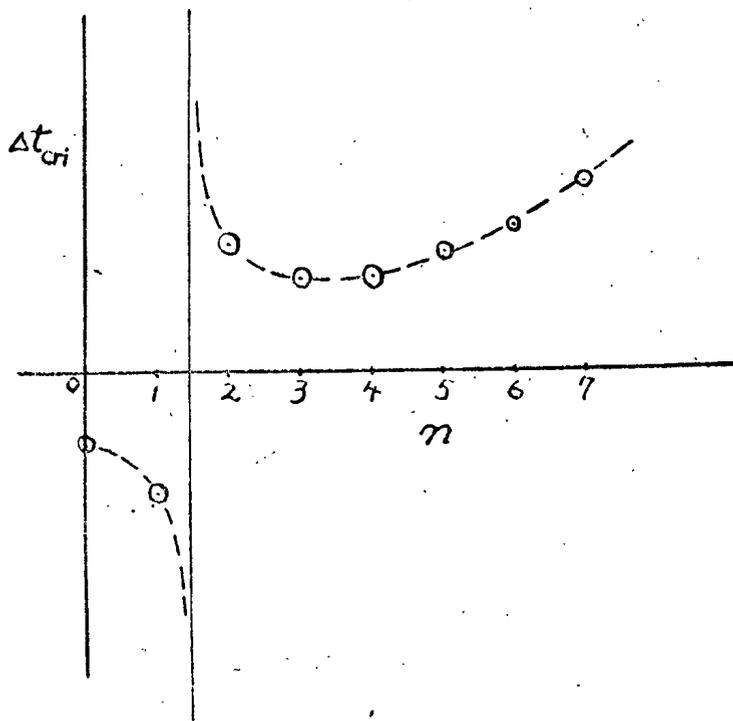


第 6 図



この熱応力が円板の振動に及ぼす影響については前にも述べた如く J. VON FREUNDLICH がタービン翼車について実験もした計算も行っている。³⁾ その結果によれば節円がない場合 ($m=0$) に於て、節直径の数が0及び1即ち $n=0$ 及び1の場合は外周の温度が内側より高いとき即ち(17)のような温度勾配のときはこの温度勾配のために固有振動数は増加し n が2以上になると逆に固有振動数が減じるのである。即ちタービン翼車が挫屈を起す ($p^2=0$ となる) ときの内外周の温度差—限界温度差— Δt_{cr} と節直径の数 n との関係は第7図の如くである。

第 7 図



丸鋸刃についても同様のことが言えるがこれは次節に於て論じよう。

§ 7 丸鋸の挫屈

前節 §6 に於て温度分布に勾配がある回転円板の応力分布状態がわかつたから、振動の変形 V_0 を(9)式にならつて

$$v = a \left(\frac{r-r_b}{r_a} \right)^2 \left\{ 1 + c_1 \frac{r-r_b}{r_a} + c_2 \left(\frac{r-r_b}{r_a} \right)^2 \right\} \cos n\theta \sin pt \dots\dots\dots (9)'$$

と仮定して(8)を計算してみよう。式(9)' は $r=r_b$ での条件 $V_0=0$, $\partial V_0/\partial r=0$ を満足している。 $C_1 C_2$ は周辺外部での端縁自由の条件²¹⁾

$$M_n = 0, \text{ 及び } Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 : r=r_a$$

$$\left. \begin{aligned} \text{即ち } \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{\partial V}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \\ D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta V) + (1-\mu) D \frac{\partial}{r \partial \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

を満足するように定めると

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= - \{91 + 8n^2 + (76 - 42.56n^2 + 2.56n^4) \mu + 1.28n^2 (1 - n^2) \mu^2\} / N \\ C_2 &= \{30.937 + 3n^2 + (26.25 - 16.6n^2 + 1.6n^4) \mu + 0.8n^2 (1 - n^2) \mu^2\} / N \end{aligned} \right\} (21)$$

$$N = 99.6 + 7.68n^2 + (57.6 - 25.024n^2 + 1.024n^4) \mu + 0.512n^2 (1 - n^2) \mu^2$$

となる。

a) 外部温度が高い場合

温度分布が例えば(17)の如き形の場合で、今 $k=2$ とすれば(18)'' と(10)' とより σ_r, σ_t を知りうるから上の V_0 とを用いることにより(6), (7)より(8)を計算することが出来る。計算は相当複雑であるので結果だけを示せば、

