オイラーの運動方程式

伊藤和行*

1. 序

近代力学の誕生は，ニュートンの『プリンキピア』における，地上と天上の物体運動の統一的な説明に始まる．そこでニュートンは，運動の 3 法則と万有引力の法則を用いて，地上の物体の運動から惑星の運動まで，すなわちガリレオの落下法則からケプラーの惑星運動の法則までを数学的に導出したのである．現代古典力学の出発点がここにあることは周知の通りであり，これより古典力学は一般に「ニュートン力学」とも呼ばれている．しかし『プリンキピア』を見ると，そこで展開されている議論は，現代の我々が古典力学として知っているものとは大きく異なっている．現代では，物体の運動を論じる際には，空間に固定された座標系を設定し，各座標に関して運動方程式を立て，その微分方程式を解くことによって軌道や周期を求めているが，それに対して『プリンキピア』では，座標系も運動方程式も現われず，すべての証明は幾何学的になされているのである[*1]．

すなわち「ニュートンの力学」と「ニュートン力学」とは異なるものであって，前者を解析化し，後者の形にする仕事はニュートン以後の数学者たちによって 18 世紀前半から中頃にかけてなされた．この「ニュートンの力学」の解析化に際して，もっとも重要な役割を果たしたのはレオンハルト・オイラー（Leonhard Euler, 1707-93）である[*2]．18 世紀前半には，ヴァリニョン，ヘルマン，ヨハン・ベルヌーイ，ダニエル・ベルヌーイ，クレーロー，ダランベールらが力学の解析化を進めていたが，彼らは，物体に固定された座標すなわち物体の運動方向と法線方向を考え，幾何学的に距離や速度，時間の間の微分量の関係式を立てていた．我々が馴染んでいるような，空間に固定された座標系を設定し，各座標に関する運動方程式を立てて問題を解くという方法を体系的に展開したのはオイラーが最初だったのである[*3]．またオイラーは，直交座標系から

* 京都大学文学研究科 kito@bun.kyoto-u.ac.jp

*1 『プリンキピア』の数学的内容に関する説明としては，Densmore, D., *Newton's Principia: The Central Argument*, 3rd edition, Santa Fe, 2003 がわかりやすい．また英訳 *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, tr. by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, Berkeley, 1999 を参照せよ．

*2 18 世紀力学史に関しては，Truesdell, C., *Essays in the History of Mechanics*, Berlin, 1968; Maltese, G., *La sotria di F=ma: La seconda legge del moto nel XVIII secolo*, Firenze, 1992; *Da F=ma alle leggo cardinali del moto. Lo sviluppo della tradixione newtoniana nella meccanica del '700*, Milano, 2001; 山本義隆『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』，日本評論社，1997.

*3 Cf. Maltese, G., "Towards the Rise of the Modern Science of Motion: the Transition from Synthetical to Analytical Mechanics", in Bevilacqua, F., ed., *History of Physics in Europe in the 19th and 20th Centuries*, Bologna, 1993, pp.51-67. 中田良一「Leonhard Euler による古典力学の解析化」，『人文知の新たな

の座標変換を用いて極座標系における運動方程式を導出してケプラーの惑星運動の法則を見事に証明し，さらに運動方程式の適用範囲を質点から質点系，剛体，流体にまで拡大している．とりわけ剛体の運動に関しては，オイラー方程式やオイラー角で知られるように，現代まで受け継がれる基本理論を提示した．

オイラーによる解析的な運動方程式の提示は「ニュートン力学」の成立を示すものと考えられるが，彼の方程式には，現代のものにはない係数が現われていることが知られている．たとえば「天体の運動一般に関する研究」（1749）では，３次元の直交座標系の各座標に対して次のような運動方程式が与えられている[*4]．

$$\mathrm{I.}\ \frac{2ddx}{dt^2}=\frac{X}{M},\quad \mathrm{II.}\ \frac{2ddy}{dt^2}=\frac{Y}{M},\quad \mathrm{III.}\ \frac{2ddz}{dt^2}=\frac{Z}{M}$$

上の式において現れている係数２は，オイラーが取った特異な単位系のためであることがすでに指摘されているが[*5]，この係数は時代とともに変化しており，さらには彼の運動方程式の導出や表現自体も変化しているのである．我々にとっては運動方程式は力学理論の基礎として前提とされるものであるが，18 世紀前半には必ずしもそのようなものとみなされてはおらず，オイラーにとってはその正当性を論証すべきものだったのであり，その導出方法も大きな問題だったのである．本稿では，オイラーの運動方程式の導出と表現の変化を，彼の生涯を通じて辿ることを通じて，解析的な運動方程式の成立過程を検討する．その準備として，次節では，ニュートンの『プリンキピア』における加速運動の数学的な取り扱い方，そして 18 世紀前半，オイラーまでの運動方程式の解析化の過程を概観する．

2.『プリンキピア』と運動方程式

ニュートンは，『プリンキピア』（1687）第１巻「物体の運動について」の冒頭において３つの運動法則を提示し，第２法則については次のように述べている．

> 運動の変化は加えられた運動力に比例し，その力が加えられる直線にそって生じる[*6]．

第２法則は，現代では運動方程式 $f = ma$ と同一視されており，また運動量の変化が力積が等しい，すなわち $f\Delta t = \Delta mv$ を意味するものとも理解されている．しかし『プリンキピア』において惑星運動が具体的に論じられた際には第二法則には言及されておらず，基礎となったのは微小時間における加速運動に対してガリレオの落下法則を適用した定理だった．第１巻補助定理 10 では，物体に働く力が一定でなくとも，微小時間においては力の方向も大きさも一定とみなすこ

総合に向けて』，京都大学文学研究科，2004, pp.55-66 参照.

[*4] “Recherches sur le mouvement des corps celestes en général”, *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin*, 3, 1747(1749), p.93-143, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.25, pp.1-44; spec. p.9.

[*5] たとえば Truesdell, “Introduction”, in Euler, *Opera omnia*, Ser.2, Vol.12, pp.XLII-XLIV; Hankins, T. L., *Jean d’Alembert: Science and the Enlightenment*, Oxford, 1970, pp.220-221.

[*6] Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 3rd edition, 1726, ed. by A. Koyré and I. B. Cohen, Cambridge, Mass, 1972, p.54; ニュートン『自然哲学の数学的諸原理』(「世界の名著 26 ニュートン」), 川辺六男訳，東京，中央公論社，1971，p.72.

