数理解析研究所講究録
1483 巻 2006 年 222-231

Camassa-Holm 方程式の多重ソリトン解とその性質

山口大工学部　松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

I. 序論

以下の偏微分方程式について考察する：

$$u_t+\alpha u_x-u_{xxt}+(\beta+1)uu_x=\beta u_xu_{xx}+uu_{xxx},\ u=u(x,t). \tag{1}$$

特にここでは $\beta=2,\ \alpha=2\kappa^2(\kappa$:正のパラメータ) の場合を取り扱う．このとき（1）は Camassa-Holm (CH) 方程式 [1]

$$u_t+2\kappa^2u_x-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx} \tag{2}$$

となる．$\beta=3$ の場合 (1) は Degasperis-Procesi (DP) 方程式 [2, 3] となるが，これの多重ソリトン解は最近得られた [4,5]．CH 方程式は完全可積分方程式の候補として数学的な議論からすでに提案されていたが [6]，Camassa 及び Holm はこの方程式を浅い水のモデルである Green-Naghdi 方程式系から再導出した [1]． また，完全流体の基礎方程式に基づいて CH 方程式を導出する試みもある [7]．本稿では CH 方程式の多重ソリトン解の構成法，及び解の性質について議論する． なお，主要な結果はすでに論文 [8] で公表済みなので以下は概要のみを記す．

II. 多重ソリトン解の構成手続き

A. 座標変換

最初に方程式（2）を以下のように書き換える

$$r_t+(ru)_x=0 \tag{3}$$

ここで

$$r^2 = u - u_{xx} + \kappa^2. \tag{4}$$

次に座標変換, $(x,t) \to (y,\tau)$ を以下の関係式により導入する

$$dy = rdx - rudt,\ d\tau = dt,\ \left(\frac{\partial}{\partial x} = r\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - ru\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{5}$$

これにより CH 方程式（2）は

$$r_\tau + r^2 u_y = 0 \tag{6}$$

のように書き換えられる.

新たな変数 rを用いると, u は以下のように表せる

$$u = -r(\ln\ r)_{\tau y} + r^2 - \kappa^2. \tag{7}$$

（7）を（6）へ代入すると

$$Q_\tau = r_y \tag{8a}$$

となる. ここで Q は

$$Q = \frac{r_{yy}}{2r} - \frac{r_y^2}{4r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\kappa^2}\right) \tag{8b}$$

で定義される新たな従属変数である.

B. **変換された方程式**

(8a), (8b) から変数 rを消去すると Q に対する以下の非線形方程式が得られる：

$$Q_t + 2\kappa^3 Q_y + 4\kappa^2 QQ_t + 2\kappa^2 Q_y \partial_y^{-1} Q_t - \kappa^2 Q_{tyy} = 0. \tag{9}$$

ここで（5）によりτ と t は同一視できるので時間変数τの代わりに t を用いた. また, $\partial_y^{-1} = -\int_y^\infty dy$は積分演算子である.

観察

- 方程式（9）は浅水波のモデル方程式 [9]

$$u_t + u_y - 4uu_t + 2u_y \int_y^\infty u_t dy - u_{tyy} = 0,\ u = u(y,t)$$

を適当にスケール変換したものに他ならない.

C. **多重ソリトン解の構成**

Step 1. 方程式（9）の多重ソリトン解:

$$Q = -2(\ln f)_{yy}. \tag{11}$$

ここでτ-関数 fは 浅水波のモデル方程式 [9] の多重ソリトン解を与えるτ-関数である.

Step 2. r の fによる表式:

（１１）を（８）へ代入し，境界条件 $r(\pm\infty, t) = \kappa$のもとで yに関して積分すると

$$r = \kappa - (\ln\ f)_{ty}. \tag{12}$$

Step 3. 逆変換:

(y, t) から (x, t) への逆変換を決定する方程式は

$$x_y = r^{-1},\ x_t = u. \tag{13}$$

前者より

$$x = \frac{y}{\kappa} + \int_{-\infty}^{y} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\kappa}\right) dy + d. \tag{14}$$

ここで d は積分定数.

（１２）から得られるrを（１４）へ代入した後yで積分するとxがyとtの関数として表せる．これをtで微分するとuが得られる．結論として，CH 方程式の多重ソリトン解は以下の様なパラメータ表示で表現できる：

$$u = u(y, t), \quad x = x(y, t).$$

注意

• 多重ソリトン解に対して（１４）の積分を実行することが解の構成における最も困難な問題である.

