

Local signature and Horikawa index of pencils of algebraic curves

Tadashi Ashikaga (Tohoku-Gakuin University)

Introduction

In this report, we divide our argument into two Chapters.

In Chapter 1, we discuss the Horikawa index of pencils of curves. This invariant is defined to be the local contribution of the fiber germ from the lower bound of the slope inequality of fibered surfaces. One of the main topic is the relation between this invariant and some properties of the Picard functor of the Deligne-Mumford compactification \bar{M}_g . For certain families of stable curves, we have a method to describe the Horikawa index in terms of the intersection number of some divisor on \bar{M}_g and the image of the moduli map.

First, in order to understand Horikawa's original invariant [Ho1] for genus 2 fibration from this viewpoint, we apply Mumford's formula [Mu2] §8.

Next we consider maximal-gonal fibrations of odd genus. We apply Harris-Mumford's formula [HaMu], which expresses the divisor of "non-maximal gonal locus" in terms of the explicit linear combination of the Hodge bundle and the boundary divisor on \bar{M}_g . We also consider generic genus 4 fibrations, and apply Eisenbud-Harris' formula [EH] with respect to the divisor of "violating the Petri condition".

This method works directly for stable families, but we note that many pencils which appear in the study of surfaces of general type are unstable. For an unstable family, we describe explicitly the correction term of Horikawa index arising from the local stable reduction of the fiber germ by using the local monodromy data. This part is induced from the result of Chapter II by using the relation of Horikawa index and local signature.

In Chapter II, we discuss the local signature of pencils of curves. This invariant is defined to be the local contribution of the fiber germs to the global signature of the total space. For a stable family, the interesting discussions are already appear in K. Yoshikawa [Y1] and I. Smith [S] via the moduli theory. Therefore we concentrate our attention to an unstable family, and describe explicitly the correction term from the minimal stable reduction to the local signature of the stable family.

By the orbifold version of the equivariant signature theorem, the problem is reduced to

a calculation of the Dedekind sum of the local monodromy data of Nielsen, which can be solved by using a certain formula in Matsumoto-Montesinos [MM1] relating a succession of fractional Dehn twists. This is the key point in the discussion of Chapter II.

This is the report for the symposium which is held at RIMS organized by Professor M. Ishizaka in 16th-19th Jan. 2006. But the author should write at the same time the report for the workshop held at Sogang University organized by Professor Y. Lee in Dec. 2005 and the report for the workshop held in Hakone organized by Professor Y. Matsumoto in 28th-30th Jan. 2006. Please admit that Chapter I is overlapped with the report for Sogang Univ. and Chapter II is overlapped with the report for Hakone, and that Chapter I is written in English and Chapter II is written in Japanese. The author thanks Professors M. Ishizaka, Y. Lee and Y. Matsumoto for above supports.

The author expresses his special thanks to Professor K. Yoshikawa for many discussions. The communication with him [Y2] is very important to the work and we are preparing some collaborated paper.

The author also thanks Professor K. Konno and Professor Y. Matsumoto, from whom the author learned many things about this subject.

CHAPTER 1

HORIKAWA INDEX AND MODULI MAP

1 Slope inequality and slope equality

Let $f : S \rightarrow B$ be a fibration of curves of genus $g \geq 2$ from a compact complex surfaces S to a nonsingular curve B of genus $g(B)$. Let $K_{S/B}$ be the relative canonical bundle and let $\chi_f = c_1(f_*K_{S/B}) = \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(g(B)-1)$ be the relative holomorphic Euler-Poincare characteristic. The basic invariants $(K_{S/B}^2, \chi_f)$ satisfy the slope inequality ([X1])

$$\frac{4(g-1)}{g}\chi_f \leq K_{S/B}^2 \leq 12\chi_f.$$

Note that the lower bound $(4(g-1))/g\chi_f = K_{S/B}^2$ occurs only when f is a hyperelliptic fibration ([Ko2]). Therefore if f is a non-hyperelliptic fibration, a more sharp inequality should exist. More precisely, we assume that the general fiber of f satisfies a certain condition (*). In other words, the generic fiber of f is assumed to be contained in a certain "geometrically-preassigned" subvariety $\mathcal{N}_{(*)}$ on the moduli space M_g of curves of genus g . Then one can expect that there exists a rational number $\lambda_{(*)}$ such that the inequality

$$\lambda_{(*)}\chi_f \leq K_{S/B}^2 \tag{1}$$

holds for any pencil f satisfying the condition $(*)$, and furthermore infinitely many examples attain the lower bound $K_{S/B}^2 = \lambda_{(*)}\chi_f$. For instance, the followings are known;

- (i) If f is non-hyperelliptic of $g = 3$, then the slope bound is $\lambda_{(*)} = 3$. ([Ko1], [CC], [R])
- (ii) If f is two trigonal (i.e. generic in moduli) of $g = 4$, then $\lambda_{(*)} = 7/2$. ([C], [Ko2])
- (iii) If f is one trigonal of $g = 4$, then $\lambda_{(*)} = 24/7$. ([C], [Ko2])
- (iv) If f is four-gonal of $g = 5$, then $\lambda_{(*)} = 4$. ([Ko2])
- (v) If f is trigonal of $g = 5$, then $\lambda_{(*)} = 40/11$. ([Ko2])
- (vi) If f is maximal-gonal of odd genus, then $\lambda_{(*)} = 6(g-1)/(g+1)$. ([Ko3])

If the slope inequality is established for a class of pencils with the property $(*)$, then our next problem is to analyze the local contribution of the fiber germs from the lower bound. Namely, can one define and calculate a non-negative number $\mathcal{H}(F_P) \geq 0$ ($F_P = f^{-1}(P)$) depending on the fiber germ (f, F_P) so that

$$K_{S/B}^2 - \lambda_{(*)}\chi_f = \sum_i \mathcal{H}(f, F_{P_i}) \quad ? \quad (2)$$

Here the summation is finite, i.e. the fiber germs (f, F_P) with $\mathcal{H}(f, F_P) > 0$ is finite. This is so-called the *slope equality problem* and the number $\mathcal{H}(f, F_P)$ is called the *Horikawa index* (or *H-index* for short) of the fiber germ.

