

## 高速に回転する球面上の 2 次元順圧減衰性乱流

京都大学・数理解析研究所 竹広 真一 (Shin-ichi Takchiro)  
Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

京都大学・数理解析研究所 山田 道夫 (Michio Yamada)  
Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

北海道大学・大学院理学研究科 林 祥介 (Yoshi-Yuki Hayashi)  
Faculty of Science,  
Hokkaido University

### 1 はじめに

地球や惑星大気の大規模な運動の振舞を支配する大きな要因のうち、自転の効果と重力による密度安定成層の影響がもっとも基本的なものとしてあげられる。この 2 つの効果を受けたほぼ水平 2 次元的な流体運動の性質を調べることで、惑星大気の縞状構造や帯状流の形成を考察する試みがこれまでに行なわれてきている (例えば, Rhines, 1975; Williams, 1978; Cho and Polvani, 1996; Li and Montgomery, 1996; 1997; Nozawa and Yoden, 1997; Taniguchi *et al.*, 2002)。回転球面上の 2 次元順圧モデルでの減衰性乱流はそのような試みのなかでも、もっとも理想化された設定の下での基本的な問題の一つである。余田と山田 [Yoden and Yamada(1993)] は初めて全球領域での回転球面上の減衰性乱流の数値実験を行ない、エネルギースペクトルが比較的小さな水平波数領域に集中した複数の初期状態からの流れ場の時間発展を計算し、その統計的平均状態を調べることで中低緯度の縞状構造と極域の西向き周極渦が出現することを示した。しかしながら、彼らの用いた初期状態は渦度方程式の非線形項と線形項がバランスするところの特徴的な波数である Rhines 波数よりも小さいところに集中していたために、計算された流れ場は乱流状態ではなく線形波動がはじめから卓越している状況であった。そこで、石岡ら [Ishioka *et al.*(1999)] と余田ら [Yoden *et al.*(1999)] は、様々な種類のエネルギースペクトルがより高波数帯に集中した初期状態からのエネルギーの逆カスケード過程によって生じる流れ場を高解像度のモデルを用いて時間発展計算により求め、あらためて初期状態のエネルギースペクトル分布の形に依存することなく中低緯度の縞状構造と極域の西向き周極渦が出現することを示し、回転が大きくなるにつれてその縞状構造の幅が小さくなる傾向を見いだした。しかしながら、この縞状構造の流れの成因や性質はいまだ定性的にしか考察されておらず [Hayashi *et al.*(2000), Yoden *et al.*(2002)], たとえば周極渦の強さと幅の自転速度依存性などは調べられてはいない。そこで本研究では、従来扱われてきた自転速度がより大きな値の場合にまで掘り上げて流れの性質のパラメータ依存性を定量的に調べ、自転速度が大きくなったときの漸近的性質を議論する。

## 2 モデルと数値実験

支配方程式は回転系での渦度の鉛直成分の式である.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = (-1)^{p+1} \nu_{2p} (\nabla^2 + 2)^p \zeta, \quad (1)$$

ここで  $\zeta$  は渦度の動径成分,  $t$  は時間,  $\psi$  は流線関数,  $\Omega$  は球の回転角速度,  $\lambda$  は経度,  $\nu_p$  は高階粘性の係数である.  $J(f, g) \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial g}{\partial \lambda}$  はヤコビアンであり,  $\varphi$  は緯度,  $\mu = \sin \varphi$  は  $\sin$  緯度である. 長さスケールは球の半径で, 速度スケールは初期状態の典型的な大きさで, (初期運動エネルギーの平方根), 時間スケールは流れによる移流時間で無次元化している. 数値計算を行なうために各変数を球面調和関数で展開し, 水平全波数  $N$  までで切断したスペクトルモデルを構成する [Ishioka *et al.*(2000)].

$$\psi(\lambda, \varphi, t) = \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n \tilde{\psi}_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \varphi) \quad (2)$$

非線形項は実空間で計算し球面調和関数変換で波数空間にもどす変換法により評価する. 実空間の格子点は緯度方向に 512 点, 経度方向に 256 点, 切断する全波数は  $N = 170$  としており, 非線形項によるエイリアジングを避けている.

