数理解析研究所講究録
1484巻 2006年 134-144

バナッハ空間における積分作用素の同程度一様総和法の収束精度について

琉球大学 理学部　西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)
Faculty of Science, University of the Ryukyus

1. 序

$(E, \|\cdot\|)$ をバナッハ空間, (X, d) を距離空間とする. $B(X, E)$ は X から E への有界な写像全体の成すバナッハ空間を表す. また, $C(X, E)$ は X から E への連続写像全体の成す線形空間を表す. さらに, $BC(X, E) := B(X, E) \cap C(X, E)$ とおく. $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく. $\mathcal{A} = \{(a_{n,m}^{(\lambda)})_{n,m\in\mathbb{N}_0} : \lambda \in \Lambda\}$ をスカラーからなる無限行列の族とする. ここで, Λは添字集合である. $X_0 \subseteq X$とする. $BC(X, E)$ から $B(X_0, E)$ への写像の列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$が $BC(X, E)$ 上の同程度一様 $\mathcal{A}$-総和法であるとは, すべての $F \in BC(X, E)$ に対して

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \|\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} K_m(F)(x) - F(x)\| = 0 \qquad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda, x \in X_0$$

が成立することである. 但し, (1) における各級数は収束するとする.

Yを可分な位相空間とし, μを Y上の Borel 測度とする. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$は Yから Xへの連続写像の列, $\{\chi_n(x;\cdot) : n \in \mathbb{N}_0, x \in X\}$ は $L^1(Y, \mu)$ に属する関数の族で

$$(2) \qquad b_{n,\lambda}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \int_Y |a_{n,m}^{(\lambda)} \chi_m(x; y)| \, d\mu(y) < \infty \qquad (n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda, x \in X)$$

を満たすとする. このとき

$$(3) \qquad K_n(F)(x) = \int_Y \chi_n(x; y) F(\xi_n(y)) \, d\mu(y) \qquad (F \in BC(X, E))$$

と定義する. (3) の右辺の積分は Bochner 積分として常に存在する.

本講演の目的は, 各積分作用素 K_nが (3) で与えられる場合に (1) の収束精度について考察することである. さらに, その結果を各種の合成積作用素の同程度一様総和法による近似へ応用する. 詳細な取り扱いについては, [7] (cf. [5], [6]) を参照.

2. $\mathcal{A}$-総和法

$\mathcal{A}$ が正則であるとは, それが次の条件 (A-1), (A-2) 及び (A-3) を満たすことである:

(A-1) 各 $m \in \mathbb{N}_0$に対して, $\lim_{n\to\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} = 0$ uniformly in $\lambda \in \Lambda$.

(A-2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} = 1$ uniformly in $\lambda \in \Lambda$.

(A-3) 各 $n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda$ に対して, $a_n^{(\lambda)} := \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}^{(\lambda)}| < \infty$ で, 且つある $n_0 \in \mathbb{N}_0$が存在して $\sup\{a_n^{(\lambda)} : n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda\} < \infty$.

また, $\mathcal{A}$ が stochastic であるとは

$$a_{n,m}^{(\lambda)} \geq 0 \quad (\forall\, n, m \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda), \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} = 1 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda)$$

が成り立つことである.

Eの要素列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$が fに $\mathcal{A}$–総和可能であるとは

$$\lim_{n\to\infty} \| \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} f_m - f \| = 0 \quad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda \tag{4}$$

が成り立つことである. 但し, (4) における各級数は収束するとする.

$\mathcal{A}$ の正則性と $\mathcal{A}$-総和法の間には次の関係が成立する ([3]):

$\mathcal{A}$ は正則である. $\iff$ $\forall\{f_n\}, f_n \to f$ ならば, $\{f_n\}$ は fに $\mathcal{A}$-総和可能である.

以下に, 重要な各種の $\mathcal{A}$-総和法の例を挙げる:

(1°) 行列 $A = (a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}_0}$に対して, $a_{n,m}^{(\lambda)} = a_{nm}$ $(\forall\, \lambda \in \Lambda, n, m \in \mathbb{N}_0)$ とする. このとき, $\mathcal{A}$-総和法は行列 A による通常の総和法である.

