数理解析研究所講究録
1478 巻 2006 年 116-126

フーリエマルチプライヤーと関数の合成積による分解について

大阪教育大学・教育学部 中井 英一 (Eiichi Nakai)
Department of Mathematics
Osaka Kyoiku University
大阪大学・理学研究科 冨田 直人 (Naohito Tomita)
Department of Mathematics
Osaka University
関西学院大学・理工学部 藪田 公三 (Kôzô Yabuta)
School of Science and Technology
Kwansei Gakuin University

1 始めに

$1 \leq r < \infty$ とする。ふたつの関数 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ に対して，Young の不等式から $f = g * h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ である。逆に，任意の $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ に対して，$g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ が存在して $f = g * h$ と分解できることが知られている (Hewitt and Ross [7, p. 271])。

同様に $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/r = 1/p + 1/q - 1$, $1 < p, q < \infty$ のとき，Young の不等式から $f = g * h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ である。しかし，この場合には，$f = g * h$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ と分解できない $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ が存在する。実際，次のような分解ができない $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ が存在する。

$$f = \sum_j f_j * g_j, \quad f_j \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g_j \in L^q(\mathbb{R}^n),\ j = 1, 2, \cdots$$
$$\text{with} \quad \sum_j \|f_j\|_{L^p} \|g_j\|_{L^q} < +\infty,$$

(Larsen [11, Corollary 5.6.2])。

なお，Hewitt and Ross [7], Larsen [11] では，$\mathbb{R}^n$ の代わりに局所コンパクト Abel 群 G で証明されている。

ここでは，$\mathbb{R}^n$ の場合に限定して，L^p 空間の代わりに Lorentz 空間，Orlicz 空間，および L^p と ℓ^q のアマルガム空間でこのような分解を考える。得られた結果は，否定的なものだけである。証明のために，Figà-Talamanca の

$L^p(G)$ に対する Fourier multipliers に関する定理を $\mathbb{R}^n$ 上の Banach function spaces に拡張したものを用いる ([13])。

2 Banach function spaces と Figà-Talamanca の定理

可測関数の全体を $L^0(\mathbb{R}^n)$ で表す。測度は Lebesgue 測度とする。可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して、Ω の特性関数を χ_Ω で、Ω の Lebesgue 測度を $|\Omega|$ で表す。

$L^0(\mathbb{R}^n)$ の部分空間 E がノルム $\|\cdot\|_E$ を持ち、次の条件を満たすとき、Banach function space であるという (see [1]):

1. If $g \in E$ and $|f(x)| \le |g(x)|$, then $f \in E$ and $\|f\|_E \le \|g\|_E$.
2. If $0 \le f_j \uparrow f$ a.e. and $\sup_j \|f_j\|_E < +\infty$, then $f \in E$ and $\|f_j\|_E \uparrow \|f\|_E$.
3. If $|\Omega| < +\infty$, then $\chi_\Omega \in E$.
4. If $|\Omega| < +\infty$, then $\exists C_\Omega > 0$ s.t. $\|f\chi_\Omega\|_{L^1} \le C_\Omega \|f\|_E$ for $\forall f \in E$.

$\mathcal{S}$ を急減少関数の全体，$\mathcal{S}'$ を緩増加超関数の全体とする。$(E_k, \|\cdot\|_{E_k})$, $k = 0, 1, 2, 3$, を $(\mathbb{R}^n, dx)$ 上の Banach function spaces とし，次を仮定する。

(i) $(E_k, \|\cdot\|_{E_k})$, $k = 1, 2$, include $\mathcal{S}$ densely,

(ii) there exists a constant $C > 0$ such that $\|f * g\|_{E_0} \le C\|f\|_{E_1}\|g\|_{E_2}$ for all $f, g \in \mathcal{S}$.