数値粘性は  $p = 8, \nu_{2p} = 10^{-34}$  とした. 時間積分は変数変換によって線形項を解析的に評価する演算子分割処理法を施し, 非線形項を 4 次のルンゲクッタ法で計算した.

初期場は余田ら [Yoden *et al.*(1999)] の用いたエネルギースペクトル密度の一つを採用した. すなわち,  $E(n, t) = \frac{1}{2} n(n+1) \sum_{m=-n}^n |\tilde{\psi}_n^m(t)|^2$  の関数形が

$$E(n, t=0) = \frac{A n^{\gamma/2}}{(n+n_0)^\gamma} \quad (3)$$

の条件を満たすように与えた. 各帯状波数  $m$  の成分と位相は乱数で適当に変化させたものを 25 種類用意した. ここで係数  $A$  は無次元化した全運動エネルギー  $\mathcal{E} = \sum_{n=2}^N E(n, t=0) = 1$  となるように定める.  $n_0$  はエネルギー分布のピークとなる全波数を表しており, ここでは  $n_0 = 50$  とした.  $\gamma$  はスペクトル分布の幅を定めるパラメータであり,  $\gamma = 100$  に固定した.

これまでの研究では無次元回転角速度が  $\Omega \leq 400$  の場合までしか扱っていなかった. これに対して本研究では回転角速度  $\Omega$  を 0, 50, 100, 200, 400, 1000, 4000, 10000 の 8 通りの場合について各初期値から時間発展を計算し, その結果を足しあわせ, さらに南北反転させて足しこんで 50 ケースのアンサンブル平均場を作成し, その結果を解析する.

時間積分は帯状流が十分に発達しエネルギーの時間変化がおちつくまで計算した. 時間刻と時間積分の長さを Table 2 にしめす. これまでの研究 [Yoden *et al.*(1999)] では時間積分

$\Omega$	$\Delta t$	$t_{final}$	$n_\beta$
0	$1 \times 10^{-3}$	5	0
50	$1 \times 10^{-3}$	80	5.27
100	$1 \times 10^{-3}$	80	7.45
200	$1 \times 10^{-3}$	40	10.5
400	$1 \times 10^{-3}$	20	14.9
$10^3$	$4 \times 10^{-4}$	20	23.6
$4 \times 10^3$	$1 \times 10^{-4}$	20	47.1
$10^4$	$4 \times 10^{-5}$	10	74.5

Table 1: The value of time increment  $\Delta t$  the length of time integration  $t_{final}$ , and characteristic wavenumber  $n_\beta = \sqrt{\pi\Omega/\sqrt{2\mathcal{E}}}$  for each value of the rotation rate  $\Omega$ .

を  $t=5$  でしか行なっていなかったことに注意されたい。以前の研究では帯状流が発達する途中の段階での流れ場しか解析しておらず最終的にどの程度まで周極流が強くなるかはわかっていない。

### 3 数値実験結果 – 一例

アンサンブル解析をとる前の、とある初期値から出発して計算した結果の一例を示す。Fig.1 は典型的なある初期状態の渦度・平均帯状流・エネルギースペクトル分布を示している。全波数  $n=50$  程度のものに相当する小さな渦が球面上にランダムに分布している様子が見られる。対応して初期の帯状平均場も 50 本弱の縞状構造となっている。エネルギースペクトル分布はそのピークが  $n=50$  で 10 程度の波数幅帯に集中している。