1) $n = 0$ のとき

$$C_1 = -0.974, C_2 = 0.332$$

運動エネルギー $T_{max} = \frac{1}{2} \frac{r}{g} h p^2 \int_{r_b}^{r_a} \int_0^{2\pi} V_0^2 r dr d\theta = 0.021 \frac{r}{g} r_a^2 p^2$

変形によるポテンシャルエネルギー $(U_1)_{max} = 0.037 \frac{E h^2}{r_a^2}$

遠心力に対する $(U_2)^I_{max} = 0.013 \frac{r}{g} r_a^2 \omega^2$

熱応力に対する $(U_2)^{II}_{max} = 0.009 E \alpha t_0$

但し $(U_2)_{max} = (U_2)^I_{max} + (U_2)^{II}_{max}$

従つて

$$p^2 = 0.62 \omega^2 + 1.8 \frac{E h^2}{r/g r_a^4} + 0.43 \frac{E \alpha t_0}{r/g r_a^2} \dots \dots \dots (22)$$

例題については

$$p^2 \times 10^{-4} = 0.84 + 0.63 + 0.09 t_0 \dots \dots \dots (22)'$$

遠心力による 剛性による 熱応力による

2) $n = 1$ のとき

$$C_1 = -0.936, C_2 = 0.318$$

で同様に

$$p^2 = 1.1\omega^2 + 1.7 \frac{Eh^2}{r/g r_a^4} + 0.05 \frac{Eat_0}{r/g r_a^2} \dots\dots\dots (23)$$

$$p^2 \times 10^{-4} = 1.5 + 0.59 + 0.01 t_0 \dots\dots\dots (23)'$$

3) $n = 2$ のとき

$$C_1 = -0.869, C_2 = 0.309$$

$$p^2 = 2.2\omega^2 + 4.9 \frac{Eh^2}{r/g r_a^4} - 1.3 \frac{Eat_0}{r/g r_a^2} \dots\dots\dots (24)$$

$$p^2 \times 10^{-4} = 3.0 + 1.7 - 0.26 t_0 \dots\dots\dots (24)'$$

4) $n = 3$ のとき

$$C_1 = -0.891, C_2 = 0.391$$

$$p^2 = 4.0\omega^2 + 20.0 \frac{Eh^2}{r/g r_a^4} - 3.3 \frac{Eat_0}{r/g r_a^2} \dots\dots\dots (25)$$

$$p^2 \times 10^{-1} = 5.4 + 6.90 - 0.67 t_0 \dots\dots\dots (25)'$$

以上の計算結果についてみるに、丸鋸刃が挫屈を起すのは前にも述べた如く $p = 0$ 即ち $p^2 = 0$ となるときであるが (22) ~ (25) の諸式の示す如くいづれの場合も遠心力による項及び剛性による項は常に正であるが熱応力による項は $n = 0$ 及び 1 の場合を除いて負であるから t_0 の値如何によつては $p^2 = 0$ となることがありうる。即ち例題では

$$n = 2 \text{ のとき } t_0 = 18^\circ\text{C}$$

$$n = 3 \text{ のとき } t_0 = 18^\circ\text{C}$$

なるとき $p^2 = 0$ 、となりこの丸鋸刃は挫屈を起すことを示している。 $n = 0, 1$ なる場合は $t_0 < 0$ なるとき即ち内部の温度が高い場合のみ $p^2 = 0$ となる可能性がある。しかし実際の場合に於てかかる温度分布は起り得ないから問題となるのは $n \geq 2$ の場合である。

以上例題の丸鋸刃が挫屈を起す危険のあるのは $t_0 = 18^\circ\text{C}$ になつた時で其の場合の変形状態は(9)' 式で $n = 2$ 及び 3 なる場合である。

このことはまた次の如く説明される。 $(U_1)_{max}$ は常に正であるから $p^2 = 0$ なるためには $(U_2)_{max}$ が負とならねばならない。しかるに (7) 式に於て $(U_2)_{max} < 0$ となるためには σ_r, σ_t が負即ち圧縮応力でなければならぬ。しかるに第 4 図にみられる