E_0 の完備性より，$f_j, g_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \cdots$, $\sum_j \|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2} < +\infty$, ならば $\sum_j f_j * g_j$ は E_0 で収束する。そこで

$$A(E_0 : E_1, E_2) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j \in E_0 : \right.$$
$$\left. f_j, g_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \cdots,\ \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2} < +\infty \right\}.$$

と定義する。$f \in A(E_0 : E_1, E_2)$, に対して

$$\|f\|_{A(E_0:E_1,E_2)} = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2}\right\}$$

とおくとノルムになる。ただし、下限は $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j$ in E_0 ($f_j, g_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \cdots$, $\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j\|_{E_1}\|g_j\|_{E_2} < +\infty$) であるような f の表現すべてにわたってとるものとする。このとき $\|f\|_{E_0} \le C\|f\|_{A(E_0:E_1,E_2)}$ である。

この記号を使うと，冒頭の例は

$$A(L^{p_0}(\mathbb{R}^n) : L^1(\mathbb{R}^n), L^{p_0}(\mathbb{R}^n)) = L^{p_0}(\mathbb{R}^n),$$
$$A(L^{p_0}(\mathbb{R}^n) : L^{p_1}(\mathbb{R}^n), L^{p_2}(\mathbb{R}^n)) \subsetneqq L^{p_0}(\mathbb{R}^n),$$

と表される。ただし $1/p_0 = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1 \le p_0 < \infty$, $1 < p_1, p_2 < \infty$.

$m \in \mathcal{S}'$ に対して Fourier multiplier

$$T_m : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$$

を次のように定義する。

$$\langle T_m f, \psi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[m\mathcal{F}[f]], \psi\rangle = \langle m, \mathcal{F}[f]\mathcal{F}^{-1}[\psi]\rangle, \quad f, \psi \in \mathcal{S}.$$

m が良い関数ならば

$$T_m f = \mathcal{F}^{-1}[m] * f$$

である。また

$$M(E_1, E_3) = \{m \in \mathcal{S}' \,|\, T_m : E_1 \to E_3 \text{ bdd}\},$$

と定義する。ノルムを作用素ノルム

$$\|m\|_{M(E_1,E_3)} = \sup\{\|T_m f\|_{E_3} : \|f\|_{E_1} = 1\}.$$

で定める。

関数 $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\check{f}(y) = f(-y), \quad \tau_x f(y) = f(y - x).$$

とする。$E = L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば次が成り立つ。

(iii) $\|\check{f}\|_E \le \exists C\|f\|_E$, $\|\tau_x f\|_E \le \exists C\|f\|_E$ for $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

(iv) $\lim_{x\to 0}\|\tau_x f - f\|_E = 0$ for $\forall f \in E$.

$F_f : g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$. とする。次の定理は Figà-Talamanca の定理を Banach function spaces に拡張したものである。

Theorem 2.1 ([13]). E_k $(k = 0,1,2,3)$ を (iii) を満たす *Banach function spaces* とする。さらに E_k $(k = 0,1,2)$ は (i), (ii), (iv) を満たすとする。$(E_2)^* = E_3$ (すなわち $f \mapsto F_f$ が E_3 から $(E_2)^*$ への線形同型な両連続写像) ならば、

$$A(E_0 : E_1, E_2)^* \cong M(E_1, E_3)$$

となる。ただし、$\cong$ は次の意味である。各 $m \in M(E_1, E_3)$ に対して $A(E_0 : E_1, E_2)$ 上の線形汎関数 φ_m が

$$\varphi_m(f) = \sum_{j=1}^{\infty} T_m f_j * g_j(0) \qquad \left(f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j * g_j \in A(E_0 : E_1, E_2)\right)$$

により定まり、$m \mapsto \varphi_m$ は $M(E_1, E_3)$ から $A(E_0 : E_1, E_2)^*$ への線形同型な両連続写像となる。

Figà-Talamanca [4] は $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ ならば

$$A(C_0 : L^p, L^{p'})^* \cong M(L^p, L^p)$$

を示した。この結果は、[5] で $M(L^p, L^q)$ の場合に拡張されている。

Corollary 2.2. *Theorem 2.1* の仮定もとで、$A(E_0 : E_1, E_2) = E_0$ ならば

$$M(E_1, E_3) \cong (E_0)^*.$$

Remark 2.1. $A(E_0 : E_1, E_2) = E_0$ のとき two norm theorem (see for example [11, Theorem D.6.3]) により $\|f\|_{A(E_0:E_1,E_2)} \sim \|f\|_{E_0}$.