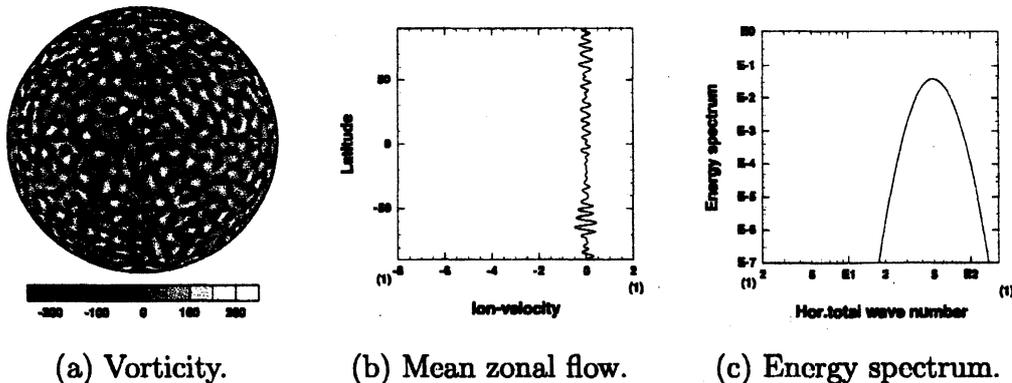


Figure 1: An example of the initial states.

Fig.2, Fig.3左は, Fig.1から出発して時間積分して得られたさまざまな自転角速度の下での最終状態での渦度分布である。  $0 \leq \Omega \leq 400$  では, これまで行なわれてきた研究と整合

的な結果となっている。  $\Omega = 0$  では初期状態の小さな渦よりもスケールのおおきいくつかの孤立した渦が存在している。回転が次第に大きくなるにつれて、東西方向に引き伸ばされた構造が目立つようになる。これまでに行なわれていないさらに高回転の場合である  $\Omega > 400$  でもその傾向は基本的には変わらない。回転が大きくなるほど東西への引き伸ばしが強まり縞状構造の幅が次第にせまくなるように見える。しかしながら、  $\Omega = 10000$  程度になると縞状の構造の内部に縦横比が 1 程度の渦列が見られることが特徴的である。

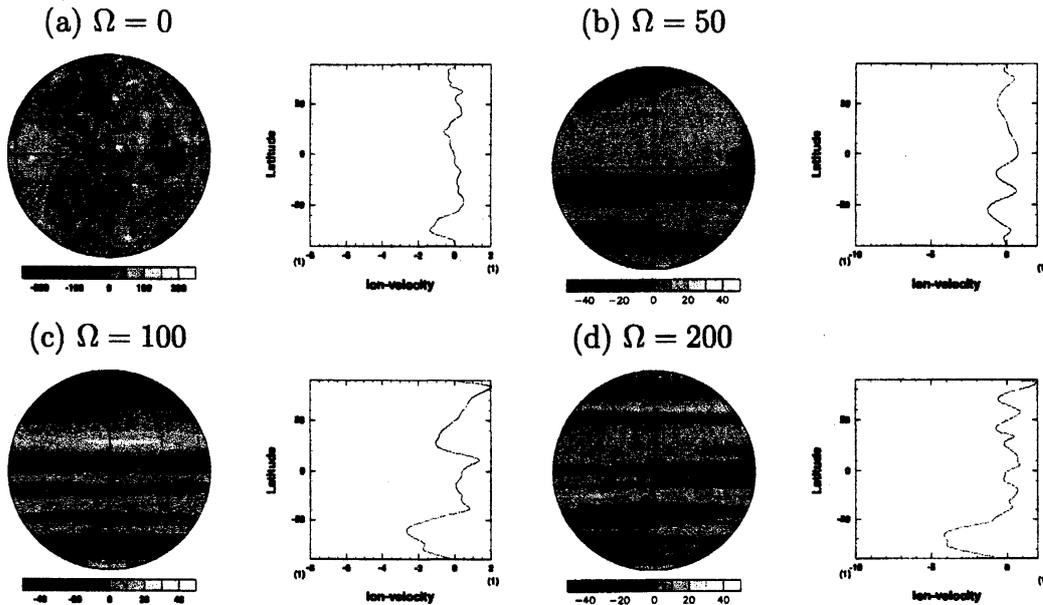


Figure 2: Examples of developed relative vorticity field for each value of  $\Omega$  at the final states. The left panels of show vorticity fields, using Orthographic projection from  $\lambda = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ . The right panels are distribution of mean zonal flows.