(2°) $\Lambda = \mathbb{N}_0$のとき Petersen [8] (cf. [1]) の総和法である. 特に,

$$a_{n,m}^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{if } \lambda \leq m \leq \lambda + n, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

のとき, Lorentz [2] の almost convergent method (F-summability) である.

(3°) $Q = \{q^{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\}$, $q^{(\lambda)} = \{q_n^{(\lambda)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $q_n^{(\lambda)} \geq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \Lambda)$,

$$Q_n^{(\lambda)} := \sum_{i=0}^{n} q_i^{(\lambda)} > 0, \qquad a_{n,m}^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{q_{n-m}^{(\lambda)}}{Q_n^{(\lambda)}}, & \text{if } \quad m \leq n, \\ 0, & \text{if } \ m > n \end{cases}$$

とする. このとき, $\mathcal{A}$-総和法は (N, Q)-総和法と呼ばれる. 特に, $q^{(\lambda)} = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $q_n \geq 0$, $q_0 > 0$ のとき, (N, Q)-総和法はネールンド総和法である. 興味ある特別な場合として, 次のものがある: $\Lambda \subseteq [0, \infty)$, $\beta > 0$, $q_n^{(\lambda)} = C_n^{(\lambda+\beta-1)}$, 但し

$$C_0^{(\nu)} = 1, C_n^{(\nu)} = \binom{n+\nu}{n} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}{n!} \qquad (\nu > -1, n \in \mathbb{N}).$$

特に, $\Lambda = \{0\}$ のとき, (N, Q)-総和法はβ次のチェザロ総和法である.

(4°) *Cesàro* 型 :

$$\Lambda \subseteq (0,\infty), \beta > -1, \qquad a^{(\lambda)}_{n,m} = \begin{cases} C^{(\lambda-1)}_{n-m} C^{(\beta)}_{m} / C^{(\beta+\lambda)}_{n}, & \text{if } m \leq n, \\ 0, & \text{if } m > n. \end{cases}$$

(5°) *Euler-Knopp-Bernstein* 型 :

$$\Lambda \subseteq [0,1], \qquad a^{(\lambda)}_{n,m} = \begin{cases} \binom{n}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{n-m}, & \text{if } m \leq n, \\ 0, & \text{if } m > n. \end{cases}$$

(6°) *Meyer-König-Vermes-Zeller* 型 :

$$\Lambda \subseteq [0,1), \qquad a^{(\lambda)}_{n,m} = \binom{n+m}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{n+1}.$$

(7°) *Borel-Szász* 型 :

$$\Lambda \subseteq [0,\infty), \qquad a^{(\lambda)}_{n,m} = \exp(-n\lambda) \frac{(n\lambda)^m}{m!}.$$

(8°) *Baskakov* 型 :

$$\Lambda \subseteq [0,\infty), \qquad a^{(\lambda)}_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} \lambda^m (1+\lambda)^{-n-m}.$$

上記の例 (2°)-(8°) で与えられたすべての $\mathcal{A}$ は stochastic である. さらに, 上記の例 (4°)-(8°) において, 任意の有限な閉区間Λに対して $\mathcal{A}$ は正則である.

3. 収束精度

$F \in B(X,E), \delta \geq 0$ に対して

$$\omega(F,\delta) = \sup\{\|F(x) - F(y)\| : x, y \in X, d(x,y) \leq \delta\}$$

と定義し, これを Fの連続率という. $\omega(F,\cdot)$ は $[0,\infty)$ 上で単調増加な有界関数であり,

$$F : X\text{上で一様連続} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\delta\to+0} \omega(F,\delta) = 0.$$

ここでは, 次の条件を仮定する: ある定数 $C \geq 1, K > 0$ が存在して

$$(5) \qquad \omega(F,\xi\delta) \leq (C + K\xi)\omega(F,\delta) \qquad (\forall\, F \in B(X,E),\ \forall\, \xi, \delta \geq 0)$$

が成立する.

d が凸であるとは

$$d(x,y) = \alpha + \beta,\ \alpha, \beta > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, z \in X : d(x,z) = \alpha, d(z,y) = \beta$$

が成り立つことである. この条件の下では, (5) が $C = K = 1$ として満たされる. また, Xが線形距離空間 (V,d) の凸部分集合で, d は移動不変, i.e., $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ $(\forall\, x, y, z \in V)$, $d(\cdot,0)$ は星型, i.e., $d(\alpha x, 0) \leq \alpha d(x,0)$ $(\forall\, x \in V, \forall\, \alpha \in\in [0,1])$ ならば, (5) が $C = K = 1$ として満たされる. 特に, Xがノルム空間 Vの凸部分集合ならば, $C = K = 1$ として (5) が成り立つ (cf. [4]).