とができるので，落下法則より，通過距離は通過時間の２乗に比例すると主張されている[*7]．『プリンキピア』における物体の加速運動に関する考察の出発点となったのは第２法則でも運動方程式でもなく，ガリレオの落下法則を微小時間における加速運動へ適用した定理だったのである．そしてニュートンは，中心力が働く物体の運動の理論を幾何学的方法によって，自身が発見した微積分をまったく用いずに展開していた．『プリンキピア』出版後，17 世紀末から 18 世紀前半にかけて，力学における最大の課題は，幾何学的に書かれたその内容を，ライプニッツ流の微積分計算を用いて書き換えていくことだった[*8]．運動方程式の解析的表現を最初に与えたのはヴァリニョン（Pierre Varignon, 1654-1722）である．彼は，17 世紀の末から 18 世紀初頭に掛けて発表したいくつかの論文の中で，物体の落下法則を微分形式に書き換える試みを行なっている．1700 年に発表された「力，速度，距離，時間を決定するための一般的方法」[*9] では，運動方程式が「直線上の運動の２つの一般的規則」（“Régles générales des mouvemens en ligne droite”）の１つとして与えられていた．速度を v，瞬間を dt とし，その通過距離を dx，さらにその瞬間での速度の増加を dv，その速度の増加による通過距離を ddx，また働く力（作用する力を物体の質量で割ったもの，すなわち「加速力」を意味している[*10]）を y とするとき，２つの規則は次のようなものである．

$$1.\ v = \frac{dx}{dt} \qquad 2.\ y = \frac{dv}{dt}\,(\frac{ddx}{dt^2})$$

規則１は最初の速度の解析的表現であると考えられるが，以下のように説明されている．

> 速度は，一様運動によって通過された距離と，それを通過するのに費やした時間の比のみからなるので，第１規則として，すでに $v = \frac{dx}{dt}$ を得るだろう．それは，dt を一定とすることによって，$dv = \frac{ddx}{dt}$ を与えるだろう[*11]．

ここで dv は速度 v の微分量を表わすが，その導出に際しては，dt が一定であることから $ddt = 0$ であることが用いられている．すなわち $dx = vdt$ の両辺の微分を取って，$ddx = dvdt + vddt$ となるが，$ddt = 0$ であるので，$ddx = dvdt + v \cdot 0 = dvdt$．よって $dv = \frac{ddx}{dt}$ である[*12]．

[*7] Newton, *Principia*, pp.80-81; ニュートン『自然哲学の数学的諸原理』, pp.91-92. ニュートンにおけるガリレオの落下法則の役割に関しては，拙稿「落下法則－古典力学の誕生と数学」,『人文知の新たな総合に向けて』，京都大学文学研究科，2004，pp.45-53 参照.

[*8] 『プリンキピア』への反応に関しては，Guicciardini, N., *Reading the Principia. The Dibate on Newton's Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge, 1999.

[*9] Varignon, “Maniére générale de déterminer les forces, les vitêsse, les espaces, et les tems”, *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris*, 30 Janvier 1700 (1703), pp.22-27. Cf. Aiton, E. J., *The Vortex Theory of Planetary Motion*, New York, 1972, pp.196-197 ; Blay, M., *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*, Paris, 1992, pp.184-186.

[*10] ニュートンは『プリンキピア』の冒頭の定義において,「加速力」（“vis accentrix）を,「運動力」（“vis motrix”）を質量で割ったものとして定義している．Newton, *Principia*,1972, pp.44-46; ニュートン『自然哲学の数学的諸原理』, pp.63-64. 18 世紀を通じて，１個の物体だけを問題とするときには「加速力」が用いられている.

[*11] Ibid., p.23.

[*12] この時期の微分計算では，自由変数とは，その１次微分が一定になる，すなわち２次微分が０となる量であるとされている．Cf. Bos, H. J. M., “The Funcamental Concepts of the Leibnizian Calculus”, *Lectures in the History of Mathematics*, Providence, 1993, pp.83-99.

規則２は最初の運動方程式とも呼ばれるべきものである．その導出では，ニュートンのように，微小時間における落下運動を考え，落下法則を微分量に適用している．

> さらに，一般に重さに関して理解されるように，連続的に働く一定の力によって動かされる物体が通過する距離は，この力と，それらの距離を通過するのに費やされる時間の平方とから合成される比であるので，また $ddx = ydt^2$，すなわち $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ を得るだろう．これはまた１つの規則 $y = \frac{dv}{dt}$ をなし，それは，先の規則 $v = \frac{dx}{dt}$ によって，ここで解くべきものとして提示されていることすべてを満足する[*13].

このようにヴァリニョンは，微小時間におけるガリレオの落下法則に対する解析的表現である $ddx = ydt^2$ を出発点とし，それに先ほどの $ddx = dvdt$ の関係を代入することによって $y = \frac{dv}{dt}$ を導出している．この手順は，我々が通常行なう手順すなわち $m\frac{dv}{dt}$ に $v = \frac{dx}{dt}$ を代入して $f = m\frac{ddx}{dt^2}$ を導くというものとはちょうど反対である[*14].

この微分形式の運動方程式は，1710 年代に入り，ヘルマンやヨハン・ベルヌーイらによって，惑星運動の問題に適用されていった．彼らの主要な問題は，ニュートンが『プリンキピア』において，万有引力下の惑星の軌道を論じた際に，運動法則と万有引力からケプラーの法則を導いたのではなく，反対にケプラーの法則から万有引力の法則，すなわち惑星に働く力が中心力で，その大きさが太陽からの距離の２乗に反比例することを導いていたことにあった．またニュートンは，万有引力下の惑星の軌道を求めようとした際にも，２次曲線であることを前提として，どのような２次曲線になるかを幾何学的に論じたのである．18 世紀の研究者たちは，ニュートンとは反対に，万有引力下の物体の運動に関する微分方程式を立て，それを解くことによって，惑星の軌道が２次曲線になることを証明しようとした．ニュートンの試みは現代の研究者によって「中心力の順問題」と呼ばれ，ベルヌーイらの反対の試みは「逆問題」と呼ばれている[*15].

最初に「逆問題」を解析的に解いたのはヘルマン (Jacob Hermann, 1678-1733) である．彼は『フォロノミア』(1716)[*16] において，速度の一階微分形式の運動方程式 $dv = adt$ から出発して惑星運動の軌道を導出している[*17]．またヨハン・ベルヌーイ（Johann Bernoulli, 1667-1758）は，「運動伝達の法則に関する論考」(1727)[*18] の中で，速度の１階微分形式の運動方程式を「加速の知られた法則」（“la loi connue de l’acceleration”）として提示し，p が圧力を表わすとき $dv = pdt$

---

*13 Ibid., p.23.

*14 当時の微分計算法を用いると，$dv = ydt$ の両辺に dt を掛けて $dvdt = ydt^2$ となり，$ddx = dvdt$ を代入して $ddx = ydt^2$ となる．

*15 Cf. Aiton, E., “The Contributions of Isaac Newton, Johann Bernoulli and Jakob Hermann to the Inverse Problem of Central Forces”, *Studia Leibnitiana*, Sonderheft, 17 (1998), pp.48-58; Guicciardini, N., “Johann Bernoulli, John Keill and the Inverse Problem of Central Force”, *Annals of Science*, 52 (1995), pp.537-575.

*16 Hermann, J., *Phoronomia sive de viribus et motibus corporum sloidorum et fluidorum*, 1716.

*17 Ibid., pp.56-57. Cf. Maltese, *La sotria di F=ma*, p.66. n.185.

*18 Bernoulli, J., *Discours sur les lois de la communication du mouvement*, 1727; *Opera omnia*, Vol.3, 1742, Hildesheim, 1968, pp.1-80.