如く遠心力による σ_r , σ_t は常に引張応力で正であり, また第 5 図にみられる如く熱応力による σ_r も常に正である。従つて $(U_2)_{max} < 0$ となる唯一の原因は外部の温度が高くなつたとき外辺部に生じる σ_t による圧縮応力であることになる(第 5 図の実線) そしてこの σ_t による圧縮応力に原因するポテンシャルエネルギーは (17) 式で $k = 2$ とした如き温度分布のときは $n = 2$, 及び 3 なるとき他のエネルギーとの比較に於て最大の比となるから最低の温度約 18°C で $n = 2$ 或は 3 なる型の挫屈を起すわけである。

$n = 0, 1$ の場合 $(U_2)_{max} > 0$ となるのは (7) に於て (9)' 式より

$$\sigma_r \left(\frac{\partial V_0}{\partial r} \right)^2 + \sigma_t \left(\frac{\partial V_0}{r \partial \theta} \right)^2 = \sigma_r \left(\frac{\partial V_0}{\partial r} \right)^2 + \sigma_t n^2 / r^2 V_0^2 \tan^2 n\theta$$

であるから

$$n = 0 \text{ のとき } \sigma_r \left(\frac{\partial V_0}{\partial r} \right)^2 + \sigma_t \left(\frac{\partial V_0}{r \partial \theta} \right)^2 = \sigma_r \left(\frac{\partial V_0}{\partial r} \right)^2$$

$$n = 1 \text{ のとき } = \sigma_r \left(\frac{\partial V_0}{\partial r} \right)^2 + \sigma_t \frac{1}{r^2} V_0^2 \tan^2 \theta$$

となり $n = 0$ のときは σ_t は全然関係しないし, また $n = 1$ のときは関係しても小であるからである。

これに反して n が大となれば σ_t の影響は n に関して n^2 でひいて来るから σ_t の圧縮応力となる部分が大きく作用して $(U_2)_{max}$ を負ならしめる。

一方 n が大となれば常に正である $(U_2)_{max}$ や $(U_1)_{max}$ も大となるから $p^2 = 0$ ならしめる最小の t_0 を与える n が存在し今の場合その n が 2 或は 3 であると言うことになる。

b) 内部温度が高い場合

比較のために内部の方が温度が高い場合例えば (17)' の如き形の場合である。内部温度を高くすれば熱放散の状態は外部温度が高い場合とは異なり温度分布の式で k は大となると考えられるから $k = 4$ を仮定して $k = 4$ なる場合について同様計算結果を示せば (22) ~ (25) の各式の熱応力による項の係数が変化するだけで

$$n = 0 \quad p^2 = 0.62 \omega^2 + 1.8 \frac{Eh^2}{r/g r_a^4} - 0.33 \frac{Eat_0}{r/g r_a^2} \dots\dots\dots (26)$$

$$n=1 \quad p^2 = 1.1\omega^2 + 1.7 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} + 0.19 \frac{Eat_0}{\gamma/g r_a^2} \dots\dots\dots (28)$$

$$n=2 \quad p^2 = 2.2\omega^2 + 4.9 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} + 0.60 \frac{Eat_0}{\gamma/g r_a^2} \dots\dots\dots (28)$$

$$n=3 \quad p^2 = 4.0\omega^2 + 20.0 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} + 2.3 \frac{Eat_0}{\gamma/g r_a^2} \dots\dots\dots (29)$$