$b_{n,\lambda}(x), K_n(F)(x)$ はそれぞれ (2), (3) の通りとする．各 $n \in \mathbb{N}_0$に対して

$E_n(F) = \sup\{\| \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} K_m(F)(x) - F(x)\| : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\} \qquad (F \in BC(X, E))$

とおく．このとき，

$\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$: 同程度一様 $\mathcal{A}$-総和法 $\iff \forall\, F \in BC(X, E),\ \lim_{n\to\infty} E_n(F) = 0.$

以下，$p \geq 1$ とし，$\{\chi_n(x;\cdot)d^p(x;\xi_n(\cdot)) : n \in \mathbb{N}_0, x \in X_0\} \subseteq L^1(Y, \mu)$ とする．また，$\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$を正の実数列とする．

定理 1. すべての $F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq \|F\|_{X_0}\tau_n + \tau_n(p)\omega(F, \epsilon_n\nu_n(p))$$

が成立する．ここで，$\|F\|_{X_0} := \sup\{\|F(x)\| : x \in X_0\}$,

$$\tau_n := \sup\Big\{\Big|\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} \int_Y \chi_m(x; y)\, d\mu(y) - 1\Big| : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\Big\},$$

$$\tau_n(p) := \sup\{Cb_{n,\lambda}(x) + K \min\{\epsilon_n^{-p},\ \epsilon_n^{-1}b_{n,\lambda}(x)^{1-1/p}\} : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\},$$

$$\nu_n(p) := \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}^{(\lambda)}| \|\chi_m(x;\cdot)d^p(x, \xi_m(\cdot))\|_1 : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\Big\}\Big)^{1/p}.$$

E_0を Eの部分集合とする．$\mathfrak{T} = \{T(x) : x \in X\}$ は E_0から Eへの写像の族で，各 $f \in E_0$ に対して，写像 $x \mapsto T(x)(f)$ は X上で強連続で有界とする．このとき，各 $n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$L_n(x)(f) = \int_Y \chi_n(x; y)T(\xi_n(y))(f)\, d\mu(y) \qquad (f \in E_0, x \in X)$$

と定義する．この積分作用素の族 $\{L_n(x) : n \in \mathbb{N}_0, x \in X\}$ が E_0上の同程度一様 $\mathfrak{T}$-$\mathcal{A}$-総和法であるとは，すべての $f \in E_0$に対して

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \Big\|\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} L_m(x)(f) - T(x)(f)\Big\| = 0 \qquad \text{uniformly in } \lambda \in \Lambda, x \in X_0$$

が成立することである．各 $n \in \mathbb{N}_0$に対して

$e_n(f) = \sup\{\| \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} L_m(x)(f) - T(x)(f)\| : \lambda \in \Lambda, x \in X_0\} \qquad (f \in E_0)$

とおくと，(6) は $\lim_{n\to\infty} e_n(f) = 0$ と同値である．

$\omega_{\mathfrak{T}}(f, \delta) := \sup\{\|T(x)(f) - T(y)(f)\| : x, y \in X, d(x, y) \leq \delta\} \qquad (f \in E_0, \delta \geq 0)$

は $\mathfrak{T}$ に関する fの連続率と呼ばれる．

系 1. すべての $f \in E_0, n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$e_n(f) \leq \|T(\cdot)(f)\|_{X_0}\tau_n + \tau_n(p)\omega_{\mathfrak{T}}(f, \epsilon_n\nu_n(p))$$

が成立する．

4. 合成積作用素の同程度一様 $\mathcal{A}$-総和法の収束精度

$1 \le s \le \infty$ とし, $(\mathbb{R}^r, d)$ において距離関数 d は

$$d(x,y) = d_s(x,y) := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^r |x_i - y_i|^s\right)^{1/s} & (1 \le s < \infty) \\ \max\{|x_i - y_i| : 1 \le i \le r\} & (s = \infty), \end{cases}$$

$$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_r),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r)$$