Fig.2, Fig.3 右は Fig.2, Fig.3 左の渦度場に対応する平均帯状流分布である。回転が大きくない場合には縞状構造が存在するものの、そのジェット幅や強さと向きがまちまちである。しかしながら回転が大きくなるとともに、極付近の強い西向き周極流が強くなり狭くなる。一方で、中低緯度の縞状帯状流は幅が狭くなるものの、その振幅は次第に小さくなっていく様子が明瞭に見てとれる。

## 4 アンサンブル解析

周極流の回転角速度依存性をはっきりさせるために、50 ケースのアンサンブル平均で得られた平均帯状流分布を Fig.4 に示す。

回転が小さい場合には縞状構造はあまり明瞭でなく、  $\Omega = 50$  では極で東向きの流れとなっている。回転が  $\Omega = 100$  より大きくなると、極での西向き周極流が次第に明瞭になる。平

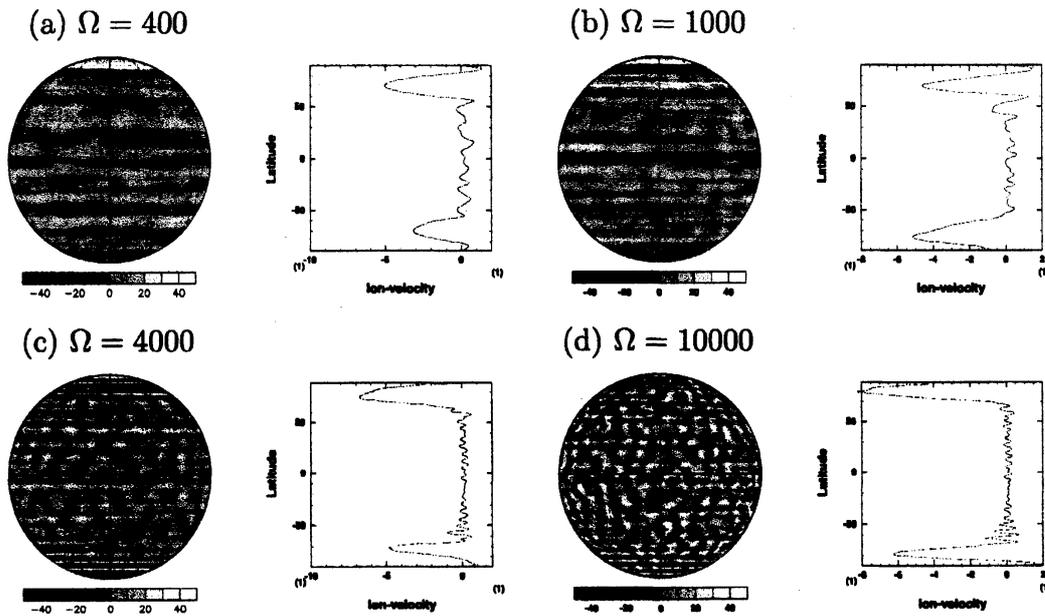


Figure 3: The same as Fig.2 but for the cases of large rotation rates.