であるとしている．しかしこの運動方程式は，ベルヌーイにとっては必ずしも問題を解く際に最も重要な式だったのではなかった．彼にとって最も重要だったのは，「活力」（“les forces vives”）の式であり，実際運動方程式から「活力」の式をすぐに導いている．$dx = vdt$ より $dt = \frac{dx}{v}$ であることを用いて，$dv = pdx : v\,(= p\frac{dx}{v})$ すなわち $vdv = pdx$ と変形し，さらに両辺を積分することによって $\frac{1}{2}v^2 = \int pdx$ を得るのである[*19]．ベルヌーイは，多くの問題を，この $vdv = pdx$ という関係を出発点として，「活力」すなわち運動エネルギーを用いて解決していた．ヘルマンもベルヌーイも運動方程式を導出してはおらず，またヴァリニョンが落下法則から導出される距離の二階微分方程式を第一の式としていたのに対して，彼らは速度の一階微分方程式から出発したのだった．

ヨハンの息子であるダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli, 1700-1782）は，１階微分方程式 $dv = pdt$ を動力学の基礎とみなす一方で，その必然性に関しては疑問を提示している．彼は，1726 年にペテルスブルク科学アカデミーに提出した論文「力学の諸原理の検討と，力の合成と分解に関する幾何学的証明」[*20] の中で，運動に関する原理として，速度の増大は，働く圧力と時間要素の積に比例することすなわち $dv = pdt$ であると述べた後で，この原理は「偶然的に正しい」（“contingenter verae”）のであって，「必然的に正しい」（“necessario verae”）のではなく，したがって $dv = ppdt$ や $dv = p^3dt$ が正しい可能性もあると主張する[*21]．この原理が正しいのは，それから導かれる結果が経験的に確証されるからであって，それ以上の根拠はないのである．なお彼は，ヨハン・ベルヌーイに倣って，この原理から，$dx = vdt$ を用いて，活力の増大に関して $vdv = pdx$ を導き，活力の値を求めていた[*22]．

以上のように，ヴァリニョンによって提示された一階微分方程式としての運動方程式，すなわち速度の増大は働く加速力と時間要素の積に比例するという関係式は，18 世紀前半には，様々な力学の問題を解く際に利用されるようになっている．しかし彼らは，この運動方程式を，我々のように空間に固定された直交座標系や極座標系の成分に対して立てたのではなかった．外力を受けて運動する物体を原点とし，ある瞬間の軌道の接線方向と法線方向に外力を分解し，各方向に対して，距離や速度の微分量間の関係式を幾何学的に求めていたのである[*23]．また運動方程式はけっして力学の唯一の原理ではなく，「活力」や「運動量」の保存則などとともに，力学の問題を解く際に用いることのできる道具の一つだったことに注意しなければならない．そしてヴァリニョンを初めとして，ヘルマンやヨハン・ベルヌーイも，運動方程式にニュートンの名前を結びつけることはなく，むしろガリレオの落下法則に関連づけて論じていた．実際，ダニエル・ベルヌーイは，運動方程式について，最初に示したのはヴァリニョンであるが，ガリレオが最初に一

[*19] Ibid., p.47.

[*20] Bernoulli, D., “Examen principiorum mechanicae, et demonstrationes geometricae de compositione et resoutione virium”, *Commentarii Academiae Societatum Imperialis Petropolitanae*, Vol.1, 1726 (1728), *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Bd.3: Mechanik, Basel, 1987, pp.119-135.

[*21] Ibid., p.119. Cf. Maltese, *La sotria di F=ma*, pp.63-64.

[*22] Ibid., p.123.

[*23] Cf. Guicciardini, *Reading the Principia*, pp.195-249.

様加速運動の決定のために用いたと述べ，「ガリレイの原理」（“principium Galileanum”）と呼んでいる[*24].

3.『力学』

3.1 運動方程式の導出

オイラーの力学研究は 1730 年代に始まるが，力学の解析化という彼の生涯の目標は，最初の著作である『力学すなわち解析的に示された運動の科学』(1736) の表題においてはっきりと示されている[*25]．そして『力学』は解析的に表現された運動方程式の導出から始まっており，まず加速運動における，速度の変化と力の関係に関して，微小時間のおける落下法則を導出し，それを一般的な場合に拡張していく．すなわち，ある力が働くとき，微小時間における速さの増大はその時間に比例することを説明し，運動の始まりでは，速度は微小時間に比例することから，通過距離は微小時間の平方に比例することを導いている．

> よって，もし運動の始まりにおいて微小時間 t でもって獲得された速度を c と呼び，通過距離を s とするならば，$t = nc$ となる．だがまた $t = \int \frac{ds}{c}$ である．よって $nc = \int \frac{ds}{c}$ あるいは $ncdc = ds$ となり，これより $s = \frac{nc^2}{2} = \frac{t^2}{2n}$，ゆえに運動の最初の始まりにおいて描かれた距離は時間あるいはその距離でもって獲得された速度の 2 倍比である[*26].

オイラーによれば，この定理をガリレオは最初に落下法則の運動に対して用いたが，彼はその証明は与えずに，現象との一致のみから，その正しさを確信しただけだったのである[*27].

次いでオイラーは異なる力が，異なる物体に働くときの場合へと議論を一般化している．同一の物体に異なる力が働くとき，同じ時間での通過距離は力に比例するので，微小時間 dt における速さの増大 dc は力 p と微小時間の積 pdt に比例する．すなわち $dc \propto pdt$ である[*28]．次いでこの式から活力に関する式が導かれる．dc は pdt に比例するから，dc も $\frac{pds}{c}$ に比例する，すなわち cdc は pds に比例するので，両辺を積分すると，速度の二乗の増分 dc^2 は力と微小距離の積に比例することになる[*29]．この結果は，前章で見たように，ヨハン・ベルヌーイが活力の式としてす

[*24] Bernoulli, D., “Examen principiorum mechanicae”, , p.119.

[*25] *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, in *Opera omnia*, Ser.2, Vol.1. 序文において研究の目標が次のように述べられている．「ニュートンの『自然哲学の数学的諸原理』によって，この運動の科学は非常に大きな発展を得たが，それは［古代の幾何学者たちのものと］あまり違わない方法で書かれている．しかし解析なしで構成された著述すべてに対して得られることは，何よりも力学に対して成立する．もし読者が提示されたことの正しさを確信しているとしても，それらについての明晰で判明な知識を得ることはできない．したがって，もし同じ問題がわずかに変えられたならば，自ら解析に向かって，同じ命題を解析的方法によって導出しないと，独力でそれを解くことはできないだろう．」(p.48)

[*26] Ibid., p.49.

[*27] Ibid., p.50.

[*28] Ibid., p.55.

[*29] Ibid., p.55.

