数理解析研究所講究録
1478 巻 2006 年 1-4

コーエン-マコーレー局所環上の局所コホモロジー加群の有限性に関する性質について

奈良教育大学 教育学部 川崎 謙一郎 (Ken-ichiroh Kawasaki)
Depertment of Mathematics,
Nara University of Education

§1. 局所コホモロジー加群の定義

定義 1 (Ext の直極限による定義). 上記のように R, I, M そして j を取る. このとき局所コホモロジー加群は次のように定義される:

$$H_I^j(M) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ext}_R^j(R/I^n, M).$$

定義 2 (Koszul コホモロジー加群の直極限による定義). 上記のように R, I, M そして j を取る. $I = (x_1, \ldots, x_l)$ をイデアル I の生成系による表現とする. $H^j(x_1, \ldots, x_l, M)$ を R の Koszul 複体の双対のコホモロジー加群とする. このとき局所コホモロジー加群は次のように定義される:

$$H_I^j(M) = \lim_{n\to\infty} H^j(x_1^n, \ldots, x_l^n, M).$$

定義 3 (Čech コホモロジー加群による定義). 上記のように R, I, M そして j を取る. $I = (x_1, \ldots, x_l)$ をイデアル I の生成系による表現とする. Čech 複体を

$$C^\bullet : 0 \longrightarrow M \longrightarrow \oplus_{i=1}^l M_{x_i} \longrightarrow \oplus_{i<j} M_{x_i x_j} \longrightarrow \oplus_{i<j<k} M_{x_i x_j x_k} \longrightarrow \cdots$$

とし, j 番目のコホモロジー加群を $H^j(C^\bullet)$ で表す. このとき局所コホモロジー加群は次のように定義される:

$$H_I^j(M) = H^j(C^\bullet).$$

これら 3 つの定義による局所コホモロジー加群はすべて一致する (cf. [BS]).

§2. 正則環でのいくつかの話題

局所コホモロジー加群自体は一般に有限生成ではない ([F1], [F2] などを参照). 次の結果により, 局所コホモロジー加群は (有限生成ではないにも関わらず) 美しい性質を持つ事が分かる.

以下, 正則環における結果である.

定理 (Huneke-Sharp, Lyubeznik). R が体を含む正則局所環で I を R のイデアルとし, $\mathbf{m}$ を極大イデアルとする. このとき, すべての i, j に対して, 次が成り立つ.

(i) $H_{\mathbf{m}}^j(H_I^i(R))$ が移入的である.
(ii) $H_I^i(R)$ の移入的次元は $H_I^i(R)$ の台の次元を越えない.
(iii) $H_I^i(R)$ の付随素イデアルの集合は有限である.
(iv) $H_I^i(R)$ のすべての Bass 数は有限である.

正標数の場合 Huneke-Sharp がフロベニウス写像を巧みに使って証明した. 標数 0 の場合 Lyubeznik が代数的 D-加群の理論を使って証明した. 可換代数学への代数的 D-加群の初めての応用であった.

定理 (Lyubeznik, Zhou). R が不分岐正則局所環で I を R のイデアルとし, $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする. このとき, すべての i, j に対して, 次が成り立つ.

(i) $H^j_{\mathfrak{m}}(H^i_I(R))$ は移入的次元が 1 をこえない.
(ii) $H^i_I(R)$ の移入的次元は $H^i_I(R)$ の台の次元 $+1$ をこえない.
(iii) $H^i_I(R)$ の付随素イデアルの集合は有限である.
(iv) $H^i_I(R)$ のすべての Bass 数は有限である.

この場合については Lyubeznik が代数的 D-加群の理論の analogy を構成することによって成功した.

局所コホモロジー加群は D-加群の構造を持つが, 興味深いことに, Hasse-Schmidt の高階導分の概念が, Zhou により局所コホモロジー加群の構造を知るために応用されている (cf. [Z]).

では, 正則環以外の環ではどうであろうか. 一般には, 付随素イデアルの集合が有限であるかどうかは否定的である. 次の例により, 第 2 局所コホモロジー加群でさえも付随素イデアルの集合が有限でないことが分かる.

例 2 (M. Katzman [Ka, Theorem 1.2]). k を任意の体とする. $R_0 = k[x, y, s, t]$, $S = R_0[u, v]$ とする. 更に, $f = sx^2v^2 - (t+s)xyuv + ty^2u^2$ とし $R = S/fS$ と置く. R_+ を u と v の像によって生成される R のイデアルとすると, 局所コホモロジー加群

$$H^2_{R_+}(R)$$

の付随素イデアルの集合は有限集合ではない.