で与えるものとする. このとき, $p_i(x) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ と定義すれば

$$d_s^q(x,y) \le c(q,r,s) \sum_{i=1}^r |p_i(x) - p_i(y)|^q \qquad (x, y \in \mathbb{R}^r,\ q > 0)$$

が成立する. 但し

$$c(q,r,s) := \begin{cases} r^{q/s} & (1 \le s < \infty,\ s \ne q) \\ 1 & (1 \le s < \infty,\ s = q) \\ 1 & (s = \infty). \end{cases}$$

ここでは, $\mathcal{A}$ は stochastic, $X = Y$ は $\mathbb{R}^r$ の凸部分集合で, 各 ξ_n は恒等写像とする. 従って, (5) が $C = K = 1$ として成り立つ.

$c > 0$ とし, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ は $[-c, c]$ 上の非負の偶関数列で

$$\int_{-c}^{c} g_n(t)\, dt = 1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0)$$

を満たすとする. また

$$X = \prod_{i=1}^r [a_i, b_i], \quad 0 < b_i - a_i \le c,\ X_0 = \prod_{i=1}^r [a_i + \delta_i, b_i - \delta_i],\ 0 < \delta_i < \frac{1}{2}(b_i - a_i),$$

$$\chi_n(x; y) = \prod_{i=1}^r (g_n \circ p_i)(x - y) \quad (x, y \in X,\ n \in \mathbb{N}_0)$$

とする. このとき, $p = 2$ の場合を考えて, 定理 1 及び系 1 から次の定理が得られる:

定理 2. (a) すべての $F \in C(X, E), n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$E_n(F) \le \|F\|_{X_0} \zeta_n^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{\delta_i^2} + \ (1 + \min\{\sqrt{rc(r,s)}\epsilon_n^{-1},\ rc(r,s)\epsilon_n^{-2}\})\omega(F, \epsilon_n \zeta_n)$$

が成立する. 但し

$$c(r,s) := \begin{cases} r^{2/s} & (1 \le s < \infty) \\ 1 & (s = 2, \infty), \end{cases}$$

$$\zeta_n := \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} \int_{-c}^{c} t^2 g_m(t)\,dt : \lambda \in \Lambda\Big\}\Big)^{1/2}.$$

(b) すべての $f \in E_0, n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$e_n(f) \le \|T(\cdot)(f)\|_{X_0} \zeta_n^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\delta_i^2} + \ (1 + \min\{\sqrt{rc(r,s)}\epsilon_n^{-1},\ rc(r,s)\epsilon_n^{-2}\})\omega_{\mathfrak{T}}(f, \epsilon_n \zeta_n)$$

が成立する.

φ は非負の連続な偶関数で, $[0,c]$ 上で単調減少し

$$\varphi(0) = 1, \quad 0 \le \varphi(t) < 1 \qquad (0 < t \le c)$$

を満たすとする. また,

$$g_n(t) := \rho_n \varphi^n(t) \qquad (|t| \le c,\ n \in \mathbb{N}_0), \quad \rho_n := \Big(\int_{-c}^{c} \varphi^n(t)\,dt\Big)^{-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

とする.

系 2. ある定数 $p, q > 0$ が存在して

$$\lim_{t \to +0} \frac{1 - \varphi(t)}{t^p} = q \tag{7}$$

が成り立つと仮定する.

(a) すべての $F \in C(X, E), n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$E_n(F) \le C_\varphi \|F\|_{X_0} \eta_n^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\delta_i^2} + (1 + \min\{\sqrt{rc(r,s)C_\varphi},\ rc(r,s)C_\varphi\})\omega(F, \eta_n)$$

が成立する. 但し

$$C_\varphi := \sup\Big\{(n+1)^{2/p} \int_{-c}^{c} t^2 g_n(t)\,dt : n \in \mathbb{N}_0\Big\},$$

$$\eta_n := \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(\lambda)}}{(m+1)^{2/p}} : \lambda \in \Lambda\Big\}\Big)^{1/2}.$$

(b) すべての $f \in E_0, n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$e_n(f) \le C_\varphi \|T(\cdot)(f)\|_{X_0} \eta_n^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\delta_i^2} + (1 + \min\{\sqrt{rc(r,s)C_\varphi},\ rc(r,s)C_\varphi\})\omega_{\mathfrak{T}}(f, \eta_n)$$

が成立する.

