量化様相論理での二様相分割

佐野勝彦*

1 序論

通常の一様相論理では，到達可能性の推移性や反射性といった諸性質に，それぞれ，$\Box p \to \Box\Box p$ や $\Box p \to p$ といった論理式が対応するという（驚くべき）結果が知られている一方で，到達可能性が非反射性をみたすことや半順序をなすことは表現できない [3, Example 3.15, Exercise 3.3.2]．こういった表現力の弱さを克服するために，これまでに様々な語彙を加えることが提案されてきている [11, 2, 5]．筆者は，既存の試みよりも，到達可能性が非反射性をみたすことや半順序をなすことを表現できる程度には，表現力が適度である一方で，完全性や有限モデル性といった好ましいメタ論理的な性質をみたす，様相言語の一拡大を提案してきた [12]．筆者の試みは，到達可能性 R に関連付けられる，通常の $\Box A$ （A は必然的である） に加え，到達可能性 $(R\cap \neq)$ に関連付けられる，新たな様相 $\blacksquare A$ （A は到達可能な世界のうち，現実世界以外で必然的だ）を語彙として加えることにある[*1]．この様相 $\blacksquare$ に関し，[7] の結果からわかったのは，様相論理でのタブロー法 （モデル集合システム [15, p.109]）にうまくかみ合う，という事実である．実際，筆者の試みとは独立に，様相論理の証明図探索 [9] では，ループチェック[*2] を避けるための補助記号として，$\blacksquare$ という記号が用いられており，特に，公理系 **KT** のゲンツェン流の証明体系で反例モデルを構成する際には，補助的な記号 $\blacksquare$ に $(R\cap \neq)$ という意味付けが与えられている [9, ch.2]．筆者の試み [12] は，$\blacksquare$ を証明図探索という文脈に限らず，一般的な文脈でそのメタ論理的な性質を明らかにするものであった．

到達可能関係 R をグラフとみなし，集合 R から，集合 $(R\cap \neq)$ を取り除いた集合は，$(R\cap =)$ である．このとき，$(R\cap =)$ に関連付けられる様相 $\boxdot$ を考えることで，通常の正規様相 $\Box$ を交わりをもたないように，$\blacksquare$ と $\boxdot$ の二つに分割できる．様相 $\boxdot$ は，プログラムが繰り返し実行される状況を記述する語彙として，ダイナミック論理の分野で議論されてきている [4, 1]．このように，二様相分割は，表現力を適度に増す試みであるだけでなく，複数の分野で独立に研究されている二つの様相を統一的に扱う試みである，といえる．

* 京都大学大学院文学研究科博士課程 ksano@sings.jp

*1 ここで，$(R\cap\neq)$ は（関係をグラフとみて），$(R\cap\neq) = \{\,\langle x, y\rangle \mid xRy$ かつ $x \neq y\,\}$ と定める．また，以下で用いられる $(R\cap =)$ も同様に，$(R\cap =) = \{\,\langle x, y\rangle \mid xRy$ かつ $x = y\,\}$ と定める．

*2 ループチェックとは，証明探索の過程で，新たに得られた式が，これまでにすでに得られていないか，をチェックするプロセスをいう．

本稿では，分割言語が，命題論理と量化論理の二つのレベルで，完全性をみたすか，という問題に焦点を絞り，その問題を考察することを通じて，量化拡大を考察することが，様相を分割することの本質に迫る試みであることを明らかにする．まず，第二節では，命題様相論理での二様相分割を扱い，その後，第三節でその完全性を示す．次に，第四節で，量化様相論理の語彙や意味論の準備をした後，第五，六節で，第三節の命題様相論理での完全性証明の各ステップの論法が，量化様相論理においても適用できるかを検討する．第五節では，命題様相論理での論法を素朴に適用すると，量化様相論理に特有の理由から難点が生じることを見る．第六節では，その難点を回避し，二様相分割した量化様相論理の完全性を示す．以下，本稿では，‘ $\Longrightarrow$ ’ を「ならば」，‘$\Longleftrightarrow$’ を「ときそのときに限り」を表すメタな記号とする．

2　命題様相論理での二様相分割

様相演算子として $\blacksquare$ （到達可能な世界のうち自分自身以外で必然的に–である）と $\boxdot$ （自分自身に到達可能ならば–である）とをもち，ブール結合子（$\sim$, $\to$），および，命題変数の集合 $\mathsf{Prop} = \{\, p_n \,|\, n \in \omega \,\}$，括弧（(,)），という語彙をもつ（可算な）二様相言語を考える．この言語での**論理式**（A, B, C 等で表す）を再帰的に定め，$\vee$(選言)，$\wedge$(連言)，$\leftrightarrow$(実質同値)，$\bot$(矛盾式)，$\top$(恒真式) などをいつも通りの略記として導入する．論理式の集合は，Γ, Δ, Λ 等で表す．もちろん，$\blacksquare$ と $\boxdot$ で，$\Box$ （必然的に–である） を分割することを考えるので，$\Box A := \blacksquare A \wedge \boxdot A$ （ただし，$:=$ は略記であることを示すメタな記号）と定める．$\Diamond A$ （A が可能である）は $\Box$ を使っていつも通り，$\sim\Box\sim A$ なる双対として定め，$\blacklozenge A$ （到達可能な世界のうち自分自身以外で A が可能である）や $\Diamonddot A$ （自分自身に到達可能であり，かつ，A である）も，同様に，それぞれ $\blacksquare$ と $\boxdot$ を使って双対として定めておく．$\Diamonddot A$ の読みを考えると，$\Diamonddot\top$ が「自分自身に到達可能だ」という読みをもつことがわかる．そこで，この $\Diamonddot\top$ を略記とする，**様相定項** loop を考えておこう．

上述のように定義された論理式に，クリプキ意味論により各世界に相対的に真偽を割り振ることを考える．空でない集合 W と，その上の関係 R からなる対を（命題様相論理の）**一様相フレーム**という．一様相フレーム $\langle W, R\rangle$ と命題変数への付値函数 $I : \mathsf{Prop} \to \mathcal{P}(W)$ （ただし，$\mathcal{P}(W)$ は W の冪集合） の対を，（命題様相論理の）**一様相モデル**という．その読みから明らかなように，$\blacksquare$ には到達可能性として $(R\cap \neq)$ を，$\boxdot$ には到達可能性として $(R\cap =)$ を使って意味を与えることとなる．論理式の真偽を厳密に定義する前に，一様相フレーム，一様相モデルに類比的に，空でない集合上の二つの関係 $S_\blacksquare$, $S_\boxdot$ をもつ**二様相フレーム** （$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ 等で表す），**二様相モデル** （$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 等で表す） を定義したときにも，意図する意味が与えられることを確認しておこう．二様相フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, S_\blacksquare, S_\boxdot\rangle$ の W 上の関係 R に対し，$S_\blacksquare = (R\cap \neq)$, $S_\boxdot = (R\cap =)$ とかけるとき，二様相フレーム $\mathfrak{F}$ を **R-分割フレーム** （**R-分割モデル**は R-分割フレームと付値函数 I の対とする）と呼ぶことにしよう．我々は，二様相の R-分割フレームから一様相フレームを構成できるし，また逆に，一様相フレームが与えられたときに，二様相の R-分割フレームを構成できる．このように，いずれの枠組みを用いても，様相演算子 $\blacksquare$ や $\boxdot$ に意図する

意味を与える上では問題がない．そこで，以下では，技術的便宜から，より一般的に，二様相フレーム（及びモデル）を用いて議論を進める．

二様相モデル $\mathfrak{M} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, I \rangle$, $w \in W$，論理式 A に対して，**充足関係** $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ （「A は $\mathfrak{M}$ の w で真である」）は以下のように再帰的に定義される:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash p_n &\iff w \in I(p_n) \quad (n \in \omega);\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \sim A &\iff \mathfrak{M}, w \Vdash A \text{ でない};\\
\mathfrak{M}, w \Vdash A \to B &\iff \mathfrak{M}, w \Vdash A \text{ でない，あるいは}, \mathfrak{M}, w \Vdash B;\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \blacksquare B &\iff wS_{\blacksquare}x \text{ なる，すべての } x \text{ について } \mathfrak{M}, x \Vdash B;\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \boxdot B &\iff wS_{\boxdot}x \text{ なる，すべての } x \text{ について } \mathfrak{M}, x \Vdash B.
\end{aligned}$$

その上で，「A が $\mathfrak{M}$ の w で偽である」を，自然に，$\mathfrak{M}, w \Vdash A$ でない（これを $\mathfrak{M}, w \nVdash A$ と表す） こととして定める．

二様相モデル $\mathfrak{M}$ が R-分割モデルならば，$S_{\blacksquare} = (R \cap \neq)$, $S_{\boxdot} = (R \cap =)$ とかけるのだから，$\blacksquare B$ と $\boxdot B$ に関する条項は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \blacksquare B &\iff w(R \cap \neq)x \text{ なる，すべての } x \text{ について } \mathfrak{M}, x \Vdash B,\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \boxdot B &\iff [wRw \text{ ならば } \mathfrak{M}, w \Vdash B],
\end{aligned}$$