Historically, Horikawa solved this problem for $g = 2$, and applied it to analyze the structure of surfaces near the Noether line $c_1^2 = 2\chi - 4$ ([Ho2]). Among the classification table of degenerate fiber germs of $g = 2$ due to Namikawa-Ueno [NU], the germs with positive Horikawa index are in very small classes [Ho1]. By combing this result with his solution [Ho3] of Morsification problem for $g = 2$ (see also [AA] Cor. 4.12), we can simply state as follows;

Theorem 1.1 (Horikawa) (i) *For any fiber germ (f, F) of genus 2, the H-index $\mathcal{H}(f, F)$ is well-defined. Namely, for any pencil of curves $f : S \rightarrow B$ of genus 2, we have $K_{S/B}^2 - 2\chi_f = \sum_i \mathcal{H}(f, F_i)$ with $\mathcal{H}(f, F_i) \geq 0$.*

(ii) *Let (f, F_1) (resp. (f, F_2)) be an irreducible (resp. a reducible) Lefschetz fiber germ of genus 2. Then $\mathcal{H}(f, F_1) = 0$ and $\mathcal{H}(f, F_2) = 1$.*

(iii) *Any fiber germ (f, F) of genus 2 is decomposed via local deformations into several Lefschetz fiber germs preserving the summation of Horikawa indicies. Namely, (f, F) decomposes into α irreducible Lefschetz fiber germs and β reducible Lefschetz fiber germs for some non-negative integers α and β such that $\mathcal{H}(f, F) = \beta$.*

Our motivation is to seek after the method for considering the slope equality problem of genus ≥ 3 . Cornalba-Harris [CH] discussed the slope inequality problem via the application of moduli theory of curves. Here we also try to the slope equality problem from this viewpoint.

2 Picard functor on \bar{M}_g

We review the facts about the Picard functor on the Deligne-Mumford compactification \bar{M}_g [DM], which will be used later. For the references, see [HaMo], [Mu2], [Mu2], [HaMu] etc.

Let γ be an element in the rationally defined Picard functor $\text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_g) \otimes \mathbf{Q}$ on the moduli stack \bar{M}_g . By definition, it means the association γ to each family $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ of stable curves of a rational divisor class $\gamma(\rho) \in \text{Pic}(\mathcal{B}) \otimes \mathbf{Q}$, such that for any base extension $\rho' : \mathcal{X}' \simeq \mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}'$ the class $\gamma'(\rho')$ associated to the morphism $\rho' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{B}'$ coincides with the pull back by $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ of the class $\gamma(\rho)$.

On the other hand, let $\text{Pic}(\bar{M}_g) \otimes \mathbf{Q}$ be the Picard group with \mathbf{Q} -coefficient on \bar{M}_g , i.e. the isomorphism class of \mathbf{Q} -line bundle on the complex orbifold \bar{M}_g . Then there exists an isomorphism

$$\text{Pic}(\bar{M}_g) \otimes \mathbf{Q} \simeq \text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_g) \otimes \mathbf{Q} \quad (3)$$

such that the following condition holds:

For any codimension 1 subvariety $\Sigma \in \bar{M}_g$, let $\sigma \in \text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_g) \otimes \mathbf{Q}$ be the corresponding element to the divisor $[\Sigma]$ via (3). Let $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ be a one-parameter family of stable curves and $\pi_{\rho} : \mathcal{B} \rightarrow \bar{M}_g$ be the moduli map.

(i) Assume that a finite number of fibers \mathcal{X}_b of ρ corresponds to points of Σ . Then the value $\sigma(\rho)$ is given as follows; Let $\text{Def}(\mathcal{X}_b)$ be the Kuranishi space of \mathcal{X}_b . Then $\text{Def}(\mathcal{X}_b)$ is isomorphic to $\text{Ext}^1(\Omega_{\mathcal{X}_b}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_b})$ and the moduli space \bar{M}_g is locally isomorphic to the quotient space $\text{Ext}^1(\Omega_{\mathcal{X}_b}^1, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_b})/\text{Aut}(\mathcal{X}_b)$ near the point $[\mathcal{X}_b]$. Now let $\tilde{\Sigma}$ be the inverse image of Σ in $\text{Def}(\mathcal{X}_b)$, which is Cartier since $\text{Def}(\mathcal{X}_b)$ is smooth. By the versality of $\text{Def}(\mathcal{X}_b)$, there exists a neighborhood $\mathcal{U}_b \subset \mathcal{B}$ of b and the local moduli map $\tilde{\pi}_b : \mathcal{U}_b \rightarrow \text{Def}(\mathcal{X}_b)$. We define the multiplicity $\text{mult}_b(\sigma)$ to be the usual intersection multiplicity $(\tilde{\pi}_b(\mathcal{U}_b), \tilde{\Sigma})_{\tilde{\pi}_b^{-1}(b)}$ in the smooth space $\text{Def}(\mathcal{X}_b)$. Then

$$\sigma(\rho) = \sum_b \text{mult}_b(\sigma) \cdot b. \quad (4)$$

(ii) Assume Σ is irreducible and let $\text{Aut}(C)$ be the automorphism group of the general point $[C] \in \Sigma$. Then

$$\sigma(\rho) = \frac{1}{\#\text{Aut}(C)} \pi_{\rho}^*([\Sigma]).$$

Next let L_{λ} be the Hodge bundle on \bar{M}_g , and $\lambda = c_1(L_{\lambda})$ be its first Chern class in orbifold sense. As a \mathbf{Q} -functor, the evaluation $L_{\lambda}(\rho)$ for a stable family $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ is nothing but the determinant line bundle of the direct image of the relative dualizing sheaf $\wedge^g \lambda_* \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}$. The Mumford's original definition (and existence) of L_{λ} is as follows ([Mu1]):

Let H_g be the locally closed subscheme of a suitable Hilbert scheme parametrizing stable curves in a fixed projective space $\mathbf{P}^{\nu-1}$, and $p : Z_g \rightarrow H_g$ be the universal family. Then the algebraic group $\mathrm{PGL}(\nu)$ acts on H_g , and the moduli space \bar{M}_g is nothing but the quotient space $H_g/\mathrm{PGL}(\nu)$. Moreover the $\mathrm{PGL}(\nu)$ -invariant part $\mathrm{Pic}(H_g)^{\mathrm{PGL}(\nu)}$ coincides with $\mathrm{Pic}_{\mathrm{fun}}(\bar{M}_g)$. Then we define L_λ to be $\wedge^g p_* \omega_{Z/H_g}$.