(7) を満たす関数 φ の例には次のものがある:

(1°) *Weierstrass*: $\varphi(t) = e^{-t^2}$; $c > 0,\ p = 2,\ q = 1$.

(2°) *Picard*: $\varphi(t) = e^{-|t|}$; $c > 0,\ p = 1,\ q = 1$.

(3°) *Bui-Fedorov-Cervakov*: $\varphi(t) = e^{-|t|^{1/\nu}}$; $c > 0, \nu > 0,\ p = 1/\nu,\ q = 1$.

(4°) *Landau*: $\varphi(t) = 1 - t^2$; $c = 1,\ p = 2,\ q = 1$.

(5°) *Mamedov*: $\varphi(t) = 1 - t^{2m}$; $c = 1,\ m \in \mathbb{N},\ p = 2m,\ q = 1$.

(6°) $\nu > 0,\ \varphi(t) = 1 - |t|^\nu$; $c = 1,\ p = \nu,\ q = 1$.

(7°) *de la Vallée-Poussin*: $\varphi(t) = \cos^2 \frac{1}{2}t$; $c = \pi,\ p = 2,\ q = 1/4$.

(8°) $\nu > 0,\ \varphi(t) = \left(\cos \frac{1}{2}t\right)^\nu$; $c = \pi,\ p = 2,\ q = \nu/8$.

次に, $X = Y = \mathbb{R}^r$とし, $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$は$\mathbb{R}$上の非負のLebesgue可積分関数列で

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(t)dt = 1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}_0)$$

を満たし,

$$\chi_n(x;y) = \prod_{i=1}^{r}(h_n \circ p_i)(x - y) \qquad (x, y \in X,\ n \in \mathbb{N}_0)$$

とする.

定理 3. $q \geq 1$とする. (a) すべての$F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq (1 + \min\{(rc(q,r,s))^{1/q}\epsilon_n^{-1},\ rc(q,r,s)\epsilon_n^{-q}\})\omega(F, \epsilon_n\theta_n(q))$$

が成立する. 但し

$$\theta_n(q) := \left(\sup\left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)} \int_{\mathbb{R}} |t|^q h_m(t)\, dt : \lambda \in \Lambda\right\}\right)^{1/q} < \infty.$$

(b) すべての$f \in E_0, n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$e_n(f) \leq (1 + \min\{(r(c(q,r,s))^{1/q}\epsilon_n^{-1},\ rc(q,r,s)\epsilon_n^{-q}\})\omega_{\mathfrak{T}}(f, \epsilon_n\theta_n(q))$$

が成立する.

$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$は$\mathbb{R}$上の周期$2\pi$のLebesgue可積分な非負偶関数列でFourier級数展開

$$k_n(t) \quad \sim \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{k_n}(j)e^{ijt}, \quad \hat{k_n}(j) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)e^{-ijt}\, dt, \quad \hat{k_n}(0) = 1$$

を持ち,

$$h_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}k_n(t) & (|t| \leq \pi) \\ 0 & (|t| > \pi). \end{cases}$$

とする.

系 3. (a) すべての$F \in BC(X, E), n \in \mathbb{N}_0$に対して

$$E_n(F) \leq \left(1 + \min\left\{\pi\sqrt{\frac{rc(r,s)}{2}}\epsilon_n^{-1},\ \frac{\pi^2 rc(r,s)}{2}\epsilon_n^{-2}\right\}\right)\omega(F, \epsilon_n\eta_n)$$

が成立する. 但し

$$\eta_n := \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)}(1-\hat{k_m}(1)) : \lambda \in \Lambda\Big\}\Big)^{1/2}.$$

(b) すべての $f \in E_0, n \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$e_n(f) \le \Big(1+\min\Big\{\pi\sqrt{\frac{rc(r,s)}{2}}\epsilon_n^{-1}, \frac{\pi^2 rc(r,s)}{2}\epsilon_n^{-2}\Big\}\Big)\omega_{\mathfrak{T}}(f, \epsilon_n\eta_n)$$

が成立する.