均操作する前の場で見られた中低緯度の縞状構造は、初期値によってジェットの出現位置と向きとが変わるためにならされてしまっていて平均場では見ることができない。

極付近の西向き流は回転が大きくなるとともにその幅がせまくなり、速度が増していく。このことを定量的に示したのが Fig.5 である。流れの強さと幅の変化の様子は  $\Omega = 400$  を境にして変化しており、 $\Omega \geq 400$  では回転角速度に対してほぼ巾乗則に支配されているように見える。

Fig.6 は、各回転角速度での運動エネルギーの時間発展の様子を示している。全運動エネルギー  $E_{total} = |\nabla\psi|^2/2$  に対して、その帯状平均成分を  $E_{zonal} = |\nabla\bar{\psi}|^2/2$ 、擾乱成分を  $E_{eddy} = |\nabla(\psi - \bar{\psi})|^2/2$  と分けたものもあわせてプロットしている。ここで  $\bar{f} \equiv \int_0^{2\pi} f d\lambda/2\pi$  は緯度平均(帯状平均)を表している。どの場合も時間積分範囲内で全エネルギーが 1 割程度しか減少しておらず、エネルギーが保存的であることがわかる。初期には擾乱成分がエネルギーの大部分を占めていたものが、時間とともに帯状平均成分へと変換されていき、最終状態で各々の成分の時間変化が小さくなってエネルギー変換過程がほぼ完了している様子がわかる。最終状態での帯状平均成分の占める割合は回転とともに大きくなっており、特に  $\Omega \geq 10^3$  ではほとんどが帯状平均成分となっている。

これを示したものが Fig.7 である。中低緯度での帯状流の振幅が小さいのでこの帯状平均エネルギーは周極流からの寄与である。すなわち、初期に与えた高波数の渦のもつエネルギーは回転が大きくなるほど最終的には周極流にエネルギーが集中していく。

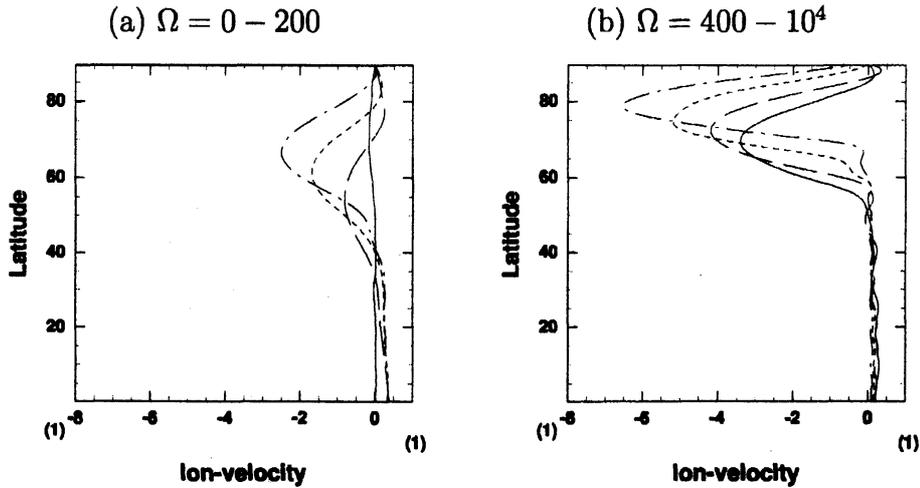


Figure 4: Zonal mean flow profiles obtained from ensemble average of 50 sets of experiment. (a) Solid, long-dashed, short-dashed, and dash-dotted lines describe for the cases of  $\Omega = 0, 50, 100, 200$ , respectively. (b) Solid, long-dashed, short-dashed, and dash-dotted lines describe for the cases of  $\Omega = 400, 1000, 4000, 10000$ , respectively.

## 5 スケーリング理論

数値計算で得られた周極流の幅と強さの回転が大きい場合の漸近的振舞いを説明するために、エネルギーの保存則と局所的なラインズスケールを考えることでスケーリング理論を構築する。

数値計算結果から初期に与えたエネルギーのほとんどは周極流に集中する傾向にあった。このことから半球のエネルギー保存は

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} U_0^2 2\pi \cos \varphi d\varphi \sim \int_{\pi/2-\theta_p}^{\pi/2} \frac{1}{2} U_p^2 2\pi \cos \varphi d\varphi, \quad (4)$$