Recently, the existence of the global tautological family $\tilde{\rho} : \mathcal{C} \rightarrow \Omega$ is proved [ACV]. Namely Ω is a smooth variety and \mathcal{C} is a universal family of stable curves with a certain level structure, and a natural finite Galois cover $\tau : \Omega \rightarrow \bar{M}_g$ exists. Then the Hodge bundle L_λ is also identified with $(1/\deg \tau) \tau_*(\wedge^g \tilde{\rho}_*(\omega_{\mathcal{C}/\Omega}))$.

On the other hand, let L_{κ_1} be the first tautological line bundle on \bar{M}_g , and $\kappa_1 = c_1(L_{\kappa_1})$ be its first Chern class. The class κ_1 is also called the (dual of) first Morita-Mumford class. As a \mathbf{Q} -functor, the evaluation $L_{\kappa_1}(\rho)$ for a stable family $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ is nothing but $\rho_*(K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^2)$.

Let $\bar{M}_g \setminus M_g = \sum_{i=0}^{[g/2]} \Gamma_i$ be the irreducible decomposition of the boundary divisor, where Γ_i ($1 \leq i \leq [g/2]$) is the closure of the locus of Lefschetz curves whose genera of the two components are i and $g - i$, and Γ_0 is that of irreducible Lefschetz curves. Let $\delta = \sum_{i=0}^{[g/2]} \delta_i$ be the corresponding \mathbf{Q} -functor. Since the general curve $[C] \in \delta_1$ has an involution, we should consider $\delta = [\Gamma_0] + (1/2)[\Gamma_1] + [\Gamma_2] + \cdots + [\Gamma_{[g/2]}]$ in view of (ii). We also use the same symbol δ_i as its first Chern class.

Note that the curve of the generic point on a divisor \mathcal{D} on \bar{M}_g has non-trivial automorphism if and only if $\mathcal{D} = \Gamma_1$ or \mathcal{D} is the hyperelliptic locus on \bar{M}_3 . In these cases, we should multiply $1/2$. Otherwise, the correspondence (3) is direct. From now, by minding the above fact, we identify \mathbf{Q} -functor and \mathbf{Q} -divisor on \bar{M}_g via (3) and use the same symbol.

Now the first Mumford relation [Mu2] says that

$$\kappa_1 = \frac{1}{12}(\lambda + \delta). \tag{5}$$

If we evaluate the relation (5) of Picard functors to a one-parameter family $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ of stable curves, we obtain the relative Noether formula

$$K_{\mathcal{X}/\mathcal{B}}^2 = \frac{1}{12}(\chi_\rho + \mathcal{E}(\mathcal{X}')) \tag{6}$$

where $\mathcal{E}(\mathcal{X}') = \chi_{\mathrm{top}}(\mathcal{X}') - (2 - 2g)\chi_{\mathrm{top}}(\mathcal{B})$ is the topological Euler contribution of the semi-stable model \mathcal{X}' of \mathcal{X} , i.e. \mathcal{X}' is the resolution space of rational double points of type A on \mathcal{X} .

We prove (6). Since the evaluation of the functors λ and κ_1 is clear, we should consider the functor δ . Let Q be a node on a stable fiber $F_P = \rho^{-1}(P)$. The surface \mathcal{X} is locally defined near Q by the equation $xy - t^{d(Q)} = 0$ for a positive integer $d(Q)$, i.e.

\mathcal{X} has a rational double point of type $A_{d(Q)-1}$ at Q . Then the intersection multiplicity $(\tilde{\pi}_P(\mathcal{U}_P), \tilde{\delta})_{\tilde{\pi}_P(P)}$ in the discussion (i) coincides with $\sum_{Q_i} d(Q_i)$, where $\{Q_i\}$ moves the set of nodes on F_P .

Indeed, by the argument of [DM] §1, the germ (f, F_P) can be deformed to $\sum_{Q_i} d(Q_i)$ atomic Lefschetz fiber germs. Note that an atomic Lefschetz fiber germ is the germ of a stable curve with an unique node such that the ambient surface is nonsingular at the node, or equivalently, the image of the local moduli map to the Kuranishi space meets transversally to the lift of δ . Since the sum of the multiplicity is preserved via deformation, the above assertion is clear. (This discussion is sometimes called “Morsification argument”.)

Since the semi-stable fiber F_P^* of F_P is obtained by the resolution of all the A_{Q_i-1} singularities of the nodes Q_i on F_P , we have $\mathcal{E}(F_P^*) = \chi_{\text{top}}(F_P^*) - (2 - 2g) = \sum_{Q_i} d(Q_i)$. Since $\mathcal{E}(\mathcal{X}') = \sum_P \mathcal{E}(F_P^*)$, the assertion (6) holds.

3 Genus 2 fibration once more

Can we understand Theorem 1.1 from the viewpoint of moduli theory of curves ?