となる．また，R-分割モデル $\mathfrak{M}$ では，$\blacklozenge B$, $\diamonddot B$, $\Box B$ や loop に関しては，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \blacklozenge B &\iff w(R \cap \neq)x \text{ なる，ある } x \text{ について } \mathfrak{M}, x \Vdash B,\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \diamonddot B &\iff [wRw \text{ かつ } \mathfrak{M}, w \Vdash B],\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \Box B &\iff wRx \text{ なる，すべての } x \text{ について } \mathfrak{M}, x \Vdash B,\\
\mathfrak{M}, w \Vdash \mathsf{loop} &\iff wRw,
\end{aligned}$$

となり，意図した読みが反映される．ここで，その真理条件から，勝手に選んだ R-分割モデル $\mathfrak{M}$ の任意の w について，$\mathfrak{M}, w \Vdash (\mathsf{loop} \to A) \leftrightarrow \boxdot A$ が成立する（図 1 を参照されたい）．このように，$\boxdot A$ は，loop を用いて表すこともできる．

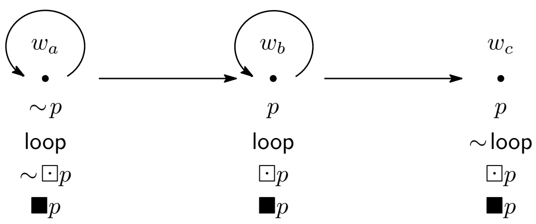

図 1　R-分割モデル（一様相モデル）の例

論理式 A が二様相フレーム $\mathfrak{F}$ 上のどのような付値函数の下でも，すべての世界で真となるとき，A **は** $\mathfrak{F}$ **で妥当である**，といい，$\mathfrak{F} \Vdash A$ と表す（その否定を $\mathfrak{F} \nVdash A$ と表す）．また，F を二様相フレームからなる集まりとしたとき，すべての $\mathfrak{F} \in \mathsf{F}$ について，$\mathfrak{F} \Vdash A$ となるとき，A **は** F **で妥当である**，といい，これを，$\mathsf{F} \Vdash A$（そして，その否定を $\mathsf{F} \nVdash A$）と表す．K を，二様相フ

レームすべてからなる集まり，$\mathsf{K}_D = \{\, \mathfrak{F} \in \mathsf{K} \mid$ ある R について $\mathfrak{F}$ は R-分割フレーム $\}$ と定め，以下では K や K_D を固有名詞のように使う[*3]．すでに述べたように，K_D の要素である，R-分割フレームは，一様相フレームと同一視でき，一様相フレームは，K_D の要素とみなせるので，K_D は一様相フレームすべてからなる集まりに相当する．

K_D の要素である，R-分割フレームは二様相フレーム（すなわち，K の要素）であるが，逆に，二様相フレームは，K_D の要素である，とは限らない．しかし，ある一定の条件をみたす二様相フレームは，K_D の要素へと変型できる．まず，論理式の妥当性を保ちつつ，フレームの形状を変型する道具立て（二様相 p-モーフィズム）を導入しよう．なお，このフレームの変型に関する議論は，のちに公理系を導入し，完全性を証明する際に不可欠な論法となる．二様相フレーム $\mathfrak{F} = \langle\, W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot} \,\rangle$, $\mathfrak{F}' = \langle\, W', S'_{\blacksquare}, S'_{\boxdot} \,\rangle$ に対して，$f : W \to W'$ が **二様相 p-モーフィズム**である（$f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ と表す），とは，f が，

($S_{\blacksquare}$-forth)　$xS_{\blacksquare}y$ ならば $f(x)S'_{\blacksquare}f(y)$;

($S_{\blacksquare}$-back)　$f(x)S'_{\blacksquare}y'$ ならば，ある $y \in W$ が選べて $f(y) = y'$ かつ $xS_{\blacksquare}y$,

および，同様に定義された ($S_{\boxdot}$-forth) と ($S_{\boxdot}$-back) をみたす場合である．$\mathfrak{F}'$ が $\mathfrak{F}$ の**二様相 p-モーフィズムによる像である** ($\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$ と表す)，とは，ある $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ が選べて，f が全射となる場合である．例えば，図 2 において，$\mathfrak{G} = \langle\, \{\, c_1, c_2 \,\}, S_{\blacksquare}, \emptyset \,\rangle$，ただし，$S_{\blacksquare} = \{\, \langle\, c_1, c_2 \,\rangle, \langle\, c_2, c_1 \,\rangle \,\}$,

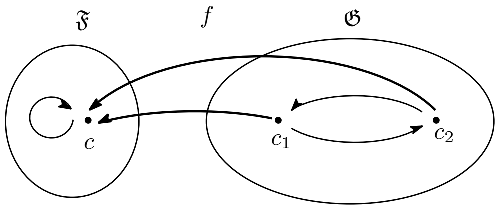

図 2　二様相 p-モーフィズム，及び，分割実現の例

$\mathfrak{F} = \langle\, \{\, c \,\}, S'_{\blacksquare}, \emptyset \,\rangle$，ただし，$S'_{\blacksquare} = \{\, \langle\, c, c \,\rangle \,\}$，とすると，図中の函数 f は全射の二様相 p-モーフィズムとなる．二様相 p-モーフィズムに関して，次の事実 [3, Theorem 3.14 (ii)] が成立する．

事実 2.1. $\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$ ならば，任意の論理式 A について，$\mathfrak{F} \Vdash A \implies \mathfrak{F}' \Vdash A$.

この事実が成り立つ意味で，全射の二様相 p-モーフィズムは，論理式の妥当性を保ちつつ，フレームの形状を変えることを可能にしてくれるのである．

それでは，どのような条件をみたす K の要素が，全射の二様相 p-モーフィズムを用いて K_D の要素へと，どのような仕方で変型できるのか，を見ておこう．まず，言葉遣いを整理するため，$\mathfrak{F} \in \mathsf{K}$, $\mathfrak{G} \in \mathsf{K}_D$ に対し，$\mathfrak{G} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$ ならば，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{F}$ の **分割実現**である，ということにしよう（p-

[*3] K_D の添え字の D は，分割，division の頭文字の d である．

モーフィズムの向きに注意されたい).すると,どのような条件をみたす $\mathfrak{F} \in \mathsf{K}$ が分割実現をもつか,を明らかにしてくれるのが,次の命題である.

命題 2.2. $\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot} \rangle \in \mathsf{K}$ について,$S_{\boxdot} \subset =$ とせよ.このとき,ある $\mathfrak{G} \in \mathsf{K}_D$ が選べて,$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{G}$ の分割実現である.

この命題の証明のアイデアを図 2 を用いて説明しておく.図 2 の $\mathfrak{F}$ は命題 2.2 の仮定を自明にみたす($S_{\boxdot} = \emptyset$ だから).このとき,$\mathfrak{F}$ 中の $S_{\blacksquare}$ に関し反射的な世界 c を,お互いに '$S_{\blacksquare}$' で関係付けられた二つの世界 c_1, c_2 で置換する,という操作を行うことで,図 2 の $\mathfrak{G}$ を構成する.元のフレームの濃度が無限であっても,ここで述べた議論は一般化できる(詳細は,Appendix の証明を参照されたい).このように,$S_{\boxdot} \subset =$ をみたす K の要素には,必ず分割実現となる $\mathfrak{G} \in \mathsf{K}_D$ が存在するのである.

3　完全性: 命題様相論理の場合

意味論から公理系の議論へとうつり,$\blacksquare$ と $\boxdot$ とに意図する意味を与えた場合の公理系を与えよう.その公理系 **Kd** は命題論理の公理型と推論規則([16, p.56] を見よ)に加え,次のものから成る.

($\blacksquare$1)	$\blacksquare(A \to B) \to (\blacksquare A \to \blacksquare B)$	($\boxdot$2)	$A \to \boxdot A$
($\boxdot$1)	$\boxdot(A \to B) \to (\boxdot A \to \boxdot B)$	($\blacksquare$-規則)	A から $\blacksquare A$ を導く

ここで,演繹関係 $\vdash$ はいつも通り決めておく.($\boxdot$-規則)「A から $\boxdot A$ を導く」は ($\boxdot$2) から導かれる.($\boxdot$2) 以外は,一様相論理の公理系 **K** [6, p.26] と同様の形をした公理であるので,($\boxdot$2) の意味を説明しておこう.その意味は,「A が成り立ち,かつ,自分自身に到達可能なら,A が成り立つ」という自明な内容である.さらに,$\boxdot A$ が $\mathsf{loop} \to A$ と意味論的に同値であったことを思い出すと[*4],($\boxdot$2) は,$A \to (\mathsf{loop} \to A)$ とも理解できる.この公理系からは,$\Box$ に関する,$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ や ($\Box$-規則)「A から $\Box A$ を導く」や $A \to \boxdot\dot{\Diamond} A$ ($\boxdot$ に関する B の公理) をも導くことができる.[*5] この公理系 **Kd** が K_D に対して**健全性**をみたすこと,すなわち,「任意の論理式 A について,**Kd** $\vdash A$ ならば $\mathsf{K}_D \Vdash A$ となる」ことは,$\vdash A$ に関する帰納法で示すことができる.この節の残りの部分では,この含意関係の逆である次の定理,**完全性**を証明することを目標にしよう.