でに導出していたものである．

オイラーは『力学』において $dc = pdt$ の導出を非常に詳細に説明しているが，それは，$dc = pdt$ は偶然的なものに過ぎないというダニエル・ベルヌーイの主張に対して反論し，それが必然的なものであることを示したかったからに他ならない[*30]．もちろん，このオイラーの試みは，微小時間における速度の増分は働く力に比例するという前提の証明と認められるものではなかった．

さらにオイラーは，加速力に関する式を異なる物体に働く運動力に関する式に拡張する．そのために速さの増分が質量 A に反比例することを示して，比例定数を n として，$dc = \dfrac{npdt}{A}$ という基本式を得ている．この「n はあらゆる場合において同じ数を示し，力にも，微小時間にも，点の量にも依存しない」数である．また $dt = \dfrac{ds}{c}$ より $dc = \dfrac{npds}{Ac}$，$cdc = \dfrac{npds}{A}$ が成り立つので，よって点 A が力に p によって時間 dt において通過する距離 dz は $dz = dcdt = \dfrac{npdt^2}{A}$ となる[*31]．

3.2 運動方程式の係数

オイラーは運動方程式 $dc = pdt$ を導出した後，それを用いて力が働いたときの質点の運動を論じているが，その際に速度の尺度として，落下運動における「ある速度による高さ」（“altitudo celeriati cuidam debita”）が導入されている．まず彼は，一様な力が作用するときの任意の場所における速度を問題にする．力 g が働くとき，$cdc = \dfrac{ngds}{A}$ を積分して $cc = \dfrac{2ngx}{A}$ を得る[*32]．よって物体の自由落下では，速度は通過した高さの平方根に比例することになるが，これはガリレオが見出した地上での物体の落下法則に他ならない．落下おいては，力 g は重さに他ならなく，重さは質量に比例するから，$\dfrac{g}{A}$ は定数とみなすことができる[*33]．

ここでオイラーは，落下の高さを速度の尺度とみなし，この高さと距離との関係として運動方程式を定式化する．地表では，重い物体は，同じ高さを落下したときには，同じ速度を獲得することから，速さを表す表式として，その速さを獲得するような高さを用いようというのである．彼は，この速さの尺度としての高さを「ある速度による高さ」と名付ける．

> 地表で落下する重い物体が，その同じ速度を獲得する高さを，これ以降，ある速度による高さと呼ぼう[*34]．

速さ c の 2 乗は「高さ」v に比例するが，オイラーは比例定数を 1 として，$v = cc$ すなわち $c = \sqrt{v}$ とする．現代的表記では，重力定数を G, 高さを H, 速度を V とすれば，$H = \dfrac{V^2}{2G}$ であるから，$2G = 1$ と置いたことになる．この「高さ」の式を先ほどの速度と距離の関係式 $cc = \dfrac{2ngx}{A}$ に代入すると，$v = \dfrac{2ngx}{A}$ となる（現代的表記では，質量を M，力を F とすると，$H = \dfrac{2nFX}{M}$

[*30] Ibid., p.55.
[*31] Ibid., p.57.
[*32] Ibid., p.67.
[*33] Ibid., p.68
[*34] Ibid., p.69.

である）．さらに上の関係式を落下運動に適用することによって，比例定数 n が決定される．力 g が重力の場合には，x が「高さ」v に他ならないから，$v = x$ となり，したがって $v = \frac{2ngx}{A}$ に代入して $\frac{2ng}{A} = 1$，ゆえに $n = \frac{A}{2g}$ が成り立つ．ここで力 g が重力を表すときには，重量と質量の比 $\frac{A}{g}$ は 1 であると仮定し，$\frac{A}{g} = 1$ より，$n = \frac{1}{2}$ が求まる．この結果，落下における運動方程式として，$n = \frac{1}{2}$ を代入して $v = \frac{gx}{A}$ が得られ，さらに両辺の微分を取って $dv = \frac{gdx}{A}$ が得られる[*35]．

一般的な運動方程式 $cdc = \frac{npds}{A}$ は，$cdc = \frac{dv}{2}$ と $n = \frac{1}{2}$ を代入して，$dv = \frac{pds}{A}$ と書き換えられる[*36]．この式において，$\frac{p}{A}$ は物体に働く力を質量で割ったものである．これは，ニュートンによって「加速力」と呼ばれたものであり，加速すなわち与えられた時間における速さの増分によって測られる力の効果を表すので，dv は「加速力と通過距離の要素の積」（“factum ex vi accelerante in elementum spatii percursi”）に等しいことになる．

『力学』では，この後，一貫して速さ c の代わりに「高さ」v の平方根 $\sqrt{v}$ が用いられ，運動時間を求める際にも $t = \int \frac{ds}{c}$ ではなく，$t = \int \frac{ds}{\sqrt{v}}$ が用いられている．この「高さ」による運動方程式 $dv = \frac{pds}{A}$ は，『力学』と同時代に書かれた他の論文においても基本式として用いられていた．最も初期に書かれた論文の一つである，1730 年の「物体の衝突における運動の伝達について」[*37] もそうである．この論考では，運動物体の衝突が力の連続的な作用に還元されて論じられているが．その作用の運動への効果を表す式として $dv = Pdx$ が用られている[*38]．この式は，『力学』の $dv = \frac{gdx}{A}$ において $A = 1$ としたものに他ならないが，そこではオイラーはその式の由来については何も説明せずに用いていた．同様の式は「輪軸のよりよい製作に関する論考」(1745)[*39] においても現われている．そこでは，すでに「無限小の物体」（“les corps infiniment petits”）に関する運動の原理は見出されているので，さらに「有限な大きさの物体」（“les corps d'une grandeur finie”）すなわち剛体の運動の原理を見出すことが課題であるとされている[*40]．この「無限小の物体」に関する運動の第一原理の一つとして，「高さ」による速度の表現 $\sqrt{v}$ を用いた運動方程式 $dv = \frac{Pdx}{M}$ が挙げられている[*41]．

以上のように，1730 年代のオイラーは，ヴァリニョンらが用いた速度と時間の関係式 $dc = pdt$ を出発点としつつも，実際の問題を解く際には，運動方程式として，落下法則を基にして速度を距離によって表した式，すなわち「高さ」による式 $dv = Pdx$ を主として用いていた[*42]．この

[*35] Ibid., p.76.

[*36] Ibid., p.76.

[*37] “De communicatione motus in collisione corporum”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5, 1730 (1738), pp.159-168, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.8, pp.1-6.

[*38] “De communicatione motus in collisione corporum”, p.6.

[*39] “Dissertation sur la meilleure construction du cabestan”, *Piece qui a remporte le prix de l'académie royale des sciences 1738*, 1741 (1745), pp.29-87, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.20, pp.36-82.

[*40] Ibid. p.41.

[*41] 仏語では “la Hauteur due à la vitesse” という言葉が用いられている．Ibid., p.43.