III. 多重ソリトン解

A. N-ソリトン解

N-ソリトン解は以下のパラメータ表示を有する：

$$u(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\ln \frac{f_2}{f_1}\right) \tag{15}$$

$$x(y,t) = \frac{y}{\kappa} + \ln \frac{f_2}{f_1} + d. \tag{16}$$

ここで

$$f_1 = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(\xi_i - \phi_i) + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i\mu_j\gamma_{ij}\right] \tag{17a}$$

$$f_2 = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(\xi_i + \phi_i) + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i\mu_j\gamma_{ij}\right] \tag{17b}$$

$$\xi_i = k_i\left(y - \frac{2\kappa^3}{1-\kappa^2 k_i^2}t - y_{i0}\right),\ (i = 1,2,...,N) \tag{18a}$$

$$e^{\gamma_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2},\ (i,j = 1,2,...,N; i \neq j) \tag{18b}$$

$$e^{-\phi_i} = \frac{1-\kappa k_i}{1+\kappa k_i},\ (0 < \kappa k_i < 1),\ (i = 1,2,...,N). \tag{18c}$$

上記結果はτ−関数，f_1, f_2, fの間に成立する次の恒等式から従う：

$$f^2 - f_1 f_2 = \kappa(f_1 f_{2,y} - f_{1,y} f_2) \tag{19}$$

$$\kappa f_1 f_2 = \kappa f^2 - 2(f f_{ty} - f_t f_y). \tag{20}$$

ここで

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i\xi_i + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i\mu_j\gamma_{ij}\right]$$

は方程式（9）のN−ソリトン解を与えるτ−関数である.

（12），（20）より

$$r = \kappa\frac{f_1 f_2}{f^2}. \tag{21}$$

（１９），（２１）より

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\kappa}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{f_2}{f_1}\right). \tag{22}$$

上式を（１４）へ代入し，yに関する積分を実行すると（１６）が得られる.（１５）は（１３），及び（１６）より従う.

注意

• DP 方程式の場合，N-ソリトン解は（１５），及び（１６）と同じ形で表せる．ただし f_1，f_2 は浅水波のモデル方程式 [10]

$$u_t+u_y-3uu_t+3u_y\int_y^{\infty}u_t dy-u_{tyy}=0,\ u=u(y,t)$$

の N-ソリトン解を与えるτ-関数と同じ構造を有する.

B. 1-**ソリトン解と** peakon **極限**

1. 1-ソリトン解

$$u=\frac{2\kappa\tilde{c}_1k_1^2}{1+\kappa^2k_1^2+(1-\kappa^2k_1^2)\cosh\xi_1},\ (\tilde{c}_1=\kappa c_1) \tag{23}$$

$$x-c_1t-x_{10}=\frac{\xi_1}{\kappa k_1}+\ln\left(\frac{(1-\kappa k_1)\mathrm{e}^{\xi_1}+1+\kappa k_1}{(1+\kappa k_1)\mathrm{e}^{\xi_1}+1-\kappa k_1}\right)+d \tag{24a}$$

$$\xi_1=k_1\left(y-\frac{2\kappa^3}{1-\kappa^2k_1^2}t-y_{10}\right),\ c_1=\frac{2\kappa^2}{1-\kappa^2k_1^2}. \tag{24b}$$

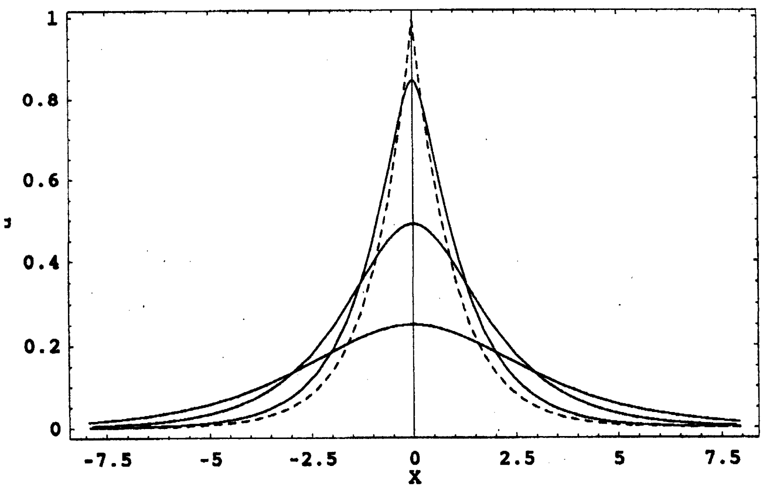

図１：1-ソリトン解と peakon 極限．$c_1=0,\kappa=0.71,0.55,0.28,0.$ 波線は peakon 解を表す.