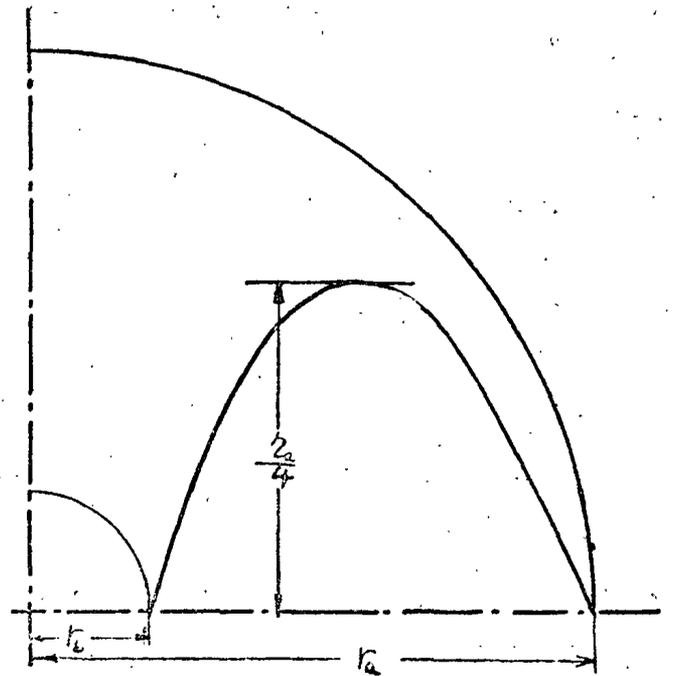
となる。

これよりわかる如く内部の温度が高い温度分布が

$$t = t_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right)^4 \right\}$$

で表わされる場合、挫屈を起す可能性のあるのは $n = 0$ の場合だけである。其の他いずれの型の挫屈も起す可能性はない。しかしこの事は k の値の如何、或は分布状態の如何によつて変化するの勿論である。例えば第7図に示す如く FREUNDLICH のタービン円板の場合は $n = 1$ なる場合も内部温度が高いときに挫屈を起す可能性あることを示している。

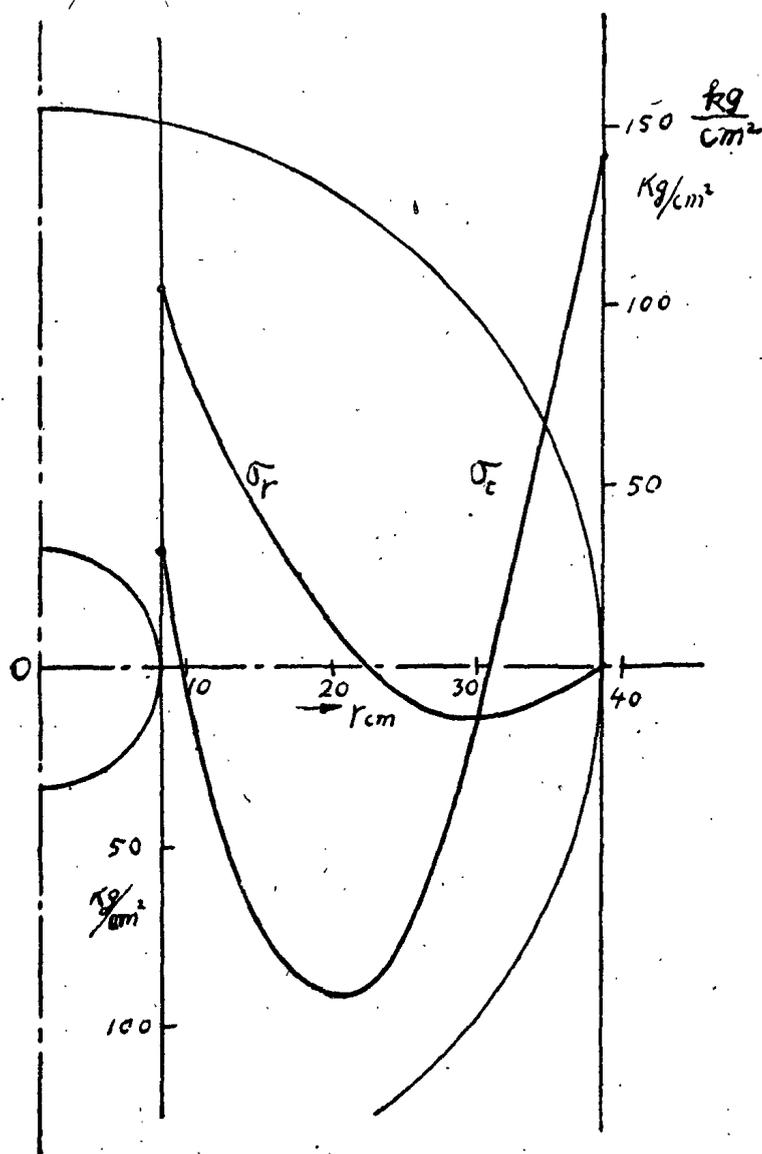
第 8 図



§ 8 腰 入 れ

前節に述べた如く例題の如き丸鋸刃では内外の温度差が 18°C になつたとき挫屈を起してしまふ。これは第5図に見る如く熱応力によつて生じる周辺部の圧縮応力のためである。これを如何にして防止するか。これは当初にも述べた如く温度差をなくすることである。即ち外辺部を冷却するか、内部を加熱してやればよいわけである。新しい腰入れとはこの方法でなければならないと思う。然しながら簡単な而も正確な刃の温度分布の測定、表示の方法が発見工夫されない限り困難である。研究はこの仕事の中の丸鋸刃の温度分布の測定と表示の方法に進まねばならない。