$(\lambda_n(j))$ $(n, j = 1, 2, \dots)$ を下三角行列とし,

$$k_0(t) = 1, \quad k_n(t) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_n(j)\cos jt \qquad (n \in \mathbb{N},\, t \in \mathbb{R})$$

とする. このとき, Abel 変換を二度行うことによって

$$k_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)F_j(t)\Delta^2\lambda_n(j) + (n+1)\lambda_n(n)F_n(t), \quad \lambda_n(0) = 1$$

となる. 但し

$$F_m(t) = \frac{1}{m+1}\Big\{\frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\Big\}^2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{m}\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\cos kt$$

は m 次の Fejér 核で,

$$\Delta^2\lambda_n(j) = \lambda_n(j) - 2\lambda_n(j+1) + \lambda_n(j+2)$$

である. 従って, $\lambda_n(n) \ge 0$ で $\{\lambda_n(j)\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ が凸, i.e., $\Delta^2\lambda_n(j) \ge 0$ $(\forall\, j \in \mathbb{N}_0)$ ならば, $k_n(t)$ はたかだか n 次の非負の偶三角多項式になり, 系 3 が

$$\eta_n = \Big(\sup\Big\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(\lambda)}(1-\lambda_m(1)) : \lambda \in \Lambda\Big\}\Big)^{1/2}$$

として成り立つ.

以下に挙げる $\lambda_n(j)$ は重要な総和核をつくる:

(1°) *Fejér* 核:

$$\lambda_n(j) = \begin{cases} 1 - \frac{j}{n+1} & (1 \le j \le n) \\ 0 & (j > n). \end{cases}$$

(2°) *de la Vallée-Poussin* 核:

$$\lambda_n(j) = \begin{cases} \frac{(n!)^2}{(n-j)!(n+j)!} & (1 \le j \le n) \\ 0 & (j > n). \end{cases}$$

(3°) *Fejér-Korovkin* 核:

$$\lambda_n(j) = \begin{cases} A_n \sum_{m=0}^{n-j} a_m a_{j+m} & (1 \leq j \leq n) \\ 0 & (j > n), \end{cases}$$

但し

$$a_m = \sin\Big(\frac{m+1}{n+2}\Big)\pi \qquad (m = 0, 1, \dots, n), \quad A_n = \Big(\sum_{m=0}^{n} a_m^2\Big)^{-1}.$$

(4°) *Nörlund* 核:

$$\lambda_n(j) = \begin{cases} \frac{Q_{n-j}}{Q_n} & (1 \leq j \leq n) \\ 0 & (j > n), \end{cases}$$

但し

$$0 < q_0 \leq q_n \leq q_{n+1}, \quad Q_n = \sum_{m=0}^{n} q_m \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(5°) *Cesàro* 核:

$$\lambda_n(j) = \begin{cases} \frac{C_{n-j}^{(\beta)}}{C_n^{(\beta)}} & (1 \leq j \leq n) \\ 0 & (j > n). \end{cases} \qquad (\beta \geq 1)$$

また, 他の重要な総和核には次のものがある:

(6°) *Jackson* 核: $p \in \mathbb{N}$,

$$k_n(t) = k_{n,p}(t) = c_{n,p}\Big\{\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\Big\}^{2p},$$

但し, 正の定数 $c_{n,p}$は

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_{n,p}(t)\,dt = 1$$

となるように取る.

(7°) *Abel-Poisson* 核: $0 \leq \rho_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$,

$$k_n(t) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \rho_n^m \cos mt = \frac{1-\rho_n^2}{(1-\rho_n)^2 + 4\rho_n \sin^2(t/2)}.$$

(8°) *Gauss-Weierstrass* 核: $\lambda_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$,

$$k_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{(t-2\pi m)^2}{4\lambda_n}\Big\} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_n m^2} \cos mt.$$

最後に, 定理 3 が適用される非周期の関数列 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ の例を, 以下のように確率密度関数を利用して幾つか挙げる: $q>0$ に対して,

$$\mu_n(q)=\mu(h_n;q):=\int_{\mathbb{R}}|t|^q h_n(t)\,dt<\infty$$

は h_n の q次の絶対モーメントと呼ばれる. $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ を共に正の実数列とする.