Remark 2.2. Corollary 2.2 において、さらに Banach function space E_4 により $M(E_1, E_3) \cong (E_0)^* = E_4$ (すなわち $f \mapsto F_f$ が E_4 から $(E_0)^*$ への線形同

型な両連続写像）となるならば、φ_m ($m \in M(E_1, E_3)$) に対して F_k ($k \in E_4$) が対応する。$f = f_1 * g_2 \in E_0$, $f_1, g_1 \in \mathcal{S}$ をとると、

$$\varphi_m(f) = T_m f_1 * g_1(0),$$
$$F_k(f) = \int k(y)(f_1 * g_1)(y)\,dy = \check{k} * f_1 * g_1(0).$$

このことから

$$\mathcal{F}[\check{k}] = m, \quad T_m f = \check{k} * f.$$

3 Lorentz 空間

$f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して、分布関数 $\mu(f,s)$, 再配列 $f^*(t)$, その極大関数 $f^{**}(t)$ を

$$\mu(f,s) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}| \quad \text{for } s \geq 0,$$
$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \mu(f,s) \leq t\} \quad \text{for } t \geq 0,$$
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \quad \text{for } t > 0$$

で定義する。Lorentz 空間 $L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{L^{(p,q)}} < \infty$ であるような f の全体として定義する。ただし、

$$\|f\|_{L^{(p,q)}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty t^{(q/p)-1}(f^{**}(t))^q\,dt\right)^{1/q}, & 1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t), & 1 \leq p \leq \infty,\ q = \infty \end{cases}$$

である。

$1 < p = q \leq \infty$ ならば $L^{(p,p)}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ であり $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{(p,p)}} \leq p'\|f\|_{L^p}$ となる。

$1 < p < \infty$ かつ $1 \leq q \leq \infty$ のとき、および $p = q = \infty$ のとき、$\|f\|_{L^{(p,q)}}$ はノルムになり、$L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$ は Banach function space となる。$1 < p < \infty$ かつ $1 \leq q < \infty$ のとき $L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{S}$ を稠密に含む。

次の定理は Young の不等式の Lorentz 空間版である。

Theorem 3.1 ([14, Theorem 2.6]). $1 < p_k < \infty$ かつ $1 \leq q_k \leq \infty$ ($k = 0,1,2$) とする。$1/p_0 = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1/q_0 \leq 1/q_1 + 1/q_2$ ならば

$$\|f * g\|_{(p_0,q_0)} \leq 3p_0\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}.$$

Theorem 3.2. $1 < p_k < \infty$ かつ $1 < q_k < \infty$ $(k = 0, 1, 2)$ とする。$1/p_0 = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, $1/q_0 \leq 1/q_1 + 1/q_2$, $q_1 \leq q_2{}'$ ならば

$$A(L^{(p_0,q_0)}(\mathbb{R}^n) : L^{(p_1,q_1)}(\mathbb{R}^n), L^{(p_2,q_2)}(\mathbb{R}^n)) \subsetneqq L^{(p_0,q_0)}(\mathbb{R}^n).$$

Remark 3.1. $1 < p < \infty$ かつ $1 \leq q < \infty$ のとき $(L^{(p,q)})^*(\mathbb{R}^n) = L^{(p',q')}(\mathbb{R}^n)$, すなわち $f \mapsto F_f$ が $L^{(p',q')}(\mathbb{R}^n)$ から $(L^{(p,q)})^*(\mathbb{R}^n)$ への線形同型な両連続写像となる（例えば [1, Corollary 4.8] 参照)。