We remember a result of Mumford [Mu2] §8 for $g = 2$. In $\text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_2) \otimes \mathbf{Q}$, he showed the non-trivial relation

$$10\lambda = \delta_0 + 2\delta_1. \tag{7}$$

It follows from (5) and (7) that

$$\kappa_1 - 2\lambda = \delta_1. \tag{8}$$

Now let $f : S \rightarrow B$ be a stable fibration of genus 2, and $\pi_f : B \rightarrow \bar{M}_g$ be the moduli map. We evaluate (8) to f , and obtain

$$K_{S/B}^2 - 2\chi_f = \text{deg}(\pi_f^* \delta_1). \tag{9}$$

From this, we can introduce another version of H-index as follows:

Let (f, F_P) be a fiber germ of f and $\tilde{\pi}_f : U_P \rightarrow \text{Def}(F_P)$ be the local moduli map to the Kuranishi space. Then we define the H-index by the intersection number

$$\mathcal{H}(f, F_P) = (\tilde{\pi}_f(U_P), \tilde{\delta}_1)_{\tilde{\pi}_f(P)}. \tag{10}$$

Then the relation (9) is re-written by

$$K_{S/B}^2 - 2\chi_f = \sum_P \mathcal{H}(f, F_P). \tag{11}$$

Since H-index of a smooth fiber germ is zero by the definition (10), the right-hand side of (11) is a finite sum. Moreover, we have examples of pencils f of genus 2 which attain

any pre-assigned positive integers $(K_{S/B}^2, \chi_f)$ with $K_{S/B}^2 - 2\chi_f = 0$, because we can easily construct such pencils with at most irreducible Lefschetz fibers. (Note that δ_0 does not contribute H-index !)

We describe $\mathcal{H}(f, F_P)$ more explicitly. We call a node Q on a stable fiber F_P *separated* if the complement $F_P \setminus \{Q\}$ is disconnected. By the language of local monodromy around F_P , Q is separated iff the vanishing cycle corresponds to Q is a separated simple closed curve on the nearby fiber. We denote by $\text{Sep}(F_P)$ the set of separated nodes on F_P .

Lemma 3.1

$$\mathcal{H}(f, F_P) = \sum_{Q_i \in \text{Sep}(F_P)} d(Q_i).$$

PROOF Similar to the proof of (6).

Therefore we have enough knowledges for the stable family.

Next let $f : S \rightarrow B$ be any fibration of genus 2 admitting unstable fibers. Since $\dim B = 1$, the moduli map is extended to a morphism by the valuative criterion, which we also write $\pi_f : B \rightarrow \bar{M}_g$. For an unstable fiber F_P , the stable curve $[\pi_f(P)] \in \bar{M}_g$ is nothing but the central fiber of the local stable reduction of (f, F_P) . But in order to analyze H-index, we have some trouble for using this extended moduli map. Because :

Lemma 3.2 *There exists a splitting family $\{f_u : S_u \rightarrow \Delta_u\}_{u \in \Delta}$ of a degeneration of curves of genus 2 (Δ_u, Δ are unit disks) which satisfy the following:*

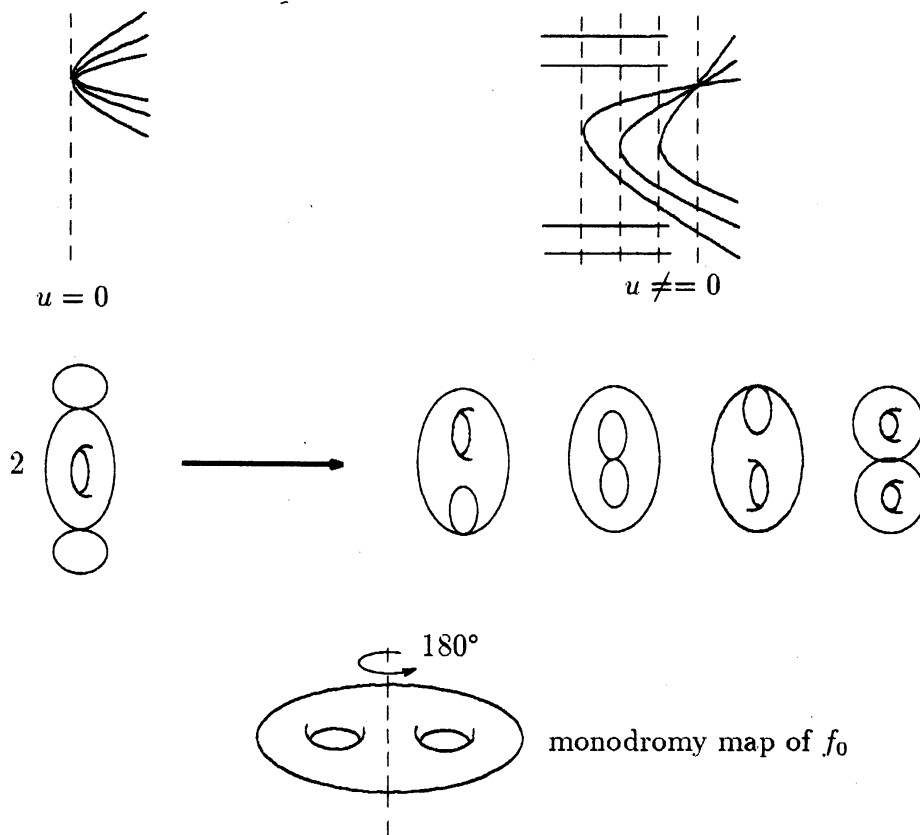
- (i) *The pencil $f_0 : S_0 \rightarrow \Delta_0$ has a unique singular fiber $F = f_0^{-1}(0)$ such that:*
 - (a) *F has the irreducible decomposition $F = 2E_1 + E_2 + E_3$ so that E_1 is a non-singular elliptic curve, E_i ($i = 2, 3$) are (-2) -curves and $E_1E_2 = E_1E_3 = 1$, $E_2E_3 = 0$,*
 - (b) $\mathcal{H}(f_0, F) = 1$,
 - (c) *The stable reduction $\tilde{f}_0 : \tilde{S}_0 \rightarrow \tilde{\Delta}_0$ of f_0 is a smooth family,*
 - (d) *The topological monodromy of f_0 is periodic of order 2 of a Riemann surface of genus 2 with the total valency $1/2 + 1/2$.*
- (ii) *The pencil $f_u : S_u \rightarrow \Delta_u$ ($u \neq 0$) has four singular fibers, and one of them is a reducible atomic Lefschetz fiber and three of them are irreducible atomic Lefschetz fibers.*

PROOF Let α_i ($1 \leq i \leq 3$) be mutually distinct complex numbers. Let $(x, t, u) \in \mathbf{C} \times \Delta \times \Delta$ be a relative inhomogeneous coordinate of $\mathbf{P}^1 \times \Delta \times \Delta$. We define the branch divisor D on $\mathbf{P}^1 \times \Delta \times \Delta$ by the equation

$$\prod_{i=1}^3 (t - ux - \alpha_i x^2) = 0.$$

Then the simultaneous resolution space of the double cover of $\mathbf{P}^1 \times \Delta \times \Delta$ branched along D induces the desired splitting family. (See Figure 1.) Note that the stable reduction \tilde{f}_0 of f_0 is induced from the double cover $\tilde{\Delta}_0 \rightarrow \Delta$. Q.E.D.