[*42] $du = -\frac{pdt}{A}$ を用いた論考もある．たとえば “De communicatione motus in collisione corporum sese non

速度を測る基準として落下の高さを用いることは，実はガリレオが『新科学論議』第４日において行なっていたことである．そこでガリレオは，水平方向の投射運動を考察する際に，斜面上を下降してきた物体が速度を失うことなく，その運動方向を水平に変えるとみなし，その水平方向の速度の尺度として，斜面の高さを用いていた[*43]．またホイヘンスも遠心力の大きさを論じた際に，速度の基準として落下運動の高さを用い，遠心力が物体の重さと等しくなるのは，その速度が円の直径の４分の１のときであることを証明していた[*44]．このオイラーの「高さ」の考えは，このようなガリレオやホイヘンスの試みを受け継いだものだったと考えられる．

4. 運動方程式の発展　1740 年代

4.1「運動する表面上の物体の運動について」

1740 年代はオイラーの力学研究が大きく飛躍した期間である．『力学』においては，加速運動の分析に際して，働く力を物体の進行方向と垂直方向に分解して考えるホイヘンス以来の方法に従っていたが，この時期に，空間に固定された座標系を導入し，各座標に関して運動方程式を立てて物体の軌道を求めるという，我々も踏襲している方法を確立したのである[*45]．そしてこの時期に運動方程式自体の表現にも大きな変化が現われている．前章で検討したように，1740 年代初めまでは，オイラーは，運動の基本方程式として，$dv = \dfrac{Pdx}{M}$ といった一階の微分方程式を提示していたが，1740 年代中頃に，我々が通常運動方程式と呼んでいるような距離（座標）の二階微分方程式を提示し始めるのである．

その最初の試みは，「運動する表面上の物体の運動について」（1746）という論文に見出される．この論文は，表題の通り，斜面自体が運動しうるときに，その斜面上を下降する物体の運動を論じたものであって，この問題はヨハン・ベルヌーイとダニエル・ベルヌーイ，そしてクレーローがすでに論じていた[*46]．そこでオイラーは「作用力すなわち運動力」（“vis sollicitans seu motrix”）と「加速力」（“vis acceleratrix”）の関係を明確に述べている．両者の間に本質的な違いはなく，「加速力」は物体の単位質量当たりの「運動力」に他ならなく，すなわち「運動力」を質量で割っ

---

directe percutientium ”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 9, 1737 (1744), pp.50-76, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.8, pp.7-26, spec. p.13.

[*43] ガリレオは「頂高」（“suiblimitas”）と呼んでいる．Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*, in *Le opere di Galileo Galilei*, a cura di A. Favaro, Quarta edizione, Firenze, 1968, Vol.8, pp.281-283; 『新科学論議』（第３日），伊藤和行訳，伊藤俊太郎『ガリレオ』，東京，講談社，1985, pp.281-283.

[*44] Huygens, *De vi centrifuga*, 1703, *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, 22 tomes, Hague, 1880-1950, Vol. 18, pp.275-277; ホイヘンス 『遠心力論』，横山雅彦訳，『科学の名著　ホイヘンス』，東京，朝日出版社，1989，pp.98-100. ホイヘンスにおけるガリレオの落下法則の役割に関しては，拙稿「落下法則－古典力学の誕生と数学」参照.

[*45] 最初に空間固定座標系を設定し，運動方程式を立てたのは，Truesdell によれば，ヨハン・ベルヌーイである．Cf. Truesdell, C. A., “The Rational Mechanics of Flexibl or Elastic Bodies, 1638-1788 ”, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.11, Par.2, 1960, p.252.

[*46] “De motu corporum in superficiebus mobilibus”, *Opuscula varii argumenti*, 1, 1746, pp.1-136, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.6, pp.75-174, spec. p.75.

たものが「加速力」なのである[*47]．次いで他の論文と同様に，速さの尺度として落下物体が同じ速さを獲得する「高さ」を導入し，高さ b に対応する速さを $\sqrt{b}$ と表している[*48]．運動力が働く場合を落下運動と比較することによって，まず運動方程式 $dv = \dfrac{Pdx}{A}$ が以下のようにして導かれる．

> 13．先のように，直線 AB に沿って進む物体の質量は A のままであるとし，通過距離を $AP = x$，P においては高さ v に対応する速度があるとする．さて P において運動の方向 PB に沿って力 P によって推し進められ，そのために速度と，したがって高さ v は増大するとする．すると時間 dt においては，小距離 $Pp = dx$ だけ進むだろう．そして p では速さに対応する高さは $v + dv$ であるとする．さて加速力は $\dfrac{P}{A}$ だろうし，もしそれが単位に等しいならば，$dv = dx$ だろう．ゆえに，この場合には，dx 対 dv は 1 対 $\dfrac{P}{A}$ に等しく，よって $dv = \dfrac{Pdx}{A}$ となる．そういうわけで，速度に対応する高さの増大 dv 対距離要素 dx は働く運動力 P 対物体の質量 A に等しくなる[*49]．

以上の手続きは，すでに『力学』などで見られたものを繰り返したものに他ならないが，ここではさらに運動方程式 $dv = \dfrac{Pdx}{A}$ が距離と時間の2階微分を含んだ形式に変形されている．

> よって反対に，既知の要素 dv から，運動力が知られ，たしかに $P = \dfrac{Adv}{dx}$ となる．ここで速度の代わりに時間 t を計算に導入するならば，$dt = \dfrac{dx}{\sqrt{v}}$ であるので，$\sqrt{v} = \dfrac{dx}{dt}$ そして $v = \dfrac{dx^2}{dt^2}$ となる．もしすでに時間要素 dt が一定であると仮定されているならば，
>
> $$dv = \frac{2dxddx}{dt^2} = \frac{Pdx}{A} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{P}{A} = \frac{2ddx}{dt^2}$$
>
> となる．それより，時間と距離から運動力が，$P = \dfrac{2Addx}{dt^2}$ として定義されよう[*50]．

この二階微分の運動方程式の導出のおける鍵は $dv = \dfrac{2dxddx}{dt^2}$ である．独立変数となる時間に関しては，「時間要素 dt が一定である」とみなされているから，二階微分が0となるので，$ddt = 0$ である．$v = \dfrac{dx^2}{dt^2}$ より，$vdt^2 = dx^2$．両辺の微分を取ると，左辺$= d(vdt^2) = dv \cdot dt^2 + v \cdot d(dt^2)$．ここで $d(dt^2) = 2dt \cdot ddt$ であり，また $ddt = 0$ であるから，$d(dt^2) = 0$ となるので，左辺$=$ $dv \cdot dt^2$ となる．一方右辺$=$ $2dx \cdot ddx$ であるから，$dv \cdot dt^2 = 2dx \cdot ddx$．よって $dv = \dfrac{2dxddx}{dt^2}$ である．

最終的な式 $P = \dfrac{2Addx}{dt^2}$ において，係数2が表れているのは，『力学』と同様に，「高さ」の定義において $v = c^2$ とし，その一方で重量と質量との比を1とした，すなわち $\dfrac{G}{A} = 1$ としたこと

[*47] Ibid., p.79.
[*48] Ibid., p.81.
[*49] Ibid., p.83.
[*50] Ibid., p.83 .