となる。ここで  $U_0, U_p$  はそれぞれ初期に与えた渦にともなう典型的な速度スケールおよび周極流の典型的な速度スケール、 $\theta_p$  は周極流の幅 (余緯度) である。 $\theta_p$  が十分に小さいので

$$U_0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_p U_p. \quad (5)$$

さらに、周極流の緯度帯での局所的なラインズスケールが周極流の幅程度であると仮定すると、

$$\theta_p = \sqrt{\frac{U_p}{\beta(\theta_p)}} = \sqrt{\frac{U_p}{2\Omega \sin \theta_p}}, \quad \text{i.e. } \theta_p \sim \left(\frac{U_p}{2\Omega}\right)^{1/3} \quad (6)$$

(5) と (6) から  $U_p, \theta_p$  について解くことができ、

$$U_p \sim \Omega^{1/4}, \quad \theta_p \sim \Omega^{-1/4} \quad (7)$$

が得られる。ここで  $U_0 = 1$  を用い、わずらわしい係数は省略した。

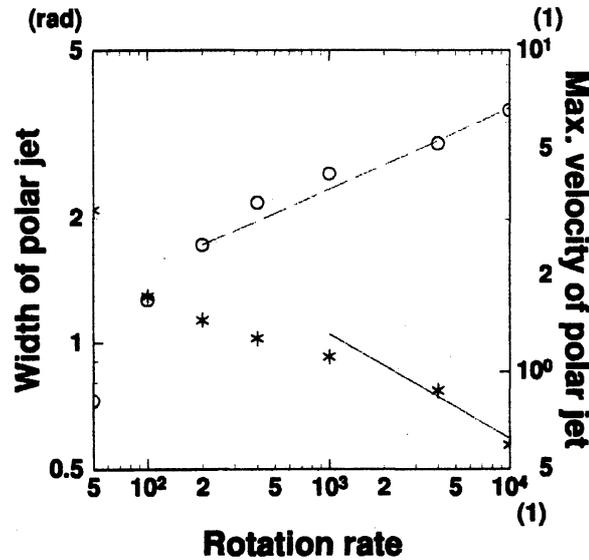


Figure 5: Dependences of width (asterisk) and strength (circle) of the polar jets on the rotation rates  $\Omega$ . The solid and broke lines in the figure show  $\Omega^{-1/4}$  and  $\Omega^{1/4}$  dependences, respectively.

この傾向を確かめたものが Fig.5 中のふたつの直線である。速度強度については  $\Omega \geq 400$  の範囲で回転角速度の  $1/4$  の巾乗則によくあっている。幅に関しては  $\Omega \geq 10^3$  の高回転の場合にのみ巾が  $-1/4$  に近く、それより低回転ではより緩やかな巾となっている。このことは  $\Omega \leq 10^3$  においてはエネルギーが周極流に十分に集中していないからであると考えられる。

式 (6) は、周極流領域で惑星渦度の緯度傾度  $\beta$  と周極流に伴う渦度傾度  $-\frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \mu^3}$  が同程度となる、と解釈することもできる。このことはジェット領域で絶対渦度が一様化されていることを示唆する。われわれの数値計算結果では、中低緯度領域と比較してジェット領域において帯状平均絶対渦度の緯度微分  $\beta - \frac{\partial^3 \bar{\psi}}{\partial \mu^3}$  が一様に 0 に近い値となっている傾向がみられる。しかしながら回転が大きくなるにつれてこの傾向は弱まっている。

## 6 まとめ

以前の研究と比較して、より回転角速度の大きい場合での球面上の 2 次元減衰性乱流の数値積分を 25 個の初期値に対して行なった。その結果、以前の研究と同様、極での西向き周極流と中低緯度での縞状構造を伴う解が得られた。回転が大きくなるとともに西向き周極流と中低緯度での縞状構造の幅が狭くなるという定性的性質も高速回転状態でもそのまま維持されている。回転角速度の範囲をオーダー 4 桁の広範囲で調べた結果、周極渦の幅