第 9 図



従来行われて来た腰入れなる加工は以上の如く考えれば二次的な手段ではあるが一応理にかなつたものと言える。即ち所謂腰入れなる加工は半径の50~70%の部分に塑性展伸の加工を行っているもので、これによつて刃の周辺部に、周方向にあらかじめ引張内力が与えられるわけである。そして熱応力として周辺部に生じる圧縮応力を打消すわけである。

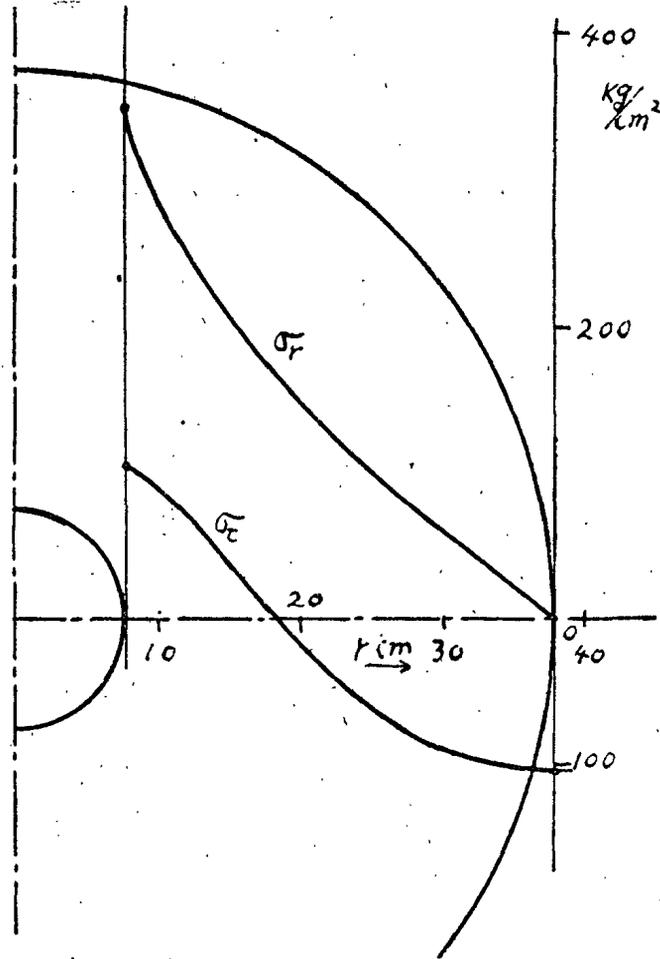
しかし腰入れの効果即ちこの塑性変形を量的に表示することは困難であるから、林博士にならつてそれと同じような効果を持つ即ち周辺部に引張を生ずるような温度分布 η を以て置きかえて論じよう。即ち η を

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{r-r_b}{r_a-r_b} \right) \left(1 - \frac{r-r_a}{r-r_b} \right) \dots\dots\dots (26) \quad (\text{Fig.8})$$

と仮定すればこの時の応力分布は前と同様に計算して $\eta_0/4 = 10^\circ\text{C}$ のとき第9図の如くなる。この応力を §6 に示した第5図の点線に加えると第10図の如くなり、内外の応力は平均され外辺部の圧縮応力になる σ_t は小となり挫屈は起り難いであろうことは前節の所論より十分に想像される所である。

以上のことを計算によつて示すならば温度分布の函数として更に(26)式を加えることによつて前節に於けると同様にして

第 10 図



$n = 0$ のとき $p^2 = 0.62\omega^2 + 1.8 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} + 0.43 \frac{Eat_0}{\gamma/g r_a^2} + 0.24 \frac{Ea}{\gamma/g r_a^2} \frac{\gamma_0}{4} \dots (27)$

$p^2 \times 10^{-4} = 0.84 + 0.63 + 0.09 t_0 + 0.05 \gamma_0/4$

$n = 1$ のとき

$p^2 = 1.1\omega^2 + 1.7 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} + 0.05 \frac{Eat_0}{\gamma/g r_a^2} + 0.14 \frac{Ea}{\gamma/g r_a^2} \frac{\gamma_0}{4} \dots (28)$

$p^2 \times 10^{-4} = 1.5 + 0.59 + 0.01 t_0 + 0.03 \gamma_0/4$

$n = 2$ のとき

$p^2 = 2.2\omega^2 + 4.9 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} - 1.3 \frac{Eat_0}{\gamma/g r_a^2} + 1.1 \frac{Ea}{\gamma/g r_a^2} \frac{\gamma_0}{4} \dots (29)$