による．現代的表記を用いれば，運動方程式において，比例定数を k として $f = kma$ とするとき，重力定数を g として，質量 m の物体の落下に関しては，$mg = kma$ より，$a = \dfrac{g}{k}$ となる．一方落下距離 h と速度 v の関係は，$h = \dfrac{v^2}{2a} = \dfrac{kv^2}{2g}$ である．ここで $h = v^2$ と仮定されているので $\dfrac{k}{2g} = 1$ より $k = 2g$，さらに $g = 1$ と置かれているので，よって $k = 2$ だから，運動方程式は $f = 2ma$ となる[*51]．

この論文において初めて二階微分を含む運動方程式が導出されたが，この定式化は特別な地位を当てられれているわけではなく，以前からの一階微分の運動方程式と同列に扱われ，問題によって使い分けが行われている．しかしここで注目すべきことは，オイラーが $ddx = pdt^2$ を $dc = pdt$ から微分計算によって直接導くのではなく，落下法則を前提にして導出された $dv = pdx$ を変形することによって導出している点である．

4.2 運動方程式と剛体の運動

オイラーは，1740 年代後半から表された一連の論文において，剛体の運動に関する研究を大きく発展させ，運動方程式を出発点として，剛体の運動方程式の導出へと進んでいく[*52]．剛体の運動をめぐる彼の研究は，惑星とりわけ地球の歳差運動や章動の研究と密接に結び付いていたが，その最終的な成果は，『剛体運動論』において，いわゆる「オイラー角」として結実している．この剛体の運動に関する一連の研究の中でもよく知られているのは，座標系を空間内に固定し，各成分に関して運動方程式を立てて解くことによって軌道を求めるという手続きを述べた「力学の新原理の発見」である．しかし，そのような試みが最初に提示されているは 1747 年に発表され

[*51] 係数 2 の説明は，後に「力の反作用によって運動させられる機械に関するきわめて完全な理論」（“Théorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau ”, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 10, 1754 (1756), pp.227-295, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.15, p.157-218, spec., pp.163-164.）において詳しくなされている．「以上ことすべては力学の第一の諸原理と物体に対する力の作用によって明らかである．それらによって，加速，すなわち速度の微分を時間の微分によって割ったものは，作用力を物体の質量で割ったものに比例することが知られる．よって，作用力は質量と，速度の微分を時間の微分で割ったものとの積，すなわち $\dfrac{mdu}{dt}$ に比例する．ゆえに作用力を $\dfrac{\alpha mdu}{dt}$ と置くことができる．ここで α はある定係数を表し，それは質量とともに速度や時間を表そうとする仕方に依存する．さて，質量を，それが地表で持つ重さによって表し，速度を落下物体が同じ速度を獲得するような高さの平方根によって，また時間を，一様運動において通過距離を速度で割ったものによって表すとすれば，数 2 が係数 α の正しい値を与えることがわかるだろう．なぜならば，一般式を，重い物体 m が自由に落下する場合に適用するだけでよいからである．その時間において，物体はすでに高さ x だけ落下しているとすると，よって速度 u は $\sqrt{x}$ となり，それでもって距離 dx を，時間 $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ において通過するだろう．というのは，無限小の距離 dx の間の運動は一様なものとみなされ得るからである．よって，$u = \sqrt{x}$ であるから，$du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}dt$，したがって $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2}$ である．ゆえに，我々の一般式 $\dfrac{\alpha mdu}{dt}$ によって，作用力は $\dfrac{1}{2}\alpha m$ となる．ところが作用力は，この場合には，物体の重さすなわち質量 m に等しい．これより，$\dfrac{1}{2}\alpha m = m$ となるためには，$\alpha = 2$ でなければならない．そして質量，速度，時間の計算において同じ導入方法を保持する限り，この値は α に適切だろう．」

[*52] この時期のオイラーの剛体運動に関する研究については，中田良一「Leonhard Euler による古典力学の解析化」参照.

た「天体の運動一般に関する研究」[*53] だった．そこでオイラーは，直交座標系における運動方程式を提示するとともに，座標変換によって極座標系における運動方程式を導出し，動径方向の式には，遠心力の項が現われることを示した．また働く力が中心力の場合には，角度方向の運動方程式からケプラーの惑星運動の第２法則を導出している．最初に３次元の直交座標系を設定した後，「物体運動の瞬間的変化」を表す３つの式が提示されている[*54]．

$$\text{I. } \frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \qquad \text{II. } \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \qquad \text{III. } \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

この二階の微分方程式の形式で表わされた運動方程式の導出については，簡単にしか触れられていない．まず「力学の知られた原理」として，一階の運動方程式 $du = pdt$（u：速度，p：加速力）が示され，通過距離の要素を ds とするとき，$u = \frac{ds}{dt}$ より，$du = \frac{dds}{dt}$ だから，$\frac{dds}{dt^2} = p$ になるとされている[*55]．また係数２については，各座標の速度の２乗 $\frac{dx^2}{dt^2}$，$\frac{dy^2}{dt^2}$，$\frac{dz^2}{dt^2}$ は「これらの速度に適合する高さ自体を表す」とされ，係数２に関して，「この関係のために，二階微分式は数２が掛けられている」としか述べられておらず，具体的な導出はされなかった[*56]．しかしながら，ここでの一階の運動方程式から二階の運動方程式の導出は，それまでのように「高さ」が介在することなく，純粋な微分演算のみによって行なわれていることには注目すべきである．

オイラーは，次いで二次元の極座標系を導入し，直交座標系からの座標変換によって動径方向と角度方向の運動方程式を導出し，ケプラーの第二法則のような，惑星運動の基本的な性質を証明している．このオイラーの試みはそれ以前のものに比べて非常に見通しの良いものだったが，それは出発点とした運動方程式の形式によるところが大であるとオイラーは考えていた．前章で検討したように，彼もそれまでの研究では，運動方程式として，速度と距離の関係を表わした一階の微分方程式を用いていた．一般に二階の微分方程式は一階のものに比べて解くのが困難であり，特別な必要性がない限り，一階の微分方程式を用いることは妥当だったと言えよう．しかしオイラーも述べているのだが，惑星運動を問題とする限り，物体の真の速度は問題ではなく，見かけ上の速度すなわち角速度が問題となるので，極座標系における二階の微分方程式によって表わされた運動方程式を用いる方が有利だったと考えられる[*57]．

[*53] "Recherches sur le mouvement des corps célestes en general, " *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 3, 1747 (1749), pp.93-143, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.25, pp.1-44.

[*54] Ibid., p.9.

[*55] Ibid., p.10.

[*56] Ibid., p.9.

[*57] オイラーは自らの方法について次のように述べている．「これらの問題を解くために，この問題について著わしてきた他の人たちが用いたものとは少し異なる方法を私は用いよう．彼らは最初に，各瞬間における運動が探究されている物体の真の速度を決定しようと努めた．そしてこの速度を通過距離と比較することから，物体が各瞬間に現われねばならない場所を結論として導いた．この十分に厄介な作業を避けるために，また天文学においては天体の真の速度はけっして問題とならないので，私はまず，経過した時間と惑星の見かけの位置の間の方程式に到達する方法を見出したが，それはこの研究を必ずとても著しく短くするのである．次に，上で望まれていることがほぼすべて角度に基づいているので，計算の中に正弦や余弦ではなく角自体を導入する際に用いる方法が，計算を短くし，天文学においてもっぱら目指されている結論をいっそう容易に導くことに大きく貢献すると考えている．最後に，私の方法に従えば，物体が描く線分の曲率を考慮しなくともよく，また，この方法によって，とりわけ物体の運動が同じ平面上でなされないときには，たくさんの骨の折れる研究が避けられるのである．」（Ibid., p.8）