Although the image $\pi_{f_0}(0)$ is not contained in the support of δ_1 by (c), the germ (f_0, F) has positive H-index. This means that the H-index of an unstable fiber germ is not controlled via this extended moduli map. We also comment that, the moduli map of the two-parameter family $\bigcup_{u \in \Delta} S_u \rightarrow \Delta \times \Delta$ has an indeterminacy at $(0, 0)$ and cannot be extended to a morphism from $\Delta \times \Delta$ to \bar{M}_g .



(Figure 1)

We understand this phenomenon in the following way. Back to the original unstable family f , let (\hat{f}, \hat{F}) be the germ of the local stable reduction of the germ (f, F) . More precisely, let $f' : S' \rightarrow \Delta$ be a sufficiently small tubular neighborhood of F in S and n be the smallest integer of the covering degree $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ so that the desingularization of $S' \times_{\Delta} \tilde{\Delta}$ induces a stable family $\hat{f}' : \hat{S}' \rightarrow \hat{\Delta}$, and (\hat{f}, \hat{F}) be the germ of the central fiber

of \widehat{f} . Then, by the same method which we explain in the next section, we define the *stable H-defect* $\partial\mathcal{H}(f, F)$ and write

$$\mathcal{H}(f, F) = \frac{1}{n}\mathcal{H}(\widehat{f}, \widehat{F}) + \partial\mathcal{H}(f, F). \quad (12)$$

Note that stable H-defect is defined for any fiber germ of arbitrary genus, and is written explicitly in terms of topological local monodromy data around F . (Compare with the interesting discussion in [Tan] II, p.672.) Since $\mathcal{H}(\widehat{f}, \widehat{F})$ is described in Lemma 3.1, we can recover the Horikawa's theory of H-index of genus 2 [Hol] without using the method of double covering. The coincidence of the original H-index and (12) is proved by the same argument as in [Te]. For example, with respect to the family $f_0 : S_0 \rightarrow \Delta_0$ in Lemma 3.2, an easy calculation shows that $\partial\mathcal{H}(f_0, F_0) = 1$ and $\mathcal{H}(\widehat{f}_0, \widehat{F}_0) = 0$, which imply $\mathcal{H}(f_0, F_0) = 1$.

This consideration might suggest that the H-index is, in general principle, written by

$$(\text{H-index}) = (\text{contribution of "moduli"}) + (\text{contribution of "monodromy"}). \quad (13)$$

Historically, the importance of the contribution of stable reduction to invariants of surfaces was, in author's knowledge, discovered by Viehweg [Vi] and Xiao [X2] and then a work of Tan [Tan] appeared. We made a new start from [A1] [A2] by combining the monodromy. Here we also discuss from this point of view.

4 Localization via Harris-Mumford and Eisenbud-Harris formulas

Let \mathcal{D} be a \mathbf{Q} -divisor on \bar{M}_g . A fibration $f : S \rightarrow B$ of genus g is called \mathcal{D} -generic iff the image of the extended moduli map $\pi_f : B \rightarrow \bar{M}_g$ is not contained in the locus of \mathcal{D} ; $\pi_f(B) \not\subset \text{Supp}(\mathcal{D})$. By the \mathcal{D} -critical set $\text{Crit}_f(\mathcal{D})$ of f , we mean the set of points $P \in B$ such that $\pi_f(P) \in \text{Supp}(\mathcal{D}) \cup (\bar{M}_g \setminus M_g)$. If f is \mathcal{D} -generic, then $\text{Crit}_f(\mathcal{D})$ is a finite set.

Now the aim of this section is to consider the slope equality problem for \mathcal{D} -generic fibrations in the following two cases:

- (A) The genus is odd, say $g = 2k - 1$ ($k \geq 2$), and \mathcal{D} is the closure of the locus of smooth curves whose gonality is less than $k + 1$, i.e. \mathcal{D} is the "non-maximal-gonal" locus.
- (B) The genus is $g = 4$, and \mathcal{D} is the closure of the locus of smooth curves with one g_3^1 , or in other words, the curves whose canonical images are contained in singular quadrics. (Note that the generic curve of genus 4 has two g_3^1 and the canonical image is contained in a smooth quadric.)

First we consider (A). In $\text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_{2k-1}) \otimes \mathbf{Q}$, the Harris-Mumford formula [HaMu] says that

$$\mathcal{D} = \frac{(2k-4)!}{k!(k-2)!} \left\{ 6(k+1)\lambda - k\delta_0 - \sum_{\alpha=1}^{k-1} 3\alpha(2k-1-\alpha)\delta_\alpha \right\}. \tag{14}$$

We seek after the maximal number x such that $\kappa_1 - x\lambda$ is a \mathbf{Q} -linear combination of $\mathcal{D}, \delta_0, \dots, \delta_{k-1}$ so that all the coefficients are non-negative. By (14) and (5), the solution is $x = 6(k-1)/k = 6(g-1)/(g+1)$, which coincides with Konno's bound §1(vi). Then

$$\kappa_1 - \frac{6(g-1)}{g+1}\lambda = \frac{(k-1)!(k-2)!}{(2k-4)!} \mathcal{D} + \sum_{\alpha=1}^{k-1} \frac{(6\alpha-1)k - 3\alpha(\alpha+1)}{k} \delta_\alpha. \tag{15}$$

Note that the coefficient of δ_0 vanishes.