定理 3.1. 任意の論理式 A について,$\mathsf{K}_D \Vdash A$ ならば **Kd** $\vdash A$.

[*4] 後に証明する $\sim\boxdot A \to (\boxdot B \to B)$ という **Kd** の定理を用いて,$(\mathsf{loop} \to A) \leftrightarrow \boxdot A$ もまた **Kd** の定理となることを示すことができる.注 15 をみよ.

[*5] $A \to \boxdot\dot{\Diamond} A$ のみ証明する.このためには,$\boxdot(A \to \dot{\Diamond} A)$ を導けば十分であろう(その後,($\boxdot$1) と ($\boxdot$2) を適用せよ).以下で,'PC' は命題論理の公理および推論規則から得られる定理もしくは導推論規則を表す.

1.	$\boxdot \sim A \vee \sim\boxdot \sim A$	PC	6.	$\sim\boxdot \sim A \to \boxdot(\boxdot \sim A \to \sim A)$	4, 5, PC
2.	$\sim A \to (\boxdot \sim A \to \sim A)$	PC	7.	$\boxdot(\boxdot \sim A \to \sim A)$	1, 3, 6, PC
3.	$\boxdot \sim A \to \boxdot(\boxdot \sim A \to \sim A)$	2, ($\boxdot$1), PC	8.	$(\boxdot \sim A \to \sim A) \to (A \to \dot{\Diamond} A)$	PC
4.	$\sim\boxdot \sim A \to (\boxdot \sim A \to A)$	PC	9.	$\boxdot(\boxdot \sim A \to \sim A) \to \boxdot(A \to \dot{\Diamond} A)$	8, ($\boxdot$1), PC
5.	$(\boxdot \sim A \to A) \to \boxdot(\boxdot \sim A \to A)$	($\boxdot$2)	10.	$\boxdot(A \to \dot{\Diamond} A)$	7, 9, PC

この定理の証明のためには，一様相論理の完全性証明のとき [6, ch.6] と同様に，公理系のカノニカルモデルを構成する．そのための準備として，論理式の極大無矛盾集合を定義しよう．論理式の集合 Γ が $\mathbf{Kd}$ で**無矛盾**である，とは，Γ の任意の有限部分集合 Δ に対して，$\mathbf{Kd} \nvdash \sim \bigwedge \Delta$，ただし，$\bigwedge \Delta$ は Δ の要素をすべて $\wedge$ でつないだもの，が成り立つ場合であり，Γ が**極大**である，とは，任意の論理式 A に関して，$A \in \Gamma$ あるいは $\sim A \in \Gamma$ が成り立つ場合，とする．そして，Γ が $\mathbf{Kd}$ で**極大無矛盾**である，とは，Γ が極大，かつ，$\mathbf{Kd}$ で無矛盾である場合と定める．ここで，$\mathbf{Kd}$ で極大無矛盾な Γ, Δ について，$\Gamma \subset \Delta \implies \Gamma = \Delta$ が成り立つことに注意されたい．また，無矛盾な Λ は，$\Lambda \subset \Delta$ なる極大無矛盾な Δ へと拡大できる（証明は [6, Lemma 6.2] を見よ）．

さて，$\mathbf{Kd}$ の**カノニカルモデル** $\mathfrak{M}^{\mathbf{Kd}} = \langle W^{\mathbf{Kd}}, S_{\blacksquare}^{\mathbf{Kd}}, S_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}}, I^{\mathbf{Kd}} \rangle$ は二様相モデルとして，以下のように定義できる．

$$\begin{aligned}
W^{\mathbf{Kd}} &= \{ w \mid w \text{ は } \mathbf{Kd} \text{ で極大無矛盾} \}. \\
wS_{\blacksquare}^{\mathbf{Kd}}w' &\iff \text{任意の論理式 } A \text{ について，} \blacksquare A \in w \text{ ならば } A \in w'. \\
wS_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}}w' &\iff \text{任意の論理式 } A \text{ について，} \boxdot A \in w \text{ ならば } A \in w'. \\
I^{\mathbf{Kd}}(p_n) &= \{ w \in W \mid p_n \in w \} \quad (n \in \omega).
\end{aligned}$$

なお，$\mathfrak{F}^{\mathbf{Kd}} = \langle W^{\mathbf{Kd}}, S_{\blacksquare}^{\mathbf{Kd}}, S_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}} \rangle$ としておこう．$\mathfrak{M}^{\mathbf{Kd}}$ では，次の二つの補助定理が成立する．

補助定理 3.2. $S_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}} \subset =$.

(**証明**) $wS_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}}w'$ なる $w, w' \in W^{\mathbf{Kd}}$ について考える．$w = w'$ を示せばよいので，w, w' が極大であることに注意して，$w \subset w'$ を示す．$A \in w$ とせよ．すると，$\mathbf{Kd} \vdash A \to \boxdot A$ より，$A \to \boxdot A \in w$ なので，$\boxdot A \in w$．$wS_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}}w'$ の定義より，$A \in w'$． (**証明終**)

補助定理 3.3. 任意の $w \in W^{\mathbf{Kd}}$，任意の論理式 A に対し，$A \in w \iff \mathfrak{M}^{\mathbf{Kd}}, w \Vdash A$.

この補助定理は，カノニカルモデルの基本定理と呼ばれるもので，一様相論理の場合と同様に，A の構成に関する帰納法により証明できる（詳細は，[6, Theorem 6.5] を見よ）．

このような準備の下で，定理 3.1 が証明できる．A を論理式とし，対偶を示そう．

(Step 1) $\mathbf{Kd} \nvdash A$，すなわち，$\sim A$ は $\mathbf{Kd}$ で無矛盾，とする．$\sim A$ を含む $\mathbf{Kd}$ で極大無矛盾な集合 w を作る．このとき，$A \notin w$.
(Step 2) 補助定理 3.3 より，$\mathfrak{M}^{\mathbf{Kd}}, w \nVdash A$，よって，$\mathfrak{F}^{\mathbf{Kd}} \nVdash A$.
(Step 3) 公理 ($\boxdot$1) $A \to \boxdot A$ より，$S_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}} \subset =$ である（補助定理 3.2）．
(Step 4) $S_{\boxdot}^{\mathbf{Kd}} \subset =$ なる $\mathfrak{F}^{\mathbf{Kd}}$ の分割実現 $\mathfrak{G} \in \mathsf{K}_D$ を作る（命題 2.2）．
(Step 5) $\mathfrak{F}^{\mathbf{Kd}} \nVdash A$ ゆえ，(Step 4) と事実 2.1 より，$\mathfrak{G} \nVdash A$．よって $\mathsf{K}_D \nVdash A$. (**証明終**)

一様相論理の公理系 $\mathbf{K}$ に対する完全性 [6, p.119] と定理 3.1 とによって，命題様相論理のレベルで，正規様相の二様相への分割が，完全性という望ましいメタ論理的な性質を保存することを，明らかにできた．

4 量化様相論理での二様相分割

命題様相論理で完全性という性質を保存する二様相分割が量化様相論理においても同様の性質をみたすか，という問題を本稿の残りの節全体で扱う．量化様相論理と言っても，命題様相論理の語彙に，全称記号 $\forall$ のみをを加え，命題変数を量化する二階の命題様相論理を考える場合と，$\forall$ のほかに，変数記号，定数記号，述語記号を加え，個体変数を量化する一階述語様相論理を考える場合とが考えられるが，本稿では後者のみを扱う．

量化様相論理の式を扱う準備として，$\equiv$ は，記号として等しいことを表すメタ記号とし，記号列 α の中の文字 x をすべて記号列 β で置換した結果の記号列を $\alpha[\beta/x]$ とかこう．次に，量化様相論理の言語の語彙を厳密に与えておこう．**量化様相論理の言語** $\mathcal{L}$ の語彙は，命題様相論理の語彙（様相演算子: $\blacksquare$, $\boxdot$，ブール結合子: $\sim$, $\to$，命題変数の集合 Prop）に加えて，(1) 可算無限個ある自由変数記号（a, b 等で表す），(2) 可算無限個ある束縛変数記号（x, y 等で表す），(3) 有限または可算無限個ある，定数記号（$\mathbf{c}, \mathbf{d}$ 等で表す），(4) 有限または可算無限個ある，述語記号（ただし，各述語記号には，1 以上の有限の引数の個数が決まっている．$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 等で表す），(5) 量化記号: $\forall$，をもつ[*6]．自由変数記号および定数記号のことを**項**と呼ぶ．言語 $\mathcal{L}$ における**論理式**はいつも通り再帰的に定め（例えば，[8, p.28] をみよ），自由変数記号が出現しない論理式を**閉論理式**と呼ぶ．命題様相論理の場合と同様に，A, B, C 等で論理式を，Γ, Δ 等で論理式の集合を表すのに加えて，t, s などで項を表す．**論理式の長さ**をその論理式に含まれる，命題結合子，量化記号，様相演算子の総数によって定義する．最後に，この節以降の議論では，言語 $\mathcal{L}$ の定数記号のみを増やした言語や言語 $\mathcal{L}$ の自由変数記号のみを増やした言語を考えることがあるが，その場合も，$\mathcal{L}$ と同様の再帰的な条項により論理式を定義するものとする．また，一般的に, 量化様相論理の言語 $\mathcal{L}_1$ に対し，$V(\mathcal{L}_1)$ をその言語の自由変数記号すべてからなる集合とする．