Proof of Theorem 3.2. Theorem 3.1 より

$$A(L^{(p_0,q_0)}(\mathbb{R}^n) : L^{(p_1,q_1)}(\mathbb{R}^n), L^{(p_2,q_2)}(\mathbb{R}^n)) \subset L^{(p_0,q_0)}(\mathbb{R}^n).$$

$\alpha = n/p_0$, $k_\alpha(x) = 1/|x|^{n-\alpha}$ とおくと、

$$k_\alpha \in L^{(p_0{}',\infty)} \setminus L^{(p_0{}',q_0{}')}.$$

また Theorem 3.1 に $1/p_2{}' = 1/p_1 + 1/p_0{}' - 1$, $1/q_2{}' \leq 1/q_1 + 1/\infty$ を適用して

$$\|k_\alpha * f\|_{(p_2{}',q_2{}')} \leq 3p_2{}'\|k_\alpha\|_{(p_0{}',\infty)}\|f\|_{(p_1,q_1)}.$$

よって Corollary 2.2, Remark 2.2 により

$$M(L^{(p_1,q_1)}(\mathbb{R}^n), L^{(p_2{}',q_2{}')}(\mathbb{R}^n)) \neq L^{(p_0{}',q_0{}')}(\mathbb{R}^n)$$

であり、求める結果を得る。 □

4 Orlicz 空間

関数 $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ が Young function であるとは、Φ が凸で左連続かつ $\lim_{t\to+0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = \Phi(+\infty) = +\infty$ を満たすときをいう。Young function は増加関数である。Young function Φ に対して Orlicz 空間を次のように定義する。

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon|f(x)|)\, dx < +\infty \text{ for some } \epsilon > 0 \right\},$$

$$\|f\|_\Phi = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

このとき $\|f\|_\Phi$ はノルムになり $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ は Banach function space となる。$\Phi(t)=t^p$, $1\le p<\infty$ のとき $L^\Phi(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ である。また $\Phi(t)=0$ for $0\le t\le 1$ かつ $\Phi(t)=+\infty$ for $t>1$ のとき $L^\Phi(\mathbb{R}^n)=L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

Young function Φ が次の条件を満たすとき Δ_2-condition を満たすといい、$\Phi\in\Delta_2$ と書く：

$$\Phi(2t)\le C\Phi(t),\quad t\ge 0$$

を満たす定数 $C>0$ が存在する。$\Phi\in\Delta_2$ ならば $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{S}$ を稠密に含む。

Young function Φ が次の条件を満たすとき ∇_2-condition を満たすといい、$\Phi\in\nabla_2$ と書く：

$$\Phi(t)\le\frac{1}{2k}\Phi(kt),\quad t\ge 0$$

を満たす定数 $k>1$ が存在する。

$1<p<\infty$ ならば $\Phi(t)=t^p\in\Delta_2\cap\nabla_2$ である。

Young function Φ に対して

$$\Phi^{-1}(t)=\inf\{s:\Phi(s)>t\}$$

とおく。Φ が全単射ならば、Φ^{-1} は通常の逆関数である。

次の定理は Young の不等式の Orlicz 空間版である。

Theorem 4.1 **([15, Theorem 2.5]).** Φ_k $(k=1,2,3)$ を *Young function* とする。もし $\Phi_1{}^{-1}(t)\Phi_2{}^{-1}(t)\le Ct\Phi_3{}^{-1}(t)$, を満たす定数 $C>0$ が存在すれば、

$$\|f*g\|_{\Phi_3}\le 2C\|f\|_{\Phi_1}\|g\|_{\Phi_2}.$$

Theorem 4.2. Φ_k, $(k=0,1,2)$ は *Young function* で $\Delta_2\cap\nabla_2$ を満たすとする。もし $C^{-1}t\Phi_0{}^{-1}(t)\le\Phi_1{}^{-1}(t)\Phi_2{}^{-1}(t)\le Ct\Phi_0{}^{-1}(t)$ を満たす定数 $C>0$ が存在すれば、

$$A(L^{\Phi_0}(\mathbb{R}^n):L^{\Phi_1}(\mathbb{R}^n),L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^n))\subsetneq L^{\Phi_0}(\mathbb{R}^n).$$