Now let $f : S \rightarrow B$ a \mathcal{D} -generic (i.e. maximal-gonal) fibration of odd genus $g = 2k - 1$ ($k \geq 2$). We first assume f is stable. Let (f, F_P) be a fiber germ of $P \in \text{Crit}_f(\mathcal{D})$, and $\tilde{\pi}_P : U_P \rightarrow \text{Def}(F_P)$ be the local moduli map. We define

$$\mathcal{H}(f, F_P) = \left(\tilde{\pi}_P(U_P), \frac{(k-1)!(k-2)!}{(2k-4)!} \tilde{\mathcal{D}} + \sum_{\alpha=1}^{k-1} \frac{(6\alpha-1)k - 3\alpha(\alpha+1)}{k} \tilde{\delta}_\alpha \right)_{\tilde{\pi}_P(P)} \tag{16}$$

where $\tilde{\mathcal{D}}$ and $\tilde{\delta}_\alpha$ are the local lift of \mathcal{D} and δ_α to $\text{Def}(F_P)$ respectively. Then $\mathcal{H}(f, F_P) \geq 0$, and it follows from the evaluation of (15) to f that

$$K_{S/B}^2 - \frac{6(g-1)}{g+1}\chi_f = \sum_{P \in \text{Crit}_f(\mathcal{D})} \mathcal{H}(f, F_P). \tag{17}$$

For instance, if $k = 2$, i.e. f is a non-hyperelliptic fibration of genus 3, we have $K_{S/B}^2 - 3\chi_f = \sum_{P \in \text{Crit}_f(\mathcal{D})} \mathcal{H}(f, F_P)$ where $\mathcal{H}(f, F_P) = (\tilde{\pi}_P(U_P), \mathcal{D} + 2\delta_1)_{\tilde{\pi}_P(P)}$ and the support of \mathcal{D} is nothing but the hyperelliptic locus.

Next f is assumed to be unstable. Let (\hat{f}, \hat{F}_P) be the germ of the minimal stable reduction of (f, F_P) for $P \in \text{Crit}_f(\mathcal{D})$, and $n(P)$ be the order of the covering map of the base change to obtain (\hat{f}, \hat{F}_P) . Let $\partial\mathcal{S}(f, F_P)$ be the *stable signature defect* which we define in Chapter II §11. By using $\partial\mathcal{S}(f, F_P)$ and the topological Euler contribution, we define the stable H-defect by

$$\partial\mathcal{H}(f, F_P) = \frac{3(g+3)}{2(g+1)}\partial\mathcal{S}(f, F_P) + \frac{g+7}{2(g+1)} \left\{ \mathcal{E}(F_P) - \frac{1}{n(P)}\mathcal{E}(\hat{F}_P) \right\}, \tag{18}$$

and set

$$\mathcal{H}(f, F_P) = \frac{1}{n(P)}\mathcal{H}(\hat{f}, \hat{F}_P) + \partial\mathcal{H}(f, F_P). \tag{19}$$

Note that the definition (19) is explicit, because the H-index of the stable fiber germ $\mathcal{H}(\hat{f}, \hat{F}_P)$ is described by (16) and the stable H-defect $\partial\mathcal{H}(f, F_P)$ is described by the local

monodromy data as in Chapter II. Then, by the same argument of the formula (2.1.3) in [AK] p.13, we also have $K_{S/B}^2 - (6(g-1)/(g+1))\chi_f = \sum_{P \in \text{Crit}_f(\mathcal{D})} \mathcal{H}(f, F_P)$.

We expect that $\mathcal{H}(f, F_P)$ in (19) coincides with the Konno's H-index for a Clifford general fibration [Ko3], which is defined by using the relative Koszul complex on the relative canonical algebra. But this is yet open, and furthermore the non-negativity of (19) is not settled. The success of this would be the explicit description of Konno's H-index via the "philosophy" of (13).

We comment that, with respect to a non-hyperelliptic fibration of genus 3, Konno's H-index coincides with the original Reid's H-index [R] (see also [Me]), and recently Chen-Tan [CT] defined another type of H-index via the method of triple coverings.

Next we consider (B). First in general, we put $g = 2(d-1)$ with $d \geq 3$, and remember the work of Eisenbud-Harris [EH]. Let E_d^1 be the \mathbf{Q} -divisor on \bar{M}_g which is the closure of the smooth curves $[C]$ possessing a linear pencil V in a complete linear system $|L|$ of degree d with "violating the Petri condition", i.e. the product map $V \otimes H^0(K_C \otimes L^{-1}) \rightarrow H^0(C, K_C)$ is not injective. In $\text{Pic}_{\text{fun}}(\bar{M}_g) \otimes \mathbf{Q}$, they proved

$$E_d^1 = 2 \frac{(2d-4)!}{d!(d-2)!} \left\{ (6d^2 + d - 6)\lambda - \sum_{i=0}^{d-1} a_i \delta_i \right\}, \tag{20}$$

where $a_0 = d(d-1)$, $a_1 = (2d-3)(3d-2)$, $a_2 = 3(d-2)(4d-3)$ and $a_i \geq a_{i-1}$ for $6d^2 + d - 6 \leq i \leq d-1$.

Especially for $g = 4$, the locus E_3^1 is nothing but our \mathcal{D} in (B), and (20) is written by

$$\mathcal{D} = 2(17\lambda - 2\delta_0 - 7\delta_1 - 9\delta_2). \tag{21}$$

We seek after the maximal number x such that $\kappa_1 - x\lambda$ is a \mathbf{Q} -linear combination of $\mathcal{D}, \delta_0, \delta_1, \delta_2$ with non-negative coefficients. By (21) and (5), the solution is $x = 7/2$, which coincides with Chen-Konno's bound §1(ii). Then

$$\kappa_1 - \frac{7}{2}\lambda = \frac{1}{4}\mathcal{D} + \frac{5}{2}\delta_1 + \frac{7}{2}\delta_2.$$

Therefore, for a stable \mathcal{D} -generic genus 4 fibration $f : S \rightarrow B$, we have

$$K_{S/B}^2 - \frac{7}{2}\chi_f = \sum_{P \in \text{Crit}_f(\mathcal{D})} \mathcal{H}(f, F_P) \tag{22}$$

where

$$\mathcal{H}(f, F_P) = \left(\widetilde{\pi}_P(U_P), \frac{1}{4}\widetilde{\mathcal{D}} + \frac{5}{2}\widetilde{\delta}_1 + \frac{7}{2}\widetilde{\delta}_2 \right)_{\widetilde{\pi}_P(P)}$$

is defined similarly as in the case (A). Note that an explicit construction of this \mathcal{D} -generic fibration with a smooth critical fiber germ is written in [A3].