まず，命題様相論理の場合とは順番を変えて，公理系を始めに与えておく．量化様相論理の公理系 $\mathbf{QKd}$ は，公理系 $\mathbf{Kd}$ の公理型と推論規則に加えて，

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P1)} & \forall x A \to A[t/x] \\
(\forall\text{-規則}) & A \to B[a/x] \text{ から } A \to \forall x B \text{ を導く}
\end{array}
$$

を加えたものである．ただし，($\forall$-規則) は次の条件,

$$(\forall\text{-規則}) \text{ の束縛条件: } a \text{ は } A,\ B \text{ 中に出現しない自由変数記号である}$$

がみたされているときのみ使用可能である．このように，$\mathbf{QKd}$ は $\mathbf{Kd}$ に対し，量化記号に関する公理と規則を自然に加えたものである．演繹関係 $\vdash$ はいつもどおり定める[*7]．

一様相命題論理の場合に，量化記号に関する規則を自然に付け加えた公理系に対して，完全性が成り立つ意味論の枠組みは，到達可能性に沿って各世界上にある個体領域が大きくなってい

[*6] 議論を簡単にするために,「函数記号」と「等号」は持たないものとする．

[*7] $\mathbf{Kd}$ の定理 $A \to \boxdot \diamonddot A$ は $\mathbf{QKd}$ の定理でもあるので, $\boxdot$ に関するバルカン式 $\forall x \boxdot A \to \boxdot \forall x A$ が $\mathbf{QKd}$ の定理となる．B の公理から，バルカン式を導く体系内証明については，[6, p.247] を参照されたい．

く，という包含要請をみたす拡大領域フレームである [6, ch.15]．以下では，命題様相論理の場合と同様，二様相の枠組みとして，拡大領域のフレームを定義し，その枠内で，$\blacksquare$ や $\boxdot$ に意図する意味を与える枠組み（R-述語分割フレーム）を考える．空でない集合 W と，W 上の二つの到達可能関係 $S_{\blacksquare}$, $S_{\boxdot}$ と，各世界に空でない集合（その世界における対象領域）を対応させる函数 D で，**包含要請**と呼ばれる条件，任意の $x, y \in W$ に関し，$xS_{\blacksquare}y \implies D(x) \subset D(y)$ かつ $xS_{\boxdot}y \implies D(x) \subset D(y)$，をみたすものの組 $\langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle$ を**述語二様相フレーム**と呼び，誤解が生じない限り，2 節と同様に，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{G}$ 等で表す．述語二様相フレームの具体例は，図 3 を参照されたい（ただし，図中の実線の矢印は，$S_{\blacksquare}$ の関係を表す）．

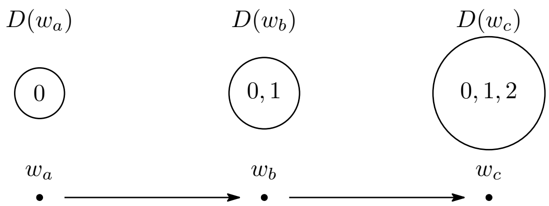

図 3　述語二様相モデル，$S_{\boxdot} = \emptyset$ の場合．

命題様相論理の場合に，二様相フレーム上で，付値函数 I を考えることで，二様相モデルを定めたように，述語二様相フレーム上で，定数記号，命題変数，述語記号の解釈を定めることによって，述語二様相モデルを定めたい．述語二様相フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle$ 上の解釈 V は，次の要素から成る．

- 各定数記号を対象領域 $\bigcup_{w \in W} D(w)$ のどの要素に解釈するか．定数記号 $\mathbf{c}$ の V による解釈を $\mathbf{c}^V$ とかく．
- 各命題変数 p_n をどの世界で真とするか．命題変数 p_n の V による解釈（W の部分集合）を p_n^V とかく[*8]．
- 各 n 引数述語記号を各可能世界の対象領域上のどんな n 引数述語に解釈するか．世界 w における n 引数述語記号 $\mathbf{P}$ の V による解釈（$D(w)^n$ の部分集合）を $\mathbf{P}_w^V$ とかく．

述語二様相モデルは，述語二様相フレームとその上の解釈からなる対として定義される．第二節同様，誤解が生じない限り，述語二様相モデルは，$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 等で表す．

述語二様相フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle$ と，W 上の関係 R に対し，$S_{\blacksquare} = (R \cap \neq)$, $S_{\boxdot} = (R \cap =)$ とかけるとき，$\mathfrak{F}$ は R-**述語分割フレーム**である（R-**述語分割モデル** は，R-分割フレームとその上の解釈 V との対とする），という．

述語二様相モデル $\mathfrak{M} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D, V \rangle$ と $w \in W$ が与えられたとき，$\mathcal{L}$ の閉論理式に対してのみ，真偽を割り振ることを考える．まず，述語二様相モデル $\mathfrak{M}$ の対象領域全体 $\bigcup_{w \in W} D(w)$ の各要素 d の名前を定数記号 $\underline{d}$ として加えた言語を，D **による名前拡張言語**，と呼び，$\mathcal{L}[D]$ と

*8　これは，命題様相論理の二様相モデルでの，$I(p_n)$ に相当する．

かく．このとき，V を，$\mathcal{L}[D]$ に新たに含まれる定数記号に対し，$V(\underline{d}) = d$ ($d \in \bigcup_{w \in W} D(w)$) となるように拡張しておく[*9]．$A$ が $\mathcal{L}[D]$ の閉論理式で，世界 w に対して，条件,「A 中に出現するどんな定数記号の解釈も $D(w)$ の要素である」をみたしているときに，A は $w \in W$ で**解釈可能である**，という．「世界 $w \in W$ において解釈可能な論理式 A が真である」を $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ とかき，これを A の構成に関して再帰的に定義する:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p_n \iff w \in p_n^V \quad (n \in \omega);$$
$$\mathfrak{M}, w \Vdash \mathbf{P}(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle t_1^V, \ldots, t_n^V \rangle \in \mathbf{P}_w^V;$$
$$\mathfrak{M}, w \Vdash \forall x A \iff D(w) \text{ の任意の要素 } d \text{ に対して}, \mathfrak{M}, w \Vdash A[\underline{d}/x],$$

ただし，$B \to C$, $\sim B$, $\blacksquare B$, $\boxdot B$ の場合の,(意味論的枠組みは異なるが)以前と同様の条項も含めておくものとする．

以前と同様に，述語二様相フレームやその集まりにおける論理式の妥当性を定義したい．付値函数と世界の情報を任意に動かして，二様相フレームにおける妥当性を定義したように，解釈と世界，および，自由変数記号の解釈を任意に動かすことにより，述語二様相フレームでの妥当性を次のように定義する．述語二様相フレーム $\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle$, $\mathcal{L}$ の論理式 A, A 中のすべての自由変数記号を $a_1, \ldots, a_n$ (ただし，$n \geq 0$ で，$a_1, \ldots, a_n$ はすべて異なる)に対し，$\mathfrak{F}$ にその上での任意の解釈 V をつけた述語二様相モデル $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$ の任意の可能世界 $w \in W$ において，条件,

「w における対象領域 $D(w)$ の任意の要素 $d_1, \ldots, d_n$ に対して，A が w で解釈可能ならば，$\mathfrak{M}, w \Vdash A[\underline{d_1}/a_1] \cdots [\underline{d_n}/a_n]$」

が成り立つときに，A **は** $\mathfrak{F}$ **で妥当である**，と定め，$\mathfrak{F} \Vdash A$ と表す．また，$\mathcal{L}$ の論理式 A の，述語二様相フレームのある集まり F での妥当性($\mathsf{F} \Vdash A$ と表す)も，二様相フレームの場合と同様に定める．以前の，K や K_D と類比的に，QK を述語二様相フレームすべての集まり，QK_D を $\{ \mathfrak{F} \in \mathsf{QK} \mid \text{ある } R \text{ について } \mathfrak{F} \text{ は } R\text{-述語分割フレーム} \}$ と定め，以下では固有名詞のように用いる．QK_D は，命題様相論理の K_D と同様に，実質的に,「述語一様相フレーム」すべてからなる集まりに等しい．

公理系 **QKd** が QK_D に対して，健全性をもつ，という次の命題,

命題 4.1. 任意の $\mathcal{L}$ の論理式 A について，**QKd** $\vdash A$ ならば $\mathsf{QK}_D \Vdash A$.