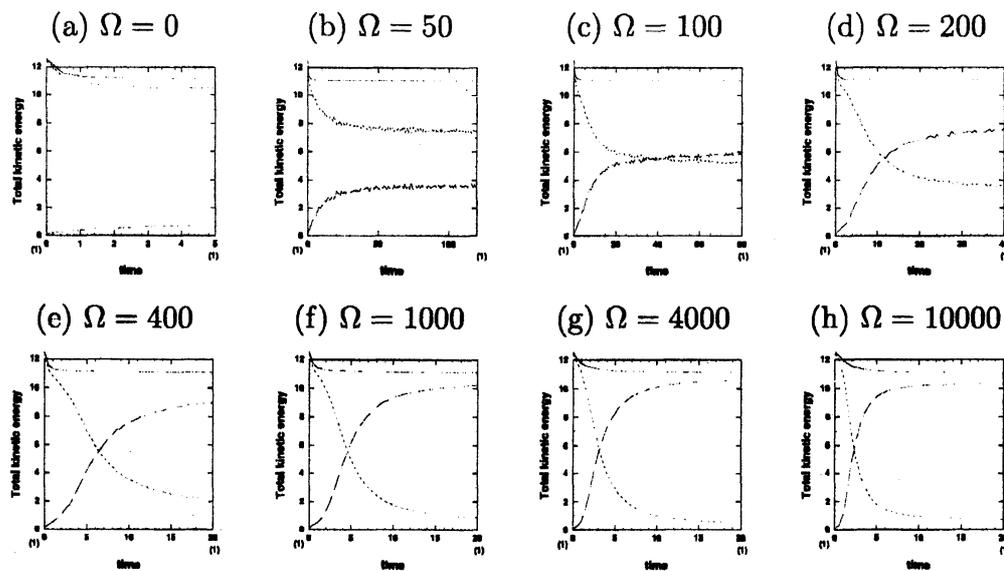


Figure 6: Time development of total (solid), mean zonal part (broken) and disturbance (dotted) part of kinetic energy for each value of  $\Omega$ .

および強さが回転角速度に対して巾乗則に支配されることを今回始めて見いだした。高回転状態の重要な特徴は、初期に与えた渦に伴う運動エネルギーが最終的には周極流へ集中してしまうことである。この性質と局所的ラインズスケールを周極流に適用することにより、周極渦の幅および強さが回転角速度の  $1/4$  乗および  $-1/4$  乗に比例することが理論的に示された。その結果は数値計算をよく説明できている。

## Acknowledgments

この研究は日本学術振興会の科学研究補助金の援助を受けた。数値計算には日本国立天文台データ解析計算センターの VPP5000 および京都大学学術情報メディアセンターの HPC2500 を用いた。この研究に用いた数値モデルの主要部はスペクトル変換ライブラリ “ISPACK” [Ishioka (2005)] と Fortran90 ラッパーライブラリ “SPMODEL” [Takchiro *et al.*(2005)] によって構築された。モデルのデータ入出力ルーチンとして “gt4f90io” [Morikawa *et al.*(2005)] と “NetCDF” (<http://www.unidata.ucar.edu/packages/netcdf/>) ライブラリを用いた。データ解析と可視化には電脳 ruby プロジェクト (<http://ruby.gfd-dennou.org/>) のソフトウェアを用いた。