For an unstable \mathcal{D} -generic genus 4 fibration f , by using the stable signature defect, we put

$$\partial\mathcal{H}(f, F_P) = \frac{21}{10}\partial\mathcal{S}(f, F_P) + \frac{11}{10}\left\{\mathcal{E}(F_P) - \frac{1}{n(P)}\mathcal{E}(\widehat{F}_P)\right\},$$

and define $\mathcal{H}(f, F_P)$ as same as (19). Then we obtain the same formula as (22). But the non-negativity of the above $\mathcal{H}(f, F_P)$ is yet open.

Lastly in this Chapter, we comment that a sharp form of (20) would contribute the problem for \mathcal{D} -generic fibrations of even genus with $g \geq 6$. For a fibration whose general fiber has more restricted property (*) as in §1, we cannot say anything because of the lack of knowledge of \mathbf{Q} -divisors on the subvariety of \bar{M}_g , which itself seems to be an interesting problem. We also expect the development of the study of the relation of this problem and \mathbf{Q} -adjoint system on \bar{M}_g of Y. Lee [L].

CHAPTER 2

SIGNATURE, MONODROMY AND DEDEKIND SUM

5 第2章のための序論

S をコンパクト複素曲面, B を閉リーマン面とし, 正則写像 $f: S \rightarrow B$ は一般ファイバーが種数 $g \geq 2$ のリーマン面を与えるようなファイバー空間とする¹.

$\text{Sign}S$ を $H^2(S, \mathbf{Q})$ 上の交叉形式の符号数とする. 我々の動機はいかにしたらその $\text{Sign}S$ の値を求められるか, その手段を探りたいということである. これは複素曲面論においても, また4次元トポロジーの立場でも, 最も基本的な問いかけの一つであろうと思う.

ここではこれを一気に解決できるわけではないが, しかしこの問題の持つ一つの困難性をとり除き, 問題をより簡単な状況に帰着できることを示そうと思う. 則ち f の最小安定還元族を $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{B}$ とするとき, $\text{Sign}S$ と $\text{Sign}\tilde{S}$ の差を正確に測ることができる非常にシンプルな式を提示したいと思う. これによって問題は安定曲線族の場合に帰着されることになる².

f と \tilde{f} の相違は, モノドロミー的には次のようなものである. f の特異ファイバー $F_\alpha = f^{-1}(P_\alpha)$ ($P_\alpha \in B$) の局所位相モノドロミー写像 $\phi_\alpha: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ (Σ_g は種数 g のリーマン面) は, 一般にその body 部 B に非自明な valency があり, かつそのアニュラス部 A にも非自明な screw 数から生ずる分数 Dehn twist を持つ, 負型擬周期写像である ([MM1])

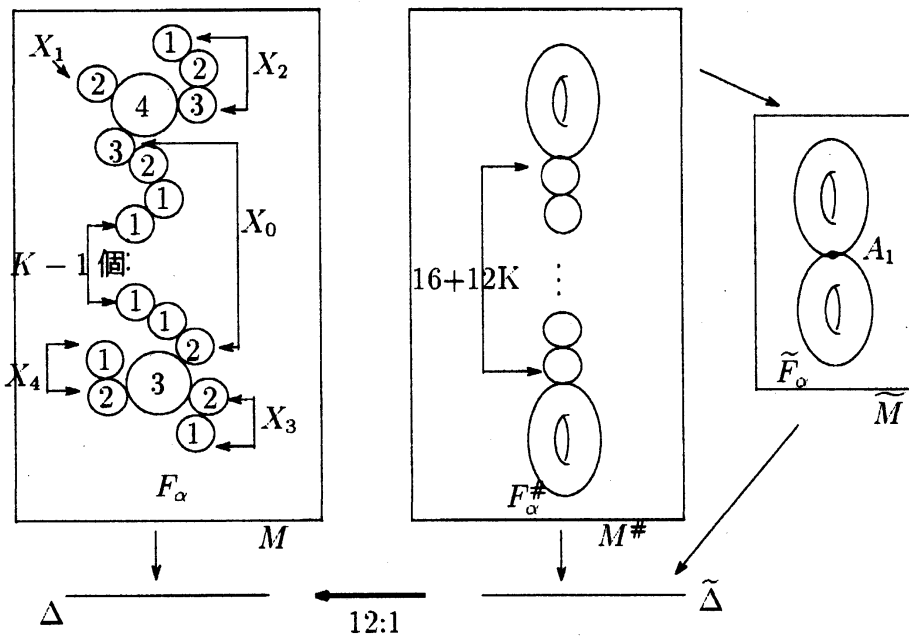
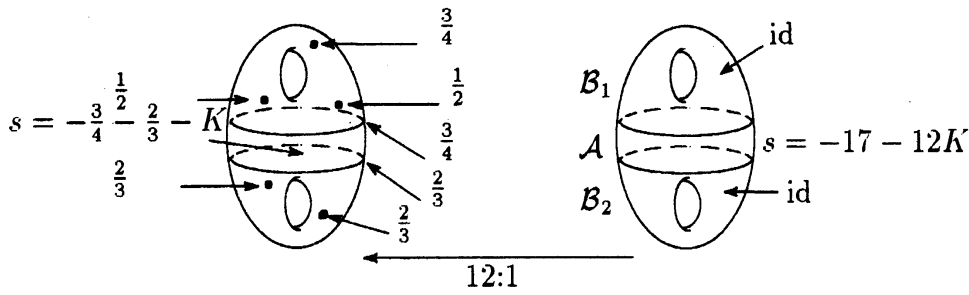
¹ S を実4次元可微分多様体とし, f を松本 [Mal] にある準正則ファイバー空間 (つまり臨界ファイバーのまわりでのみ複素構造が定義され且つ正則になるような C^∞ 写像が f) としても我々の議論はそのまま成立すると思う. ここでは一応上記の古典的設定に従った.