§3. 主結果

定理 1. $\phi : (R, \mathfrak{m}, k) \longrightarrow (R', \mathfrak{m}', k)$ をネーター局所環間の平坦な環準同型写像とし, 加群として有限であるとする. I' を R' のイデアルとする. i を非負の整数とする. さらに, $I' = IR'$ であると仮定する. ただし I は I' の R への引き戻しである. このとき, 次が成り立つ:

(iii) もし, $H^i_I(R)$ の付随素イデアルの集合が有限であるならば, $H^i_{I'}(R')$ の付随素イデアルの集合も有限である;
(iv) もし $H^i_I(R)$ のすべての Bass 数は有限であるならば, $H^i_{I'}(R')$ のすべての Bass 数は有限である.

系 1. $(A, \mathfrak{m})$ を体 k を含むコーエン-マコーレー局所環とし, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を A の巴系とする. I を $x_2, \ldots, x_n$ に関する k 上の多項式によって生成されるイデアルとする. さらに, $A/\mathfrak{m}$ が k 上分離的であると仮定する. このとき, すべての i に対して次が成り立つ.

(iii) $H^i_I(A)$ の付随素イデアルの集合は有限である.
(iv) $H^i_I(A)$ のすべての Bass 数は有限である.

系 2. A を体を含まないコーエン-マコーレー完備局所環とし, $x_1(=\pi), x_2, \ldots, x_n$ を A の巴系とする. 但し, π を R の係数環 W の正則巴系とする. I を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する W 係数の多項式によって生成されるイデアルとする. このとき, すべての i に対して, 次が成り立つ.

(iii) $H^i_I(A)$ の付随素イデアルの集合は有限である.
(iv) $H^i_I(A)$ のすべての Bass 数は有限である.

正則環は大域次元が有限であるから, 分岐正則局所環の場合については, つぎのことが言える.

定理 2. $(A, \mathfrak{m})$ を分岐正則局所環, A の次元を d, そして $x_1, x_2, \ldots, x_d$ を A の巴系とする. 但し $x_1 = p$ を, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ の標数とする. 今, I を $\mathbb{Z}$ 上の $x_1, \ldots, x_d$ についての多項式で生成される A のイデアルとする. このとき, 非負の整数 $i, j \geq 0$ に対して次が成り立つ:

(i) $\text{inj.dim} H^j_{\mathfrak{m}}(H^i_I(A)) \leq 1$;
(ii) $\text{inj.dim} H^i_I(A) \leq \dim H^i_I(A) + 1$;
(iii) $H^i_I(A)$ の付随素イデアルの集合は有限である;
(iv) $H^i_I(A)$ のすべての Bass 数は有限である.

この証明には, 次の補題が必要である. specialist には周知されている命題かもしれない.

補題. $(A, \mathfrak{p})$ をネーター局所環とし, その極大イデアルを $\mathfrak{p}$ とする. M を A-加群で $V(\mathfrak{p})$ に台を持つとし, l を非負整数とする. 今 M を移入次元が有限な A-加群とするとき次が成り立つ.

(i) もし長さ有限である A-加群 N が存在して, すべての $n \geq 1$ に対して $\text{Ext}^n_A(N, M) = 0$ であるならば, M は移入 A-加群である;
(ii) もし長さ有限である A-加群 N が存在して, すべての $n \geq l+1$ に対して $\text{Ext}^n_A(N, M) = 0$ であるならば, $\text{inj.dim}_A M \leq l$ である.

分岐正則局所環の場合においては, 次の予想が未解決である.

予想 (cf. [Ha]). R を分岐正則局所環とし, I を R の任意のイデアルとする. このとき, すべての $j \geq 0$ に対して局所コホモロジー加群 $H^j_I(R)$ の Bass 数は有限である.

References

[BS] M.P.Brodmann and R.Y.Sharp, *Local cohomology* An algebraic introduction with geometric applications, Cambridge studies in advance mathematics **60**, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[F1] G. Faltings, 'Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen', Archiv der Math. **30** (1978), 473-476.

[F2] G. Faltings, 'Über lokale Kohomologiegruppen hoher Ordnung', J. für Reine und Angew. Math. **313** (1980), 43-51.

[Ha] R. Hartshorne *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*, Lect. Notes Math. **156**, Springer-Verlag, Heidelberg, (1970).

[Ka] Mordechai Katzman, *An example of an infinite set of associated primes of a local cohomology modules*, Journal of Algebra, **252**, (2002), 161-166.

[L1] G. Lyubeznik, 'Finiteness properties of local cohomology modules (an application of D-modules to commutative algebra)', Invent. Math. 102 (1993) 41-55.

[L2] G. Lyubeznik, 'Finiteness properties of local cohomology modules of mixed characteristic: the unramified case', Communications in algerbra, 28 (12), (2000) 5867-5882.

[L3] G. Lyubeznik, 'Finiteness properties of local cohomology modules: a characteristic-free approach', Journal of pure and applied algerbra, 151, (2000) 43-50.

[Sin] Anurag K. Singh, 'p-torsion elements in local cohomology modules', Mathematical Research Letters, 7, (2000) 165-176.

[Z] C. Zhou, *Higher derivations and local cohomology modules*, Journal of Algebra, **201**, no. 2, (1998), 363-372.