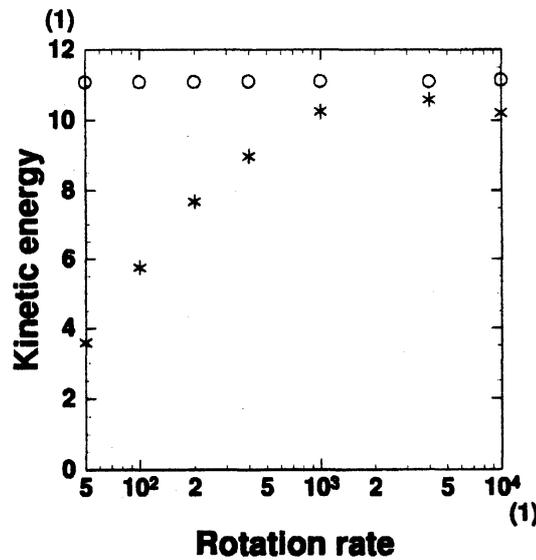


Figure 7: Total (circle) and zonal mean part (asterisk) of kinetic energy at the final state for each value of the rotation rate  $\Omega$ .

## 参考文献

Cho, J. Y.-K. and Polvani, L. M. 1996. The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere, *Phys. Fluids*, **8**, 1531–1552.

Hayashi, Y.-Y., Ishioka, K., Yamada M., and Yoden, S. 2000. Emergence of circumpolar vortex in 2-D turbulence on a rotating sphere. *in IUTAM Symposium on Developments in Geophysical Turbulence (Proceedings of the IUTAM Symposium held at the National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, 16-19 June 1998) (Fluid Mechanics and Its Applications Vol.58)*, Ed R.M. Kerr and Y. Kimura, Kluwer Academic Publishers, 179–192.

Ishioka K., Yamada M., Hayashi Y.-Y. and Yoden S. 1999. Pattern Formation from Two-dimensional Decaying Turbulence on a Rotating Sphere, *Nagare Multimedia 99*, <http://www.nagare.or.jp/mm/99/ishioka/>.

Ishioka, K., Yamada, M., Hayashi, Y.-Y., Yoden, S. 2000. Technical approach for the design of a high-resolution spectral model on a sphere: application to decaying turbulence. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **7**, 105–110.

Ishioka, K., 2005: ispack-0.71, <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>, GFD Dennou Club.

Li, S. and Montgomery, D. 1996. Decaying two-dimensional turbulence with rigid walls, *Physics Letters A* **218**, 281–291.

Li, S. and Montgomery, D. 1997. Two-Dimensional Turbulence with Rigid Circular Walls, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **9**, 167–181.

Morikawa, Y., Odaka, M., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., Gtool4 Development Goup, 2005: gt4f90io Fortran90 netCDF I/O library with gtool4 conventions, <http://www.gfd-dennou.org/arch/gtool4/>, GFD Dennou Club.

Nozawa, T. and Yoden, S., 1997. Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere, *Phys. Fluids*. **9**, 3834–3842.

Rhines, P. B. 1975 Waves and turbulence on a beta-plane, *J. Fluid Mech.* **69**,417–443.

Takehiro, S., Ishioka, K., Morikawa, Y., Odaka, M., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., SPMODEL Development Group, 2005: Hierarchical Spectral Models for GFD (SP-MODEL), <http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, GFD Dennou Club.

Taniguchi, Y., Yamada, M. and Ishioka, K. 2002. Flow pattern formation in a two-dimensional flow on the rotating hemisphere bounded by the meridional line, *Proceedings of the 51st Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics*, edited by Koji Uetani **51**, 217–223.

Williams, G. P. 1978. Planetary circulations: 1.Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence, *J. Atmos. Sci.* **35**, 1399–1426.

Yoden, S. and Yamada M. 1993. A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere, *J. Atmos. Sci.* **50**, 631–643.

Yoden, S., Ishioka, K., Hayashi, Y.-Y., and Yamada M. 1999. A further experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere, *IL NUOVO CIMENTO*, **22 C**, 803–812.

Yoden, S., Ishioka, K., Yamada, M., and Hayashi, Y.-Y. 2002. Pattern formation in two-dimensional turbulence on a rotating sphere, in *“Statistical Theories and Computational Approaches to Turbulence”*, Edited by Y. Kaneda and T. Gotoh, Springer-Verlag, Tokyo, 317-326.