$p^2 \times 10^{-4} = 3.0 + 1.7 - 0.23 t_0 + 0.22 \gamma_0/4$

$n = 3$ のとき

$$p^2 = 4.0\omega^2 + 19 \frac{Eh^2}{\gamma/g r_a^4} - 3.3 \frac{E\alpha t_0}{\gamma/g r_a^2} + 1.6 \frac{E\alpha}{\gamma/g r_a^2} \frac{\gamma_0}{4} \dots\dots (30)$$

$$p^2 \times 10^{-4} = 5.4 + 6.90 - 0.67 t_0 + 0.32 \gamma_0/4$$

を得る。

以上の計算結果に見る如く $\gamma_0 > 0$ ならば腰入れ効果を示すと考えた (26) 式の如き温度分布によるポテンシャルエネルギーの項は、この場合常に正で p^2 を高める即ち挫屈を起さないような効果があることがわかる。この場合 $n = 1$ のときの係数が $n = 0, 2, 3, \dots\dots$ より減じているのは前節の $n = 0, 1$ の場合の $(U_2)_{max}$ について述べたと同じ理由から首肯出来る所である。

今もし $\gamma_0/4 = 10^\circ\text{C}$ とするならば

$$n = 0 \quad p^2 \times 10^{-4} = 2.0 + 0.09 \gamma_0/4$$

$$n = 1 \quad p^2 \times 10^{-4} = 2.4 + 0.01 \gamma_0/4$$

$$n = 2 \quad p^2 \times 10^{-4} = 7.1 - 0.26 \gamma_0/4$$

$$n = 3 \quad p^2 \times 10^{-4} = 15.5 - 0.67 \gamma_0/4$$

となり、 $p^2 = 0$ となるのは

$$n = 2 \quad t_0 = 27^\circ\text{C}$$

$$n = 3 \quad t_0 = 23^\circ\text{C}$$

となり挫屈温度は夫々 $9^\circ\text{C}, 5^\circ\text{C}$ だけ大となる。そしてこの場合前と異り $n = 3$ の場合の方が挫屈が起りやすくなっている。

以上は腰入れ効果を (26) なる温度分布式で置きかえたことによる結果であるが腰入れ効果による初期応力分布が果して (26) 式による熱応力分布で置換えるか否かは実際の腰入れについての実験研究にまたねばならない。

最後に鋸刃が静止している時の状態を考えるに (27) ~ (30) 式に於て剛性の項と腰入れ効果の項とのみが残る他はすべては 0 であるから

$$n = 0 \quad p^2 \times 10^{-4} = 0.63 + 0.05 \gamma_0/4 \dots\dots\dots (27)'$$

$$n = 1 \quad p^2 \times 10^{-4} = 0.59 + 0.03 \gamma_0/4 \dots\dots\dots (28)'$$

$$n = 2 \quad p^2 \times 10^{-4} = 1.7 + 0.22 \gamma_0/4 \dots\dots\dots (29)'$$

$$n = 3 \quad p^2 \times 10^{-4} = 6.90 + 0.32 \gamma_0/4 \dots\dots\dots (30)'$$

となり、 $p^2 = 0$ となるときの $r_0/4$ は

$n = 0 : - 13^\circ\text{C}$

$n = 1 : - 20^\circ\text{C}$

$n = 2 : - 77^\circ\text{C}$

$n = 3 : - 220^\circ\text{C}$

であり(26)式で r_0 を負にすれば $r_0/4 = 13^\circ\text{C}$ で $n = 0$ なる型の挫屈を静止時にすでに起すことを示している。

即ち腰入れの効果如何によつては(27)式の $r_0/4$ の係数を負ならしめることは可能であるから腰入れした刃を手にもつたとき自重でペコンペコンする理由を与えるわけである。本稿の如き例では $n = 0$ の $r_0/4$ の係数は負とはならなかつた。

§ 9 む す び

以上丸鋸刃に関して種々ある問題を概観し、そのうち特に今まで論じられる所の少なかつた腰入れの問題を論ずるために、林博士の方法にならつて刃の横振動の問題から挫屈を考え、そして腰入れの理論と効果について解説して来た。実際的な研究はこれからである。道は程遠いであろう。しかし今まで秘術とされて来た腰入れの科学的根拠は解明されたと言いうるであろう。