2. Peakon 極限

CH 方程式（2）は,$\kappa = 0$ の時 peakon 解 [1] を有する：

$$u(x,t) = c\mathrm{e}^{-|x-ct-x_0|}. \tag{25}$$

この解は極限操作 $\kappa \to 0, \kappa k_1 \to 1$ により（２２）,（２３）から導かれる．図１に1-ソリトン解，及びその peakon 極限を図示する．パラメータκの値が小さくなるとともに，ソリトン解が peakon 解に漸近する様子が分かる．

C. 2-**ソリトン解**

f_1, f_2 は

$$f_1 = 1 + \mathrm{e}^{\xi_1-\phi_1} + \mathrm{e}^{\xi_2-\phi_2} + \delta\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2-\phi_1-\phi_2} \tag{26a}$$

$$f_2 = 1 + \mathrm{e}^{\xi_1+\phi_1} + \mathrm{e}^{\xi_2+\phi_2} + \delta\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\phi_1+\phi_2} \tag{26b}$$

と書ける．ここで

$$e^{-\phi_i} = \frac{1-\kappa k_i}{1+\kappa k_i}, \ (0 < \kappa k_i < 1), \ (i = 1, 2). \tag{27a}$$

$$\delta = e^{\gamma_{12}} = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}. \tag{27b}$$

図２に2-ソリトン解の相互作用を示す．

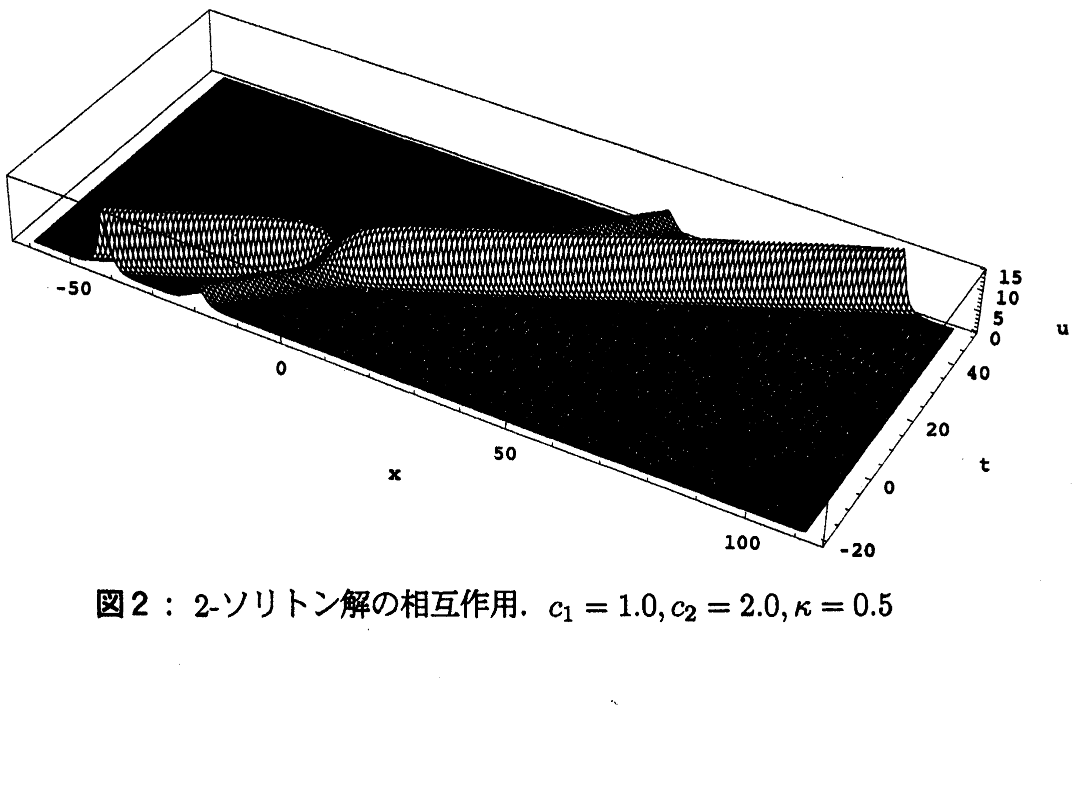

図２：2-ソリトン解の相互作用．$c_1 = 1.0, c_2 = 2.0, \kappa = 0.5$

IV. N-ソリトン解の漸近形

A. 漸近形

$t \to \pm\infty$ において u は

$$u \sim \sum_{j=1}^{N} u_j(\xi_j - \gamma_j^{(-)}),\ \gamma_j^{(-)} = \ln\left[\prod_{l=j+1}^{N} e^{\gamma_{jl}}\right],\ (t \to -\infty) \tag{28a}$$