Remark 4.1. $\Phi\in\Delta_2$ のとき $(L^\Phi)^*(\mathbb{R}^n)=L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$, すなわち $f\mapsto F_f$ が $L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ から $(L^\Phi)^*(\mathbb{R}^n)$ への線形同型な両連続写像となる（例えば [16] 参照)。ただし

$$\widetilde{\Phi}(t)=\sup\{ts-\Phi(s):s\ge 0\},\quad t\ge 0.$$

Proof of Theorem 4.2. Theorem 4.1 より

$$A(L^{\Phi_0}(\mathbb{R}^n):L^{\Phi_1}(\mathbb{R}^n),L^{\Phi_2}(\mathbb{R}^n))\subset L^{\Phi_0}(\mathbb{R}^n).$$

$\rho(t)=1/\Phi_0{}^{-1}(1/t^n)$, $k(x)=\rho(|x|)/|x|^n$ とおくと $k\notin L^{\widetilde{\Phi}_0(\mathbb{R}^n)}$ かつ

$$\|k*f\|_{\widetilde{\Phi}_2}\le C\|f\|_{\Phi_1}\quad ([12,\text{ Corollary 2.3}]).$$

よって Corollary 2.2, Remark 2.2 により

$$M(L^{\Phi_1}(\mathbb{R}^n),L^{\widetilde{\Phi_2}}(\mathbb{R}^n))\neq L^{\widetilde{\Phi_0}}(\mathbb{R}^n)$$

であり、求める結果を得る。 □

5 L^p と ℓ^q のアマルガム空間

数列 $a=\{a_z\}_{z\in\mathbb{Z}^n}$ に対して

$$\|a\|_{\ell^q}=\|\{a_z\}_{z\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q}=\begin{cases}\left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^n}|a_z|^q\right)^{1/q} & 0<q<\infty,\\ \sup_{z\in\mathbb{Z}^n}|a_z| & q=\infty\end{cases}$$

とおく。原点中心で辺の長さが 1 の n 次元立方体を Q_0 で表す。すなわち $\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n:|x_i|\le 1/2,\ i=1,\cdots,n\}$. さらに $z\in\mathbb{Z}^n$ に対して $Q_z=\{x\in\mathbb{R}^n:x-z\in Q_0\}$ とおく。$0<p,q\le\infty$ に対して、アマルガム空間 $(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{(L^p,\ell^q)}<\infty$ であるような関数 f の全体として定義する。ただし

$$\|f\|_{(L^p,\ell^q)}=\left\|\left\{\|f\|_{L^p(Q_z)}\right\}_{z\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q}$$

とする。$p=q$ ならば $(L^p,\ell^p)(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ である。

$1\le p,q\le\infty$ ならば $\|f\|_{(L^p,\ell^q)}$ はノルムで $(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ は Banach function space となる。$1\le p,q<\infty$ ならば $(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{S}$ を稠密に含む。

次の定理は Young の不等式の アマルガム空間版である。

Theorem 5.1 ([2, p.79]). $1\le p_k,q_k\le\infty$ $(k=0,1,2)$ とする。$1/p_0\ge 1/p_1+1/p_2-1$ かつ $1/q_0\le 1/q_1+1/q_2-1$ ならば

$$\|f*g\|_{(L^{p_0},\ell^{q_0})}\le C\|f\|_{(L^{p_1},\ell^{q_1})}\|g\|_{(L^{p_2},\ell^{q_2})}.$$