(9°) *Gauss type distribution*:

$$h_n(t):=\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha_n}}\exp\Big(-\frac{t^2}{\alpha_n}\Big)\qquad (t\in\mathbb{R});\quad \mu_n(q)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{q+1}{2}\Big)\alpha_n^{q/2},$$

ここで

$$\Gamma(x):=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\qquad (x>0)$$

はガンマ関数である.

(10°) *Laplace type distribution*:

$$h_n(t):=\frac{1}{2\alpha_n}\exp\Big(-\frac{|t|}{\alpha_n}\Big)\qquad (t\in\mathbb{R});\quad \mu_n(q)=q\Gamma(q)\alpha_n^q.$$

(11°) *Student (t) type distribution*:

$$h_n(t):=\sqrt{\frac{\alpha_n}{\pi}}\frac{\Gamma(\beta_n)}{\Gamma\big(\beta_n-\frac{1}{2}\big)}(1+\alpha_n t^2)^{-\beta_n}\qquad (t\in\mathbb{R});$$

$$\mu_n(q)=\frac{\Gamma\big(\frac{q+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\Big)^q\frac{\Gamma\big(\beta_n-\frac{q+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\beta_n-\frac{1}{2}\big)}.$$

(12°) *Gamma type distribution*:

$$h_n(t):=\begin{cases}\frac{\beta_n^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n)}t^{\alpha_n-1}e^{-\beta_n t} & (t>0)\\ 0 & (t\le 0);\end{cases}\qquad \mu_n(q)=\frac{1}{\beta_n^q}\frac{\Gamma(q+\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)}.$$

(13°) *Beta type distribution*:

$$h_n(t):=\begin{cases}\frac{1}{B(\alpha_n,\beta_n)}t^{\alpha_n-1}(1-t)^{\beta_n-1} & (0<t<1)\\ 0 & (t\le 0 \text{ or } 1\le t);\end{cases}$$

$$\mu_n(q)=\frac{B(\alpha_n+q,\beta_n)}{B(\alpha_n,\beta_n)}=\frac{\Gamma(\alpha_n+\beta_n)}{\Gamma(\alpha_n)}\frac{\Gamma(\alpha_n+q)}{\Gamma(\alpha_n+\beta_n+q)},$$

ここで

$$B(x,y):=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\qquad (x,y>0)$$

はベータ関数である.

(14°) *Landau type distribution*:

$$h_n(t) := \begin{cases} \frac{\alpha_n}{2B(1/\alpha_n, \beta_n)}(1 - |t|^{\alpha_n})^{\beta_n - 1} & (|t| \le 1) \\ 0 & (|t| > 1); \end{cases}$$

$$\mu_n(q) = \frac{\Gamma(\frac{q+1}{\alpha_n})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha_n})} \frac{\Gamma(\beta_n + \frac{1}{\alpha_n})}{\Gamma(\beta_n + \frac{q+1}{\alpha_n})}.$$

(15°) *Weibull type distribution*:

$$h_n(t) := \begin{cases} \frac{\beta_n}{\alpha_n} t^{\beta_n - 1} \exp\left(-\frac{t^{\beta_n}}{\alpha_n}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0); \end{cases} \qquad \mu_n(q) = \frac{q\alpha_n^{q/\beta_n}}{\beta_n} \Gamma\left(\frac{q}{\beta_n}\right).$$

参考文献

[1] H. T. Bell, *Order summability and almost convergence*, Proc. Amer. Math. Soc., **38** (1973), 548-552.

[2] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math., **80** (1948), 167-190.

[3] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.

[4] T. Nishishiraho, *Convergence of positive linear approximation processes*, Tôhoku Math. J., **35** (1983), 441-458.

[5] T. Nishishiraho, *The convergence of equi-uniform approximation processes of integral operators in Banach spaces*, Ryukyu Math. J., **16** (2003), 79-111.

[6] T. NIshishiraho, *The degree of convergence of equi-uniform approximation processes of integral operators in Banach spaces*, Proc. the 3rd Internat. Conf. on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Tokyo, 2003), 401-412, Yokohama Publishers, 2004.

[7] T. Nishishiraho, *Quantitative equi-uniform approximation processes of integral operators in Banach spaces*, to appear in Taiwanese J. M..

[8] G. M. Petersen, *Almost convergence and uniformly distributed sequences*, Quart. J. Math., **7** (1956), 188-191.