は，$\vdash A$ に関する帰納法により証明できる．この命題から，閉論理式 A に対し，QK_D のある述語二様相フレーム $\mathfrak{F}$ 上のある解釈 V, $\mathfrak{F}$ のある要素 w に対して，$\langle \mathfrak{F}, V \rangle, w \nVdash A$ が成り立つならば(この場合，閉論理式 A は**充足可能**，といわれる)，A が公理系 **QKd** で無矛盾である，ということが帰結することに注意されたい．

[*9] 厳密には，V を拡張(expand)した解釈 V_D を，$\mathcal{L}[D]$ に新たに含まれる定数記号に対し，$V_D(\underline{d}) = d$ ($d \in \bigcup_{w \in W} D(w)$) とし，$\mathcal{L}$ にもとから含まれていた，命題変数，述語記号や定数記号に関しては，V と同様に定めることで決めておく必要がある．

5 二様相分割に伴う技術的困難

本稿の残りの節では，命題 4.1 の含意関係の逆，すなわち，

定理 5.1. 任意の $\mathcal{L}$ の論理式 A について， $\mathsf{QK}_D \Vdash A$ ならば $\mathbf{QKd} \vdash A$.

を証明することを目標とする．そのために，この節と次の節では，ひな型となる，命題様相論理 **Kd** の K_D に対する完全性証明（第三節の最後を参照されたい）の各ステップ (Step 1) から (Step 5) の論法が，ここまでで説明してきた量化様相論理においても，適用できるかどうかを検討する．結論から言えば，(Step 1), (Step 4)，および (Step 5) の論法は，量化様相論理に適う修整を行えば，適用できる．しかし，(Step 2) のカノニカルモデルの構成を，命題様相論理の場合と同様に，素朴にしてしまうと，量化様相論理に特有の理由から，(Step3) が破綻してしまう (本節)．そのため，我々は，(Step 2) のカノニカルモデルの構成法に修正を行うことで難点を回避し，かつ，その回避方法が，(Step 4), (Step 5) にうまく接続するかどうかを確認することとなる (第六節)．この節では，まず，(Step 1) を扱い，その後，(Step 2) で必要とされるカノニカルモデルを素朴に構成した後，(Step 3) に相当する議論に不都合が生じることをみる．

(Step 1) を検討する準備として，無矛盾，極大無矛盾などといった概念を **QKd** に対しても同様に定義しておこう．一般に，完全性証明を行う場合は，論理式などの構文論的対象を使って，意味論的対象（命題論理に対する真理函数，一階述語論理に対する構造，様相論理に対するクリプキモデル）を構成する．命題様相論理の場合には，世界に相当するのが，**Kd** で極大無矛盾な集合であった．量化様相論理には，個体変数を束縛する，全称記号 $\forall$ が入っているため，一階述語論理の完全性証明の場合と同様に，論理式の集合 Γ が述語論理に対する意味論的対象として振舞うためには，$\sim\forall xA$ という型の論理式に対して，$\sim\forall xA \in \Gamma$ であるときには，ある自由変数記号 a が選べて，$\sim A[x/a] \in \Gamma$，ということがいえる必要がある．これを可能にしてくれるのが，$\forall$-特性であり，それは以下のように定義される: Γ が **$\forall$-特性**をもつ，といわれるのは，任意の $\forall xA$ 型の論理式に対し，ある自由変数記号 a が存在して，$A[a/x] \to \forall xA \in \Gamma$ となる場合である[*10]．よって，我々は，**QKd** の完全性証明では，$\forall$-特性をもち，かつ，極大無矛盾な集合を世界とすることになる．

一階述語論理では，自由変数記号のみ（あるいは，ヘンキン定数と呼ばれる定数記号のみ）をもとの言語の濃度分だけ加えた自由変数拡大言語を考え，その拡大言語において，$\forall$-特性をもつ極大無矛盾な集合を構成する．その際，個体領域の集合は，（等号を含まない場合は）拡大言語での項全体の集合とされる．同じ精神に従って，量化様相論理の場合にも，（述語二様相モデルとして）カノニカルモデルを構成することを考えると，述語二様相モデルでは，世界ごとに個体領域

[*10] 実際，この定義から，Γ を $\forall$-特性をもつ **QKd** で極大無矛盾な集合としたとき，$\forall xA \notin \Gamma$ ならば，ある自由変数記号 a が選べて $A[a/x] \notin \Gamma$，がいえる．これは，以下のように証明される: 対偶を示す．任意の自由変数記号 a について，$A[a/x] \in \Gamma$ とせよ．このとき，Γ は $\forall$-特性をもつので，ある自由変数記号 b が存在して，$A[b/x] \to \forall xA \in \Gamma$．仮定より，$b$ についても $A[b/x] \in \Gamma$ なので，$\forall xA \in \Gamma$.

の集合が変わりうるので，これを反映するために，世界ごとに考える自由変数拡大言語を変える，という発想をとる必要がある [6, p.280]．このような議論を反映するために，まず，$\mathcal{L}$ の自由変数拡大言語を形式的に定義しておこう．$\mathcal{L}_1$ が $\mathcal{L}$ の**自由変数拡大言語**であるといわれるのは，自由変数記号以外の語彙については，$\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}$ は全く同じ語彙をもち，$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ の自由変数記号の集合 $V(\mathcal{L}), V(\mathcal{L}_1)$ については，$V(\mathcal{L}) \subset V(\mathcal{L}_1)$ が成り立つ場合である[*11]．さらに，$\mathcal{L}$ の自由変数拡大言語 $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ について，$V(\mathcal{L}_1) \subset V(\mathcal{L}_2)$ であり，かつ，$|V(\mathcal{L}_2) \setminus V(\mathcal{L}_1)| \geq \aleph_0$ となる場合（ただし，$\setminus$ は差集合を表す記号，集合 X に対し $|X|$ はその濃度とする）に，$\mathcal{L}_1$ は $\mathcal{L}_2$ の**無限部分言語**である（$\mathcal{L}_1 \sqsubset \mathcal{L}_2$ と表す），という．すなわち，$\mathcal{L}_1 \sqsubset \mathcal{L}_2$ のとき，$\mathcal{L}_2$ は $\mathcal{L}_1$ よりも無限個の新しい自由変数記号をもつのである．以下の議論では，$\mathcal{L}^+$ を $\mathcal{L} \sqsubset \mathcal{L}^+$ なるものとして一つに固定しておく．このとき，構成したいカノニカルモデルの世界の集合 W は，

$$\{\, w \mid \exists \mathcal{L}_w \left[\mathcal{L} \sqsubset \mathcal{L}_w \sqsubset \mathcal{L}^+,\ \text{かつ，} w \text{ は } \mathcal{L}_w \text{ の } \forall\text{-特性をもつ } \mathbf{QKd} \text{ で極大無矛盾な集合}\right] \}$$

と定められる[*12]．このとき，次の事実が成立する（証明については，[6, Theorem 14.1] と同様にできる）．

事実 5.2. $\mathcal{L}$ の自由変数拡大言語 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ について $\mathcal{L}_1 \sqsubset \mathcal{L}_2$ とせよ．Λ を $\mathcal{L}_1$ の論理式の無矛盾な集合とする. このとき，$\Lambda \subset \Delta$ をみたす $\forall$-特性をもち，かつ，無矛盾な $\mathcal{L}_2$ の論理式の集合 Δ が存在する.

この事実と，無矛盾な論理式の集合が極大無矛盾な論理式の集合に拡大できるという議論 [6, Lemma 6.2] とを合わせて，(Step 1) に相当する論法が説明できる[*13].

次に，(Step 2) で用いられたカノニカルモデルを，**QKd** に対して定めよう．到達可能性関係 $S_{\blacksquare}$, $S_{\boxdot}$ に関しては，さし当たって，以前と同様に素朴に決める．各世界の上の個体領域 $D(w)$ については，上で説明したように定め，解釈 V に関しては，一階述語論理（述語記号や定数記号に関して）や命題様相論理の場合（命題変数に関して）と類比的に，定義しよう．すなわち，**QKd** のカノニカルモデル $\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D, V \rangle$ を二様相述語モデルとして次のように定める.

$$\begin{aligned}
wS_{\blacksquare}w' &\iff \mathcal{L}_w \text{ の任意の論理式 } A \text{ について，} \blacksquare A \in w \text{ ならば } A \in w'.\\
wS_{\boxdot}w' &\iff \mathcal{L}_w \text{ の任意の論理式 } A \text{ について，} \boxdot A \in w \text{ ならば } A \in w'.\\
D(w) &= \{\, t \mid t \text{ は } \mathcal{L}_w \text{ の項} \}.\\
\mathbf{c}^V &= \mathbf{c} \in \bigcup\nolimits_{w \in W} D(w).\\
\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in \mathbf{P}^V_w &\iff \mathbf{P}(t_1, \ldots, t_n) \in w.\\
p^V_n &= \{\, w \in W \mid p_n \in w \} \quad (n \in \omega).
\end{aligned}$$

[*11] 特別な場合として，$\mathcal{L}$ 自身も $\mathcal{L}$ の自由変数拡大言語に含まれる.