Theorem 5.2. $1 < p_k, q_k < \infty$ $(k = 0, 1, 2)$ とする。$1/p_0 \geq 1/p_1 + 1/p_2 - 1$ かつ $1/q_0 \leq 1/q_1 + 1/q_2 - 1$ ならば

$$A((L^{p_0}, \ell^{q_0})(\mathbb{R}^n) : (L^{p_1}, \ell^{q_1})(\mathbb{R}^n), (L^{p_2}, \ell^{q_2})(\mathbb{R}^n)) \subsetneqq (L^{p_0}, \ell^{q_0})(\mathbb{R}^n).$$

Remark 5.1. $1 \leq p, q < \infty$ ならば $(L^p, \ell^q)^*(\mathbb{R}^n) = (L^{p'}, \ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$, すなわち $f \mapsto F_f$ が $(L^{p'}, \ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ から $(L^p, \ell^q)^*(\mathbb{R}^n)$ への線形同型な両連続写像となる（例えば [6, Theorem 2.6]) 参照)。

Proof of Theorem 5.2. Theorem 5.1 より

$$A((L^{p_0}, \ell^{q_0})(\mathbb{R}^n) : (L^{p_1}, \ell^{q_1})(\mathbb{R}^n), (L^{p_2}, \ell^{q_2})(\mathbb{R}^n)) \subset (L^{p_0}, \ell^{q_0})(\mathbb{R}^n).$$

$\alpha/n = 1/p_0$, $\beta/n = 1/q_0$ として

$$k(x) = \begin{cases} 1/|x|^{n-\alpha} & (|x| \leq 1), \\ 1/|x|^{n-\beta} & (|x| > 1). \end{cases}$$

とおくと $k \notin (L^{p_0'}, \ell^{q_0'})(\mathbb{R}^n)$ かつ

$$\|f * k\|_{(L^{p_2'}, \ell^{q_2'})} \leq C\|f\|_{(L^{p_1}, \ell^{q_1})} \quad ([3, \text{Theorem } 1.5]).$$

よって Corollary 2.2, Remark 2.2 により

$$M((L^{p_1}, \ell^{q_1})(\mathbb{R}^n), (L^{p_2'}, \ell^{q_2'})(\mathbb{R}^n)) \neq (L^{p_0'}, \ell^{q_0'})(\mathbb{R}^n)$$

であり、求める結果を得る。 □

References

[1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[2] J.-P. Bertrandias, C. Datry and C. Dupuis, *Unions et intersections d'espaces L^p invariantes par translation ou convolution*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978), no. 2, 53–84.

[3] M. Cowling, S. Meda and R. Pasquale, *Riesz potentials and amalgams*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), no. 4, 1345–1367.

[4] A. Figà-Talamanca, Translation invariant operators in L^p, Duke Math. J. 32 (1965), 495-501.

[5] A. Figà-Talamanca and G. I. Gaudry, Density and representation theorems for multipliers of type (p,q), J. Austral. Math. Soc. 7 (1967), 1-6

[6] J. Fournier and J. Stewart, *Amalgams of L^p and l^q*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 13 (1985), no. 1, 1–21.

[7] E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, vol. 2, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1970.

[8] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p-spaces, Acta Math. 104 (1960), 93-140.

[9] M. Jodeit, Restrictions and extensions of Fourier multipliers, Studia Math. 68 (1970), 215-226.

[10] V. Kokilashvili and M. Krbec, Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz spaces, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991.

[11] R. Larsen, An Introduction to the Theory of Multipliers, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[12] E. Nakai, *Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces*, Banach and Function Spaces (Kitakyushu, 2003), 323–333, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004.

[13] E. Nakai, N. Tomita and K. Yabuta, Extensions of Figà-Talamanca's multiplier theorem to Banach function spaces, submitted.

[14] R. O'Neil, *Convolution operators and $L(p,\ q)$ spaces*, Duke Math. J. 30 (1963), 129–142.

[15] R. O'Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces. I.*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 300–328.

[16] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1991.

[17] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

enakai@cc.osaka-kyoiku.ac.jp
tomita@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp
yabuta@ksc.kwansei.ac.jp