これを要約するに

1 丸鋸刃が振動すると一概に言われるが、軸や機体の振動と刃の振動とは区別さるべきで、回転部分の不均衡による遠心力が原因となる軸の振動は回転を増大すればするほど遠心力が大となるから振動も大きくなるが、一方刃の振動(横振動)はこれと反対に回転数を増せば増すほど振動に抵抗する力が大となり振動は安定して来るものである。従つて腰入れの理由と遠心力に関する従来の説明は間違ひである。

2 刃の挫屈を左右する因子として回転による遠心力、刃の有する剛性、熱応力、腰入れ効果を考えるならば刃が挫屈を起す原因は唯一つ熱応力のうち外辺部に生じる切線方向の圧縮応力である。

3 挫屈の型としては種々考えられるが節直径のみを有する型で且 $n = 2$ 及び 3

の場合について検討すれば充分であろう。

4) 腰入れの効果は (26) 式の如き温度分布で置換してよく説明されるが、実際の腰入れ効果——双に与える固有応力状態——を測定しくわしく研究検討をしなければならぬ。

5) 新しい腰入れの方法は内外の温度分布を均一にする外辺部の冷却或は中心部の加熱と言うような根本的方法が期待される。しかしそれには回転中の刃の温度の測定表示について研究工夫が必要である。

附記、本稿の概要は昭和28年5月8日、日本木材加工技術協会関西支部総会に於て講演した。尙大変面倒な計算を熱心に遂行して下さつた助手 角谷和男君に深甚の謝意表をしたい。

参 考 文 献

- 1) 杉原彦一：帯鋸刃にかゝる力について
木材工業 8 (1953), 5 : 225~232
- 2) A. STODOLA : Dampf- und Gasturbinen, 6 Aufl. (1924) : 903~918
- 3) J. VON FREUNDLICH : Engineering, 119. (1925) : 2 & 31
- 4) 林 毅：丸鋸の腰入れについて——回転円板の熱弾性変曲の問題、応用物理 17 (1948) : 251~257
- 5) 斎藤美篤, 仁賀定三：円鋸に関する研究 第61回日, 林, 大, 講, 集, (1952) : 220
- 6) 仁賀定三：円鋸製材に於ける注水効果について 木材工業 5 (1950) 5 : 240~244
- 7) 杉原彦一：丸鋸の目立について 木材工業 5 (1950), 9 : 453~455
- 8) 杉原, 梶田：帯鋸刃の目立仕上精度に関する一考察 日, 林, 誌, 33 (1951), 3 105~110
- 9) 枝松信之：アサリについて 木材工業 8 (1953), 5 : 233~236
- 10) S. TIMOSHENKO : Vibration Problems in Engineering (1937), 2nd Ed.: 437 §71
- 11) 長柱研究委員会編：弾性安定要覧 : 337~340 (1951)
- 12) H. LAMB and R. V. SOUTHWELL : The Vibrations of a spinning disc, Proc. Roy. Soc. A, 99 (1921) : 272~280
- 13) R. V. SOUTHWELL : On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre and on the effects of rotation, Proc. Roy.

- Soc., A, 101 (1922) : 133~153
- 14) A. NADAI : Über das Ausbeulen von kreisförmigen Platten, Z. VDI, 59 (1915) : 169~174
 - 15) 妹沢克惟 : 薄板の安定 造船協会会報 38 (1926) : 79~108
 - 16) G. TEMPLE and W.G. BICKLEY : RAYLEIGH Principle and its Application to Engineering, (1933)
 - 17) J. H. MICHELL : Proc. Lodon Math. Soc. 34 (1901) : 134~142; 32 (1900) : 23~61
 - 18) 例え ば J. PRESCOTT : Applied Elasticity, (1924) : 615
 - 19) 機械工学便覧 (昭26年版) : 4—107
 - 20) A. STODOLA : Dämpf=und Gas turbinen, 6 Auf. (1924) : 327
 - 21) 例え ば Applied Elasticity, : 593 J. Prescott (1924), 弾性学 : 426 : 倉西正嗣 (1948) 日本機械学会

追 記

式 (11), 式 (19) 中の $r=r_0 : \dot{\varphi}=0$ と言ふ条件はやはり無理で Southwell のやうに マンデュー は横方向の変位を抑へるのみで半径, 切線方向には自由である中空円板と考へた方が適當である。