$$u \sim \sum_{j=1}^{N} u_j(\xi_j - \gamma_j^{(+)}),\ \gamma_j^{(+)} = \ln\left[\prod_{l=1}^{j-1} e^{\gamma_{jl}}\right],\ (t \to +\infty) \tag{28b}$$

のように振る舞う．ここで $u_j(\xi_j)$ は1-ソリトン解．また，座標変換（１６）の漸近形は以下のようになる

$$x - c_j t - x_{j0} \sim \frac{\xi_j}{\kappa k_j} + \ln\left[\frac{(1-\kappa k_j)\mathrm{e}^{\xi_j - \gamma_j^{(-)}} + 1 + \kappa k_j}{(1+\kappa k_j)\mathrm{e}^{\xi_j - \gamma_j^{(-)}} + 1 - \kappa k_j}\right]$$
$$- \sum_{l=1}^{j-1} \ln\left(\frac{1+\kappa k_l}{1-\kappa k_l}\right)^2 + d,\ (t \to -\infty) \tag{29a}$$

$$x - c_j t - x_{j0} \sim \frac{\xi_j}{\kappa k_j} + \ln\left[\frac{(1-\kappa k_j)\mathrm{e}^{\xi_j - \gamma_j^{(+)}} + 1 + \kappa k_j}{(1+\kappa k_j)\mathrm{e}^{\xi_j - \gamma_j^{(+)}} + 1 - \kappa k_j}\right]$$
$$- \sum_{l=j+1}^{N} \ln\left(\frac{1+\kappa k_l}{1-\kappa k_l}\right)^2 + d,\ (t \to +\infty). \tag{29b}$$

ここで $c_j = \frac{2\kappa^2}{1-\kappa^2 k_j^2}$ は (x,t) 座標系でのソリトンの速度である．

B. 位相のずれ

（２８），（２９）より相互作用による j 番目のソリトンの位相のずれは以下のように表せる：

$$\Delta_j = \frac{1}{\kappa k_j}\left(\gamma_j^{(+)} - \gamma_j^{(-)}\right) + \sum_{l=1}^{j-1} \ln\left(\frac{1+\kappa k_l}{1-\kappa k_l}\right)^2 - \sum_{l=j+1}^{N} \ln\left(\frac{1+\kappa k_l}{1-\kappa k_l}\right)^2$$
$$(j = 1, 2, ..., N). \tag{30}$$

注意

- （３０）の右辺第１項は水の波のモデル方程式（９）の $N-$ソリトン解の位相のずれ，第２，及び第３項は座標変換による補正項に対応している．

C. peakon 極限

peakon 極限, $\kappa \to 0, \kappa k_j \to 1, c_j = \mathrm{const.}$ で（３０）は

$$\Delta_j = \sum_{l=j+1}^{N} \ln\left(\frac{c_j}{c_j - c_l}\right)^2 + \sum_{l=1}^{j-1} \ln\left(\frac{c_j}{c_j - c_l}\right)^2, \ (j = 1, 2, ..., N) \tag{31}$$

に還元する.

D. ２個のソリトンの相互作用特性

- 大きいソリトンの位相のずれ Δ_1 は常に正.
- 小さいソリトンの位相のずれ Δ_2 が零となる臨界曲線が存在する．これを越えると$\Delta_2 > 0$.

V. CH 方程式の短波長極限

A. 短波長方程式

以下の座標変換，及び摂動展開で短波長極限を定義する：

座標変換：

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \ \tau = \epsilon t \tag{32}$$

摂動展開：

$$u = \epsilon^2(u_0 + \epsilon u_1 + \cdots) \tag{33}$$

（３２),（３３）を　CH 方程式（２）へ代入すると u_0は次の方程式を満たす：

$$u_{0,\tau\xi\xi} + 2\kappa^2 u_{0,\xi} + 2u_{0,\xi}u_{0,\xi\xi} + u_0 u_{0,\xi\xi\xi} = 0.$$

ここで（２）の u_xの係数は$-2\kappa^2$で置き換えた。上式をもとの変数で書き直すと

$$u_{txx} + 2\kappa^2 u_x + 2u_x u_{xx} + u u_{xxx} = 0. \tag{34}$$

（３４）で$\kappa = 0$ と置いた式は Hunter-Saxton 方程式と呼ばれることがある [11].