オイラーが解析化された運動方程式を力学の種々の問題を考察する際の基礎として主張したものとして，しばしば取り上げられるのが，「力学の新原理の発見」(1752)*58という論文である．解析化された運動方程式は，オイラー以前にもベルヌーイらが用いていたし，空間に固定された座標系を用いることもヨハン・ベルヌーイによって試みられていたといわれる*59．オイラーは，無限に小さな物体すなわち質点の運動に関する力学的原理はすでに見出されているが，それは質点にとどまらず，剛体や流体などの有限な大きさを持つ物体すべての運動の唯一の基盤であると主張し，この論文では，剛体の運動を扱うための「力学の新原理」を提示すると述べる．この全力学の基盤となるのが，二階の微分方程式の形式で表わされた運動方程式である．たとえば x 座標に関しては $2Mddx = \pm Pdt^2$ となる*60．ここでオイラーは次の二点を注意する．第一点は，物体の質量を表す M は同時に地表における重量を表している，すなわち重力定数が 1 となる単位系が取られていることである．第二点は，速さの尺度として「高さ」を用いることである．これもオイラーがいつも用いる速度表現である．

> 物体の速度が $\dfrac{dx}{dt}$ に比例するとするとき，「この速さは，重い物体が高さ v から落下する際に獲得したものに等しいと仮定するならば，$\dfrac{dx^2}{dt^2} = v$ とせねばならず，すなわち時間要素は $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{v}}$ となるだろう．これより時間 t と距離 x との関係が知られる*61．

ここでは，もはや具体的に係数 2 を導くことはなされていない．オイラーは，上式 $2Mddx = \pm Pdt^2$ を「第一の原理，あるいはむしろ公理」（“les premiers principes, ou plutôt des axiome”）と呼び，すべての力学が基づくべき唯一の基礎とみなしていた．さらに力の大きさが 0 のときには，等速運動が導かれることから，この「公理」は第 1 法則すなわち慣性法則も含んでいると彼は考えていた*62．この論考の目的は，この式の対象が無限小の物体すなわち質点であることを踏まえて，それから有限な大きさを持つ物体，とくに剛体の運動を記述する方程式を導くことである．オイラーは，剛体の運動を，その重心の並進運動と重心の周りの回転運動に分解し，両者は無関係に論じることが可能であり，とくに後者の運動を記述する方程式を「公理」から導出する．重心を通る回転軸の方向に関する二つの方程式と，その周りの回転速度に関する方程式をもって，オイラーは「力学の新しい原理」と呼んだのだった*63．

オイラーは，この質点の運動方程式を「全力学が基づく一般的公理」（“l’axiome général, sur lequel est fondée toute la Mécanique”）*64 と呼ぶ一方で，その定式化が彼の独創であるとは述

---

*58 “Découverte d’un nouveau principe de Mécanique”, *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin*, 6, 1750 (1752), pp.185-217, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.5, pp.81-108.

*59 空間に固定された座標系の使用については，ラグランジュが『解析力学』第 2 部の初めで，マクローリンが最初に行なったと述べていることが一般に広まっているが，Truesdell によれば，マクローリンではなく，むしろヨハン・ベルヌーイに最初の試みが見られるという．Truesdell, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788*, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.11, Sec.2, pp.252-253.

*60 “Découverte d’un nouveau principe de Mécanique”, p.89.

*61 Ibid., p.89.

*62 Ibid., p.90.

*63 Ibid., p.105.

*64 Ibid., p.106.

べていない．彼の独創はむしろ，それから導出された物体の運動を記述する方程式にあるのである．また質点の運動方程式の起源については何も触れられておらず，ニュートンやガリレオの名前も挙げられていなかった．

5.『剛体運動論』

『剛体運動論』(1765)*65 は，『力学』と並んで，オイラーの力学上の主著とも言うべき大著であり，彼の剛体の運動に関する理論がまとめられている．この著作では，主題である剛体の運動が論じられる前に，その準備として質点の運動が導入部において扱われ，彼の力学の基本概念と基本法則が説明されている．慣性力すなわち運動物体の内在力が説明された後で，外力の作用による運動の変化を表わす運動方程式が，まず距離に関する二階の微分方程式として導かれ，その後で速度に関する一階の微分方程式に変形されるという，従来とは反対の手続きが取られている．

問題9

162. もし微小物体が任意の速度で運動し，同時にその運動の方向に沿って力が働くとき（図15），その運動と速度において生じる瞬間的な変化を定義すること．

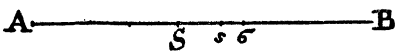

Fig. 15

解

A を微小物体の質量とし，それは方向 AB に沿って速度 v で運動し，もし外力が働かないならば，慣性によって，その速度でもって永久にその方向に一様に進んでいくだろう．すなわち，もし時間 t において距離 $AS = s$ を描き，よって微小時間 dt において微小距離 $Ss = ds$ を通過するならば，S における速度 v は $\dfrac{ds}{dt}$ となり，その速度は一定であるから，何らの力もなければ $\dfrac{dds}{dt^2} = 0$ となるだろう．さらに微小物体は，S を超えていく間に，力 p からその運動の方向 SB にそって作用を被ると仮定しよう．すると明らかに，運動はもはや一様ではなくなり加速されるだろう．これより，式 $\dfrac{dds}{dt^2}$ は零に等しくなく，何らかの正の値を持つだろう．たしかにこの式 $\dfrac{dds}{dt^2}$ は，微小物体が，内在する運動によって描く距離を超えて通過する微小距離を含んでいるので，それは作用力 p に比例し，質量 A に反比例する，すなわち $\dfrac{dds}{dt^2}$ は $\dfrac{p}{A}$ に比例するだろう．だがすべての量が定められた単位に還元されなければ，絶対的な等性は成り立ち得ない．よって差し当たっては，この等性を $\dfrac{dds}{dt^2} = \dfrac{\lambda p}{A}$ のように限定せずに示すことができる．ここで λ は以下で確定されねばならない単位によって決定されるべき数を示している．ゆえに作用力 p の結果は，要素 dt を一定とみなすと，$dds = \dfrac{\lambda p dt^2}{A}$ である．そして速度は $v = \dfrac{ds}{dt}$ であるので，$dds = dvdt$，それゆえ $dv = \dfrac{\lambda p dt}{A}$ となる．よって，

*65 *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.3.

> 力 p が微小物体 A において微小時間 dt で生じさせる速度の増分は，力の方向が運動の方向と一致し，そのために運動が加速されるならば，知られるのである[*66].

上の導出の出発点となるのは，$\frac{dds}{dt^2}$ が，作用力 p に比例し，質量 A に反比例する，すなわち $\frac{p}{A}$ に比例するという関係であるが，この比例関係に関しては何も説明されていない．なぜオイラーは，ここで従来通り一階微分方程式を導出するのではなく，二階の微分方程式を先に導出したのだろうか．そもそも，前半部分において，「S における速度 v は $\frac{ds}{dt}$ となり，その速度は一定であるから，何らの力もなければ $\frac{dds}{dt^2} = 0$ となる」とされているが，そこでは，$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}) = 0$ より $\frac{dds}{dt^2} = 0$ が導出されているからである．そして「$\frac{dds}{dt^2}$ は $\frac{p}{A}$ に比例する」という関係は，$\frac{dds}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ という関係を考えれば，「$\frac{dv}{dt}$ は $\frac{p}{A}$ に比例する」と読みかえることができる．したがって，上の導出とは反対に，運動の加速が力に比例することから速度の一階微分方程式を先に導出することも可能であり，むしろその方が自然なように思われるが，オイラー自身はこの点には何も触れていない．

オイラーは運動方程式の導出に続いて，落下運動を用いて運動方程式の比例定数 λ の値を決定している．ここでは，従来とは異なって「高さ」はもはや用いられず，新しい定数が導入されている．まず静止からの落下運動における通過距離を，$dds = \frac{\lambda pdt^2}{A}$ を二度積分することによって $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$ を導出する[*67]．そして質量は地表における重さによって表すものとして $\frac{p}{A} = 1$ と置くと，落下距離は $s = \frac{1}{2}\lambda t^2$ と表わされる[*68]．ここで速度の単位としては，1秒間に一様運動によって通過される距離を取る．さらに1秒間での落下距離 g を導入する．すると $s = \frac{1}{2}\lambda \cdot 1^2 = g$ より，$\lambda = 2g$ となる．かくして運動方程式は $ddx = \frac{2gpdt^2}{A}$ と表されることになる[*69].