[*12] 本来ならば，この W は $W^{\mathbf{QKd}}$ と書くべきであるが，表記が煩雑になることを避けて，このように表記する．W 以外の，**QKd** のカノニカルモデルの構成要素についても同様にする.

[*13] Δ が $\forall$-特性をもつ無矛盾集合である場合，Δ を $\Delta \subset \Gamma$ なる 極大無矛盾集合 Γ へと拡大した場合にも，Γ が $\forall$-特性をみたすことに注意されたい.

さて，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}}$ の $S_{\blacksquare}$ や $S_{\boxdot}$ の定義では，例えば $wS_{\boxdot}w'$ が成り立っている場合，w の言語である $\mathcal{L}_w$ と w' の言語である $\mathcal{L}_{w'}$ とが異なっていることがありうる，ということに注意されたい．実際，このことがネックとなって，(Step 3) の議論で，補助定理 3.2 に相当する内容が成り立たない，という不都合が生じるのである．補助定理 3.2 の証明では，w と w' が（同じ言語の）極大無矛盾な集合であることから，$w = w'$ を示すために，$w \subset w'$ を示せばよい，という論法を使ったのだが，その議論が，各世界の言語が異なりうることから，必ずしも適用できなくなるのである．以下では，補助定理 3.2 に相当する内容の反例が構成できること（命題 5.4）を示す．

命題 5.3. $w \in W$ の言語を $\mathcal{L}_w$ とし，$\sim\boxdot A \in w$ とせよ．このとき，$\mathcal{L}$ のある自由変数拡大言語 $\mathcal{L}_{w'}$ の極大無矛盾集合 w' が選べて，$\mathcal{L}_w \sqsubset \mathcal{L}_{w'}$ かつ w' が $\forall$-特性をもち，$\{\sim A\} \cup \{B \,|\, \boxdot B \in w\} \subset w'$，かつ，$w' \in W$ となる．また，$w \in W$ の言語を $\mathcal{L}_w$ とし，$\sim\blacksquare A \in w$ とした場合も同様の言明が成り立つ．

(**証明**) $\mathcal{L} \sqsubset \mathcal{L}_w \sqsubset \mathcal{L}_{w'} \sqsubset \mathcal{L}^+$ となる $\mathcal{L}_{w'}$ をとれる．このとき，$\{\sim A\} \cup \{B \,|\, \boxdot B \in w\}$ は無矛盾である．この集合は，前事実 5.2 を用いて，（$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ をそれぞれ $\mathcal{L}_w, \mathcal{L}_{w'}$ とみて）$\forall$ -特性をもつ（$\mathcal{L}_{w'}$ の）無矛盾な論理式の集合に拡大でき，さらに，これを極大無矛盾にまで拡大できる（$\because$ [6, Lemma 6.2]）． (**証明終**)

命題 5.4. $\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D, V \rangle$ において，ある $w, w' \in W$ が選べて，$wS_{\boxdot}w'$ だが，$w \neq w'$ である．すなわち，$S_{\boxdot} \subset =$ は不成立．

(**証明**) p を $\mathcal{L}$ の命題変数とせよ．このとき，（閉）論理式の集合 $\{\sim\boxdot p\}$ は，$W = \{0\}$, $S_{\boxdot} = \{\langle 0, 0\rangle\}$, $S_{\blacksquare} = \emptyset$, $D(0) = \{a\}$, $p^V = \emptyset$，をみたす，QK_D の要素となる二様相述語フレームの世界 0 で真となる．すると，**QKd** の QK_D に対する健全性（命題 4.1) より，$\{\sim\boxdot p\}$ は **QKd** で無矛盾となる．$\mathcal{L} \sqsubset \mathcal{L}_w \sqsubset \mathcal{L}^+$ なる $\mathcal{L}_w$ がとれる．すると，$\{\sim\boxdot p\}$ を含み，**QKd** で $\forall$-特性をもつ，言語 $\mathcal{L}_w$ の極大無矛盾な集合 w を構成できる．ここで，命題 5.3 を適用すれば，$\mathcal{L} \sqsubset \mathcal{L}_w \sqsubset \mathcal{L}_{w'} \sqsubset \mathcal{L}^+$ なる言語 $\mathcal{L}_{w'}$ の $\forall$-特性をもつ **QKd** の極大無矛盾な集合 w' で，$\{\sim p\} \cup \{B \,|\, \boxdot B \in w\} \subset w'$ をみたすものが構成できる．明らかに，$wS_{\boxdot}w'$．しかし，w と w' の構成法から，（言語が異なるため），$w \neq w'$． (**証明終**)

命題 5.4 の証明が教えてくれるのは，世界によって言語が異なることが原因となって，(Step 3) の議論は，量化様相論理では適用できない，ということである[*14]．

[*14] $\Box$ をもつ一様相言語に，$\blacksquare$ を加えた場合の，自然な量化拡大でも，同様の困難が生じる [14, 13]．このことは，[14] で初めて証明された．より直接的な証明に関しては，[13] を参照されたい．この場合は，$\Box$ と $\blacksquare$ が互いに関係をもつことが原因となって，拡大領域フレームに対する完全性が素朴な方法では，証明できない，しかし，分割言語の場合は，その原因が，$\boxdot$ の振る舞いに集約されている点に注意されたい．

6　完全性: 量化様相論理の場合

前節で見た難点は，$\boxdot$ の振る舞いに関し本質を表しているといえる，**QKd** の体系内定理 $\sim\boxdot A \to (\boxdot B \to B)$ に注目して，回避できる．まず，$\sim\boxdot A \to (\boxdot B \to B)$ の (**Kd** での) 体系内証明を確認し，その後，以下で必要となる補助定理を示す．

$$
\begin{array}{r|l|l}
1. & (B \to A) \to \boxdot(B \to A) & (\boxdot 2) \\
2. & (B \to A) \to (\boxdot B \to \boxdot A) & 1, (\boxdot 1), \mathrm{PC} \\
3. & \boxdot B \to (\boxdot A \vee \sim(B \to A)) & 2, \mathrm{PC} \\
4. & \sim(B \to A) \to B & \mathrm{PC} \\
5. & \boxdot B \to (\boxdot A \vee B) & 3, 4, \mathrm{PC} \\
6. & \sim\boxdot A \to (\boxdot B \to B) & 5, \mathrm{PC}
\end{array}
$$

ただし，ここで，‘PC’ は命題論理の公理および推論規則から得られる定理もしくは導推論規則を表す．この定理の内容を意味論的に考えておこう．w で $\boxdot A$ が偽ならば，w は自分自身に到達可能である，という意味で，R について反射的な世界となる（loop が真となる）．そのとき，w で $\boxdot A$（すなわち，loop $\to A$）が真ならば，当然，A が真となるだろう．このように，この定理は，世界が自分自身に到達可能であるときに，$\boxdot B$ という型の論理式がどのように振舞うか，を記述している といえる[*15]．すなわち，$(\boxdot 2)$ よりもはるかに演算子 $\boxdot$ の振舞いを表している定理だといえる．

補助定理 6.1. $w \in W$ かつ $\sim\boxdot A \in w$ ならば，$\{\sim A\} \cup \{B \mid \boxdot B \in w\} \subset w$.

(**証明**) $\sim\boxdot A \in w$ と仮定する．これと **QKd** $\vdash \sim\boxdot A \to (\boxdot B \to B)$ より，$\boxdot B \to B \in w$．ゆえに，$\{B \mid \Box B \in w\} \subset w$．また，**QKd** $\vdash \sim\boxdot A \to \sim A$ より，$\sim A \in w$ である．　(**証明終**)

この補助定理を参考にして，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}}$ の $S_{\boxdot}$ の定義を，次の $S^*_{\boxdot}$ に変更することで，**QKd** の修正したカノニカルモデル $\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}} = \langle W, S_{\blacksquare}, S^*_{\boxdot}, D, V \rangle$ を構成しよう．

- $wS^*_{\boxdot}w \iff \mathcal{L}_w$ の任意の論理式 A について，$\boxdot A \in w$ ならば $A \in w$.