B. N-ソリトン解

方程式（３４）の $N-$ソリトン解は以下のパラメータ表示で与えられる：

$$u(y, t) = \frac{2}{\kappa^2}(\ln f)_{tt} \tag{35}$$

$$x(y,t) = \frac{y}{\kappa} + \frac{2}{\kappa^2}(\ln f)_t + d. \tag{36}$$

ここで

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i \xi_i + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i \mu_j \gamma_{ij}\right] \tag{37a}$$

$$\xi_i = k_i\left(y - \frac{2\kappa}{k_i^2}t - y_{i0}\right),\ (i = 1,2,...,N) \tag{37b}$$

$$e^{\gamma_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}.\ (i,j = 1,2,...,N; i \neq j) \tag{37c}$$

C. 1-**ソリトン解**

$$u(y,t) = \frac{2}{k_1^2}\mathrm{sech}^2\frac{\xi_1}{2} \tag{38a}$$

$$x(y,t) = \frac{y}{\kappa} - \frac{2}{\kappa k_1}\tanh\frac{\xi_1}{2} + d \tag{38b}$$

$$\xi_1 = k_1\left(y - \frac{2\kappa}{k_1^2}t - y_{10}\right). \tag{38c}$$

図3に1-ソリトン解を示す．解はカスプ（波の頂上で勾配が無限大）となる．

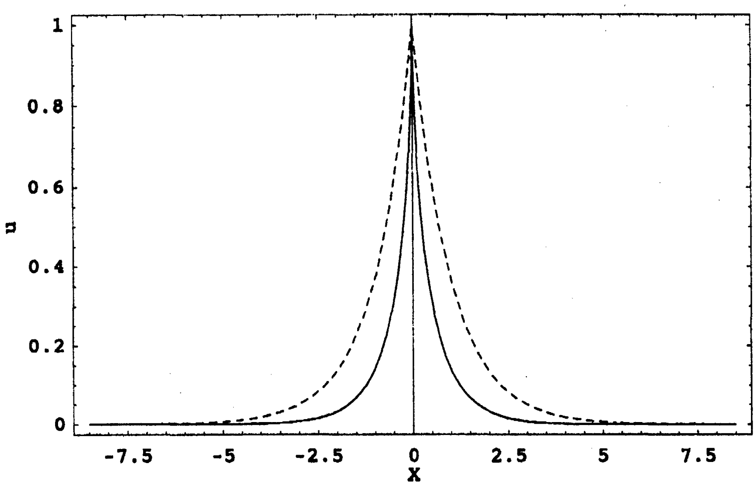

図3：1-ソリトン解. $c_1 = 1, \kappa = 1$（実線). 波線はCH方程式のpeakon解 $(c_1 = 1, \kappa = 0)$.

VI. 要約

- CH 方程式の N-ソリトン解はDP 方程式のそれに比べて異なる構造を有する.
- ソリトンの相互作用は従来からＫｄＶ方程式やＫＰ方程式等でよく知られている性質に比べ幾つかの新しい側面がみられる.
- CH 方程式の短波長極限方程式はカスプソリトン解を有する.

参考文献

[1] R. Camassa and D.D. Holm, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 1661.

[2] A. Degasperis and M. Procesi, in *Symmetry and Perturbation Theory*, ed A. Degasperis and G. Gaeta (World Scientific, Singapore, 1999) 22.

[3] A. Degasperis, A.N.W. Hone and D.D. Holm, Theore. Math. Phys. **133** (2002) 1463.

[4] Y. Matsuno, Inverse Problems, **21** (2005) 1553.

[5] Y. Matsuno, Inverse Problems, **21** (2005) 2085.

[6] B. Fuchssteiner and A. Fokas, Physica D **4** (1981) 47.

[7] R. S. Johnson, J. Fluid Mech. **455** (2002) 63.

[8] Y. Matsuno, J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 1983.

[9] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, Stud. Appl. math. **53** (1974) 249.

[10] R. Hirota and J. satsuma, J. Phys. Socx. Jpn. **40** (1976) 611.

[11] J.K. Hunter and R. Saxton, SIAM J. Appl. Math. **51** (1991) 1498.