この新しい係数 g は，1758 年に発表された「可変軸の周りの剛体の回転運動について」[*70] においてすでに導入されていた．ただしそこでは，運動方程式として，距離の二階微分方程式ではなく，速度の一階微分方程式 $dv = \frac{2gpdt}{m}$ が用いられている．

> さて，ある物体の質量が m であって，速さ v で直線上を運動し，力 p が同じ方向に沿って働くならば，時間要素 dt における速度の増分 dv は式 $\frac{pdt}{m}$ に比例することが知られている．しかし，その計算を絶対的な尺度に還元するためには，もし質量 m を物体が地上で持つ重さによって，力 p を物体に等しい錘によって，時間 t を秒によって，そして速度 v を1秒間に通過される距離によって表すならば，ある重い物体が，その重さが評価された場所で1秒間に

---

*66 Ibid., pp.75-76.
*67 Ibid., pp.84-85.
*68 Ibid., pp.87-88.
*69 Ibid., pp.89-90. この g の値は重力定数 G の半分である，すなわち $g = \frac{1}{2}G$ であるから，$ddx = \frac{Gpdt^2}{A}$ となる．
*70 "Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable", *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 14, 1758 (1765), pp.154-193, *Opera Omnia*, Ser.2, Vol.8, pp.200-235.

落下する高さ g を導入しなければならない．すると，式

$$dv = \frac{2gpdt}{m}$$

は正しい尺度を導くだろう．ゆえに時間 dt において生じる速度の増分 dv を求めると，物体の質量 m より，この加速が生じるのに必要な力は運動の方向に沿って働き，次のようになる．

$$p = \frac{mdv}{2gdt}$$

この計算を絶対的な尺度に適合させるやり方は，私が他の所で用いたものとは異なっているが，はるかに容易である[71]．

この１秒間における落下距離 g を比例定数とする基準系は，1760 年代以降のオイラーの著作において頻繁に用いられている．とりわけ 1770 年代に書かれた物体の振動を扱った論考においては，ほとんどで，この g が採用されている．

6. 結論

我々にとって，運動方程式は力学の基礎であり，前提とされるのものであるが，オイラーにとっては導出されるべきもの，証明されるべきものだった．オイラーの運動方程式の導出および表現をたどるとき，初期にはガリレオの落下法則が重要な役割を果たしていたことがわかる．微小時間においては，働く力が一定とみなされうることから，通過距離は時間の２乗に比例することを一般的な加速運動にも適用し，さらに力の作用に微小時間における通過距離が比例するということから，運動方程式を導出するのである．その結果導かれた運動方程式は「高さ」の一階微分方程式 $dv = Pdx$ という特殊な表現を取っていた．微小時間における落下法則を加速運動の数学的理論の基礎とすることはニュートン，そしてヴァリニョンにおいて見られたものであり，その意味では，オイラーの運動方程式の導出は彼らの試みを受け継いだものだった．

オイラーの運動方程式の導出過程と表現形式，そして具体的な問題における適用方法は 1740 年代中頃に大きく転換している．速度すなわち「高さ」の一階微分方程式ではなく，座標の二階微分方程式が力学理論の中心を占めるようになった．オイラーは，それまではベルヌーイらと同様に，物体に固定された座標系において，幾何学的に距離や速度，時間に関する微分量の関係式を導出していたが，この時期に，空間に固定された座標系を採用し，各座標における運動方程式から軌道を求めるという方法を見出し，さらに天体運動の問題などにおいては極座標系も導入していた．そして彼は，運動方程式を，振動や剛体の運動といったすべての力学の問題を考察する際の出発点とみなして体系的に用い，それらの問題をより一般的に解く方法の研究へ進んでいったのである．

オイラーの運動方程式における特異な係数は前提となる単位系によるものだったが，その導出過程においてガリレオの落下法則が果たす役割は時間とともに次第に小さくなっていった．初期

[71] Ibid., pp.206-207.

には，運動方程式の導出に際して，落下法則が本質的な役割を果たしており，「高さ」は係数の値を決定するのみならず，運動方程式自体の形体も限定していた．しかし後期においては，落下運動は係数導出の出発点であることは変わらなかったが，「高さ」は係数決定の基準ではもはやなくなっている．

オイラーは，空間に固定された座標系に関して運動方程式を立てるという力学の標準的な問題解法を築いたのだったが，その際にニュートンの第二法則にはまったく言及していなかった．彼には，運動方程式と第二法則を結びつける発想は存在しなかったと言えよう．そして，このニュートンの第二法則を運動方程式に結びつける考えは，18 世紀前半活躍した他の研究者にも見られないのである．たとえばオイラーの好敵手だったダランベールは，運動の三法則として，慣性法則，力の合成法則，作用・反作用の法則を挙げる一方で，$p = \frac{dv}{dt}$ を力の定義とみなしていた[*72]．またダランベールは，『百科全書』の「力学」という項目において動力学の歴史を振り返っているが，そこでも動力学の発展をガリレオの落下法則を出発点とする，加速運動の議論の一般化として捉え，ニュートンの法則はまったく言及していない[*73]．むしろガリレオの落下法則を加速運動の考察の出発点と捉え，それ以降の発展を，その一般化，解析化と捉える見方の方が，オイラーやダランベールら，18 世紀の中頃に活躍した学者には一般的なものだったと考えられる．

[*72] d'Alembert, *Traité de dynamique*, Paris, 1743, pp.18-19. Cf. Hankins, T. L., *Jean d'Alembert: Science and the Enlightenment*, pp.184-185. ヒューウェルは，『帰納的諸科学の歴史』（1837）において運動の三法則について述べているが，それらには運動方程式は含まれていなかった．拙稿「古典力学における運動法則の歴史性－ニュートンの第二法則をめぐって－」，『哲学研究』，No.570，2000，pp.53-78 参照.

[*73] 「オランジュ公の数学者ステヴィンに力の合成の原理を負っており，後にヴァリニョンがそれを機械の釣合に巧みに適用した．ガリレオには加速の理論を，ホイヘンス，レン，ウォリスに衝突の法則を，またホイヘンスに円における中心力の法則を，ニュートンにはこの法則の他の曲線と世界体系への拡張を，そして最後に今世紀の数学者に力学の原理を負っている．」（d'Alembert, "Méanique,"in *Encyclopédie, ou dictionnaire reisonné des sciences, des arts et des métiers, ...*, Paris, 1751-1772; repr.(CD-ROM), Paris, 1999.