すなわち，$S^*_{\boxdot}$ を $(S_{\boxdot} \cap =)$ と定義することで，$S^*_{\boxdot}$ を自分自身にしか関係付けられない関係とし，反例が生じた，世界ごとに言語が異なる場合を締め出すという方針をとるわけである．このとき，明らかに，$S^*_{\boxdot} \subset =$ が成り立つ（よって，(Step 3) に相当するステップは自明に成立する)．さらに，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}$ で，任意の $w, w' \in W$ について，$wS_{\blacksquare}w' \implies D(w) \subset D(w')$, $wS^*_{\boxdot}w' \implies D(w) \subset D(w')$ が成り立つ．なぜなら，後者は，$S^*_{\boxdot}$ の定義から自明であり，前者は通常の量化様相論理の場合 [6, p.281] と同様に示すことができるからである．ゆえに，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}$ は包含要請をみたす述語二様相フレームとなる．

---

*15 (loop $\to A) \leftrightarrow \boxdot A$ の **Kd** での体系内証明の概略を与えておこう．これを示すには，$(\sim\boxdot\bot \to A) \leftrightarrow \boxdot A$ を示せば十分である．まず，$(\sim\boxdot\bot \to A) \to \boxdot A$ は，$(\boxdot\bot \vee A) \to \boxdot A$ と同値であるが，これは，$(\boxdot 2)$ と $\boxdot\bot \to \boxdot A$（これは $\bot \to A$ と $(\boxdot 1)$ から成立）とから明らかに成立する．逆に，$\boxdot A \to (\sim\boxdot\bot \to A)$ については，上で示した定理 $\sim\boxdot\bot \to (\boxdot A \to A)$ より成り立つ．

$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}$ では，$\mathfrak{M}^{\mathbf{Kd}}$ での命題 3.3 に相当する，次の命題が成立する．

命題 6.2. 任意の $w \in W$ と $\mathcal{L}_w$ の任意の論理式 A について，A に出現する自由変数記号が，きっかり $a_1, \ldots, a_n$（$n \geq 0$，ただし，すべて異なる）ならば，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}, w \Vdash A[\underline{a_1}/a_1]\cdots[\underline{a_n}/a_n] \Longleftrightarrow A \in w$．ただし，$\underline{a_i}$ は $a_i \in D(w)$ $(1 \leq i \leq n)$ の名前定数記号である．

(**証明**) $\mathcal{L}_w$ の論理式 A の長さに関する帰納法により示す．A が $\boxdot B$ の場合のみ示す． 残りの場合は，通常の一様相論理の場合 [6, Theorem 15.3] と全く同様にできる．以下では，$[\underline{a_1}/a_1]\cdots[\underline{a_n}/a_n]$ を $[\underline{\overrightarrow{a_i}}/\overrightarrow{a_i}]$ とかく．

$(\Longrightarrow)$ 対偶を示す．$\boxdot B \notin w$ とする．このとき，補助定理 6.1 より，$\{\sim B\} \cup \{C \mid \boxdot C \in w\} \subset w$．明らかに $\sim B \in w$，すなわち，$B \notin w$．帰納法の仮定より，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}, w \nVdash B[\underline{\overrightarrow{a_i}}/\overrightarrow{a_i}]$．いま，$\{C \mid \boxdot C \in w\} \subset w$ なので，$S^*_{\boxdot}$ の定義より，$wS^*_{\boxdot}w$．ゆえに，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}, w \nVdash \boxdot B[\underline{\overrightarrow{a_i}}/\overrightarrow{a_i}]$．

$(\Longleftarrow)$ $\boxdot B \in w$ かつ $wS^*_{\boxdot}w$ とする．このとき，$S^*_{\boxdot}$ の定義より，$\{C \mid \boxdot C \in w\} \subset w$．すると，$B \in w$．帰納法の仮定から，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}, w \Vdash B[\underline{\overrightarrow{a_i}}/\overrightarrow{a_i}]$．よって，$\mathfrak{N}^{\mathbf{QKd}}, w \Vdash \boxdot B[\underline{\overrightarrow{a_i}}/\overrightarrow{a_i}]$． (**証明終**)

ここまで述べてきたように，カノニカルモデル上の $S_{\boxdot}$ の定義に修正を施すことで，命題様相論理における (Step 1) から (Step 3) に相当する議論が，量化様相論理の場合においても成り立つのである．

最後に，(Step 4) と (Step 5) で用いた，二様相 p-モーフィズムや分割実現に相当する議論が量化様相論理ではどのように可能となるか，を簡単に見ておきたい．二様相フレームの場合とは異なり，述語二様相フレームの場合は，世界によって異なりうる個体領域の情報が加わっているので，それを反映するように，p-モーフィズムの概念を変更する必要がある．$\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle$，$\mathfrak{F}' = \langle W', S'_{\blacksquare}, S'_{\boxdot}, D' \rangle$ を述語二様相フレームとしたとき，$f : W \to W'$ が（命題様相論理の意味での）二様相 p-モーフィズムであり，かつ，f と $g : \bigcup_{w \in W} D(w) \to \bigcup_{w' \in W'} D(w')$ とが，$g[D(w)] = D'(f(w))$（ただし，$g[D(w)]$ は $D(w)$ の g による像）をみたす場合に，函数のペア $\langle f, g \rangle$ は $\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{F}'$ への**二様相 p-モーフィズム対**である，といい，$\langle f, g \rangle : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ と表す．例えば，以前の図 2 のそれぞれのフレーム $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ の各世界に，同じ個体領域 Q が関連付けられている場合（図 4 を見よ）場合の，$\langle f, \mathrm{id}_Q \rangle$（ただし，$\mathrm{id}_Q$ は Q 上の恒等函数）が二様相 p-モーフィズム対の具体例である．このとき，次の事実が成立する（[10] における直観主義述語論理の p-モーフィズム対に対する事実 [10, 定理 5.12] に相当する命題を，この場合にもほぼ同様に証明できる．以下の事実は，その命題の系として証明される）．

事実 6.3. 述語二様相フレーム $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ に対し，ある函数 f, g が選べて，$\langle f, g \rangle : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ かつ f が全射ならば，任意の $\mathcal{L}$ の論理式 A について，$\mathfrak{F} \Vdash A \Longrightarrow \mathfrak{F}' \Vdash A$.

命題様相論理の場合と同じように，この事実が成り立つ意味で，f が全射の二様相 p-モーフィズム対 $\langle f, g \rangle$ は，論理式の妥当性を保ちつつ，述語二様相フレームの形状を変えることを可能にしてくれるのである．

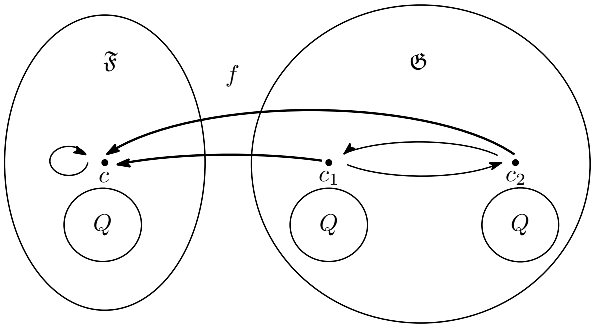

図 4　二様相 p-モーフィズム対，及び，述語版分割実現の例

それでは，最後に，命題様相論理での分割実現に相当する概念を導入したい．まず，$\mathfrak{F} \in \mathsf{QK}$, $\mathfrak{G} \in \mathsf{QK}_D$ に対し，g と全射の f が存在して，$\langle f, g \rangle : \mathfrak{G} \to \mathfrak{F}$ が成り立つ場合に，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{F}$ の **述語版分割実現**である，と定める．すると，次のように, 命題様相論理の場合と同じ条件をみたす $\mathfrak{F} \in \mathsf{QK}$ が常に述語版分割実現をもつことを示すことができる．

命題 6.4. $\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle \in \mathsf{QK}$ について，$S_{\boxdot} \subset =$ とせよ．このとき，ある $\mathfrak{G} \in \mathsf{QK}_D$ が選べて，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{F}$ の述語版分割実現である．

証明のアイデアは，命題 2.2 とほぼ同様であるが，以前の論法に加えて，$S_{\blacksquare}$ について反射的な世界に関連付けられた個体領域（図 4 では Q）を，置換した二つの世界それぞれにも関連付ける，という構成を新たに行う必要がある（詳細は，Appendix を参照されたい）．

ここまでで行ってきた (Step 4) と (Step 5) の議論の修整は，一般の述語二様相フレームに対して用いることができるものなので，我々のカノニカルモデルの修正は，この箇所の議論ともうまく接続する．

以上の準備をもとに，**QKd** の QK_D に対する完全性である，定理 5.1 が以下のように証明できる．まず，A を $\mathcal{L}$ の論理式とし，対偶を示そう．

(Step 1′)　$\mathbf{QKd} \nvdash A$，すなわち，$\sim A$ は **QKd** で無矛盾，とする．$\sim A$ を含む **QKd** で **∀-特性をもつ**，極大無矛盾な集合 w を作る（事実 5.2）．このとき，$A \notin w$.

(Step 2′)　修正したカノニカルモデル $\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}} = \langle W, S_{\blacksquare}, S^{*}_{\boxdot}, D, V \rangle$ を構成する．命題 6.2 により，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}}, w \nVdash A$，よって，$\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}}$ のフレーム部分 $\mathfrak{F}^{\mathbf{QKd}}$ について，$\mathfrak{F}^{\mathbf{QKd}} \nVdash A$.

(Step 3′)　$\mathfrak{M}^{\mathbf{QKd}}$ **の構成法より，自明に，**$S^{*}_{\boxdot} \subset =$**.**

(Step 4′)　$S^{*}_{\boxdot} \subset =$ なる $\mathfrak{F}^{\mathbf{QKd}} \in \mathsf{QK}$ の述語版分割実現 $\mathfrak{G} \in \mathsf{QK}_D$ を構成する（命題 6.4）．

(Step 5′)　$\mathfrak{F}^{\mathbf{QKd}} \nVdash A$ ゆえ，(Step 4′) と事実 6.3 より，$\mathfrak{G} \nVdash A$．よって，$\mathsf{QK}_D \nVdash A$.　(**証明終**)

拡大領域フレームで意味論を与えた場合にも，この定理 5.1 と通常の □ のみをもつ量化一様相論理の完全性 [6, Theorem 5.1, p.281] とを合わせて，二様相分割が完全性という性質を保つ，ということが明らかとなった．

7 結論

本稿では，正規様相 □ を二様相 ■ と ⊡ に分割することを提案し，分割した様相言語の命題様相論理での基礎となる公理系を与え，完全性を証明した（定理 3.1）．さらに，分割言語の公理系の自然な量化拡大を考え，その公理系が，拡大領域フレームすべてからなる集まりに対して，完全性をみたすことを示した（定理 5.1）．このことによって，二様相分割が，命題様相論理と量化様相論理の二つのレベルにおいて，完全性というメタ論理的性質を不変に保つことを明らかにした．

分割言語の量化拡大が完全性をみたすことを証明する際には，命題様相論理の場合の証明ステップを素朴に適用すると，量化様相論理に特有の難点（カノニカルモデルの世界ごとに考えられる言語が異なる）が原因となって，そのままでは証明ができなかった（命題 5.4）．しかし，分割した一方の様相 ⊡ の振舞いを実質的に表している体系内定理 $\sim\boxdot A \rightarrow (\boxdot B \rightarrow B)$ に注目することで，その難点は回避できた．このように，量化分割言語の完全性証明には，命題論理のレベルでは明らかにする必要のなかった，その演算子のもつ本質（演算子の振舞い）を見出す必要があった．この点で，本稿の事例は，様相言語の量化拡大を考えることが，その様相演算子のもつ本質に迫ることにつながる一例だといえよう．

参考文献

[1] ten Cate, B. *Expressivity of XPath with Transitive Closure*, Under submission. Available at `http://staff.science.uva.nl/~bcate/papers/regxpath.pdf`.

[2] Blackburn, P., 'Nominal Tense Logic', *Notre dome Journal of Formal Logic*, vol.34, pp.56-83, 1993.

[3] Blackburn, P., de Rijke, M. and Venema, Y., *Modal Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2001.

[4] Gargov, G. and Passy, S.,'Determinism and Looping in Combinatory PDL', Theoretical Computer Science, vol.61, pp.256-77, 1988.

[5] Gargov, G. and Goranko, V., 'Modal Logic with Names', *Journal of Philosophical Logic*, vol.22, pp.607-36, 1993.

[6] Hughes, G. H. and Cresswell, M. J., *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London and New York, 1996.

[7] Kashima, Ryo., 'Completeness via labelled sequent calculi for bimodal logics with irreflexive modality', *Proceedings of the 38th MLG meeting*, pp.53-5, 2004.

[8] 松本和夫, 『復刊 数理論理学』, 共立出版株式会社, 2001 年.

[9] Mouri, M,. *Proof Theoretical Study of Non-Classical Logics*, Ph D thesis, School of Information Science, JAIST, 2002.

[10] 小野寛晰, 『情報科学における論理』, 日本評論社, 1994 年.

[11] de Rijke, M., 'The Modal Logic of Inequality', *Journal of Symbolic Logic*, vol.57, pp.566-84, 1992.

[12] Sano, K., 'Bimodal Logics with Irreflexive Modality', *Proceedings of the 38th MLG meeting*, 50-2, 2004.

[13] Sano, K., 'Predicate Bimodal Logics with Irreflexive Modality', *Proceedings of the 39th MLG meeting*, pp.2-5.

[14] 鈴木徹, 「非反射的様相を持つ述語様相論理の完全性」, 卒業論文, 東京工業大学, 2005 年.

[15] 内井惣七, 神野慧一郎, 『論理学 –モデル理論と歴史的背景–』, ミネルヴァ書房, 1976 年.

[16] 内井惣七, 『真理・証明・計算 –論理と機械–』, ミネルヴァ書房, 1989 年.

Appendix: 述語版分割実現に関する証明

この節では，補足として，命題 6.4 の証明を与える．直ちにわかるように，命題 6.4 は，命題 2.2 を含意する．それゆえ，以下の証明は，命題 2.2 の証明をも含意する．

(**命題** 6.4 **の証明**) $\mathfrak{F} = \langle W, S_{\blacksquare}, S_{\boxdot}, D \rangle$ を $S_{\boxdot} \subset =$ をみたす述語二様相フレームとせよ．ある R に関して，R-述語分割フレーム $\mathfrak{G}$ を構成し，$\langle f, g \rangle : \mathfrak{G} \to \mathfrak{F}$ なる，g と全射の f を選ぶことができることを示す．まず，如何に $\mathfrak{G}$ を構成するか，を述べる．W 中の，$S_{\blacksquare}$ に関して反射的な世界を集めた集合 $\{ x \in W \mid xS_{\blacksquare}x \}$ を C と名付ける．$W^- = W \setminus C$ $(= \{ x \in W \mid xS_{\blacksquare}x$ でない $\})$ とおく．$C \cap \{0, 1\} = \emptyset$ とし，$C \times \{0, 1\}$ を考える．さらに，$C \times \{0, 1\}$ 上に関係 $S^{\flat}_{\blacksquare}$ を $\langle c, i \rangle S^{\flat}_{\blacksquare} \langle c', j \rangle \iff c = c'$ かつ $i \neq j$ により定める．これから，$\mathfrak{F}$ 中の $S_{\blacksquare}$ に関する反射的な世界すべてを，$\langle C \times \{0, 1\}, S^{\flat}_{\blacksquare} \rangle$ という対を用いて，'$S_{\blacksquare}$' に関して非反射的となる世界に置換する，という構成を行う．

(Step A) $W' = W^- \cup (C \times \{0, 1\})$ とする．$f : W' \to W$ を，$x \in W^-$ のときは，$x \mapsto x$, $x \in C \times \{0, 1\}$ のときは $x = \langle c, i \rangle$ とすると，$x \mapsto c$ により定める．f は明らかに全射.

(Step B) W' 上の関係 $S'_{\blacksquare}$ を

$$xS'_{\blacksquare}y \iff \begin{cases} xS^{\flat}_{\blacksquare}y & f(x) = f(y) \text{ のとき} \\ f(x)S_{\blacksquare}f(y) & f(x) \neq f(y) \text{ のとき} \end{cases}$$

により定める．ここで，$f(x) = f(y)$ なるときは，$f(x)S_{\blacksquare}f(x)$ ゆえ，$x, y \in C \times \{0, 1\}$ に注意されたい．

(Step C) W' 上の関係 $S'_{\boxdot}$ を $xS'_{\boxdot}y \iff f(x)S_{\boxdot}f(y)$ により定める．

(Step D) $\langle W', S'_{\blacksquare}, S'_{\boxdot} \rangle$ 上で，函数 D' を $D'(x) = D(f(x))$ $(x \in W')$ により定める．

上述のステップを経て得られた述語二様相フレームを $\mathfrak{G} = \langle W', S'_{\blacksquare}, S'_{\boxdot}, D' \rangle$ とおく．id を $\bigcup_{x \in W} D(x)$ 上の恒等函数とする．このとき，$\bigcup_{x \in W} D(x) = \bigcup_{y \in W'} D'(y)$ であること，および，$S'_{\blacksquare}$, $S'_{\boxdot}$ の定義に注意すれば，$\langle f, \mathrm{id} \rangle : \mathfrak{G} \to \mathfrak{F}$ を示すことができる．

最後に，$R' = S'_{\blacksquare} \cup S'_{\boxdot}$ としたとき，$\mathfrak{G}$ が R'-述語分割フレームであること（$\mathfrak{G} \in \mathsf{QK}_D$）を確認する．そのため，(1) $S'_{\boxdot} = (R' \cap =)$，および，(2) $S'_{\blacksquare} = (R' \cap \neq)$ を示す．$S'_{\blacksquare}$ が非反射的であること，すなわち，任意の $y \in W'$ に関し，$yS'_{\blacksquare}y$ でない，ことに注意されたい．

(1) $S_{\boxdot} \subset =$ より，$S'_{\boxdot} \subset =$．よって，$S'_{\boxdot} \subset (R' \cap =)$．逆に，$x = y$ かつ $xR'y$ とする．$xR'x$ だが，$xS'_{\blacksquare}x$ でない，ので，$xS'_{\boxdot}x$ である．よって，$(R' \cap =) \subset S'_{\boxdot}$．

(2) $S'_{\blacksquare} \subset \neq$ より，$S'_{\blacksquare} \subset (R' \cap \neq)$．逆に，$x \neq y$ かつ $xR'y$ とする．このとき，仮に，$xS'_{\boxdot}y$ とすれば，$x = y$ ゆえ，不合理．よって，$xS'_{\boxdot}y$ でない．しかし，$xR'y$ より，$xS'_{\blacksquare}y$．よって，$(R' \cap \neq) \subset S'_{\blacksquare}$． (**証明終**)