² 安定曲線族の符号数については, Deligne-Mumford コンパクト化 \bar{M}_g 上のある因子の問題に帰着されるが, この方面は現在発展中のところである (吉川 [Y1], Smith [S] 等)

等). しかし, これを周期 $n(\phi_\alpha)$ 倍した写像 $\phi_\alpha^{n(\alpha)}: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は B での valency は自明で, A では整数 Dehn twist のみ起こるといふ, 簡明な写像となる. 特異ファイバーについて見れば, ϕ_α に対応する F_α は各成分がバラバラの重複度を持つ非安定ファイバーであるが, $\phi_\alpha^{n(\alpha)}$ に対応する特異ファイバー $F_\alpha^\#$ は各成分の重複度が全て 1 であり node のみを許す, いわゆる半安定曲線になる.

さて局所最小半安定還元とは, Δ を P_α の B での小円板近傍とすると, 次数 $n(\alpha)$ の巡回分岐被覆写像 $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ を通じて, $\tilde{\Delta}$ 上にモノドロミーが $\phi_\alpha^{n(\alpha)}$ であり且つ $F_\alpha^\#$ が特異ファイバーである退化族 $M^\# \rightarrow \tilde{\Delta}$ を作ることである. $F_\alpha^\#$ にある (-2) 曲線鎖を A 型特異点に contract する写像を $M^\# \rightarrow \tilde{M}$ とするとき, $\tilde{M} \rightarrow \tilde{\Delta}$ がもとの $f|_M: M = f^{-1}(\Delta) \rightarrow \Delta$ の局所最小安定還元である. 例 A を参照されたい.

これらの局所最小安定還元を各臨界値のまわりでおこないつつ, それを大域的に patch したものが, 我々の $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{B}$ である.



例 A

このように安定還元は“モノドロミーの半自明化”という操作であるので, $\text{Sign} S$ と

Sign \tilde{S} の差が, モノドロミーの情報によって記述できるであろうと期待するのは当然であろう. そのことを実際に実行するのが本章の目的である.

そのためには, valency および screw 数から生じる Dedekind 和を計算する必要があるが, なぜそうなるか例 A を用いて説明してみよう.

そのために先ほど説明した安定還元モノドロミー的解釈を, 今度は特異点の立場から説明してみる. 例 A の特異ファイバー F_α の成分のうち, X_1, X_2, X_3, X_4 , と一番大きな X_0 とを contract する写像を $\phi: M \rightarrow \widehat{M}$ とし, $\widehat{F}_\alpha = \phi(F_\alpha)$ とする. このとき \widehat{F}_α 上には A_1 特異点が 1 個, A_3 特異点も 1 個, A_2 特異点が 2 個とあと一つ中央に $A_{17+12k, 10+8k}$ 型巡回商特異点が生じる. この最後の特異点は, 自己交点数から計算される負型連分数の値が $(17+12K)/(10+8K)$ となるので, この型になる.

この $\widehat{M} \rightarrow \Delta$ を 12:1 で底変換してみる. すると, A_1, A_2, A_3 , は局所一意化されて非特異になるが, $A_{17+12k, 10+8k}$ はもう少し「浅い」特異点である A_{16+12k} になる. さらに Y_1 および Y_2 (図 1) には 4 次および 3 次の分岐被覆が生じて 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 に持ち上がる. つまりこれは (局所最小) 安定還元族に他ならない.

逆に \widetilde{M} には $G = \mathbf{Z}/(12)$ が正則に作用し, 先の A_1, A_2, A_3 特異点の逆像にあたる \widetilde{F}_α の内点および node が G の元の孤立固定点になる. また成分 E_1, E_2 全体が order 3 および 4 の安定化群を持つ. この G 作用の商をとると $\widehat{M} = \widetilde{M}/G$ になる. そうして \widehat{M} の特異点を解消すればもとの M が回復する.

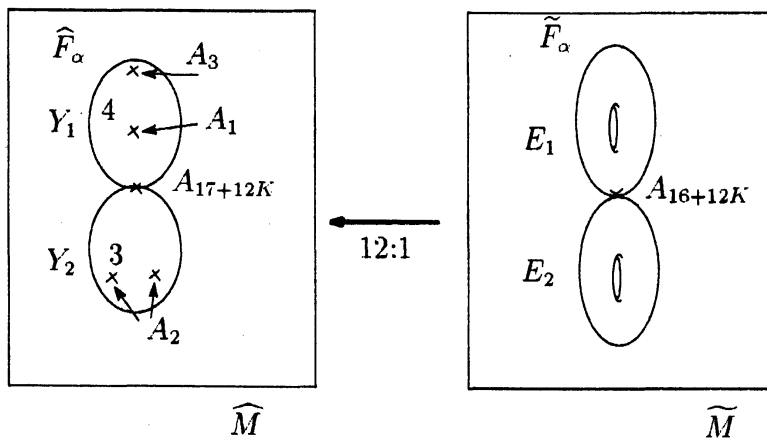


図 1

以上のことは一般に大域化される. 則ち安定還元族 \tilde{S} には巡回群 G が正則に作用し, 商 \tilde{S}/G の特異点の解消によって, 元の S が回復する.

従って $\text{Sign}\tilde{S}/G$ を介して $\text{Sign}S$ と $\text{Sign}\tilde{S}$ が比較できる. $\text{Sign}\tilde{S}/G$ と $\text{Sign}S$ の比較は簡単である. \tilde{S}/G の特異点解消の例外曲線の本数だけ負の固有空間の次元が増えるので, $\text{Sign}\tilde{S}/G - \text{Sign}S$ はこの例外曲線の本数に一致する. これは特異点の型さえ決めればよいので簡単である. 実際には連分数の長さを数えるだけでよい.

問題は $\text{Sign}\tilde{S}$ と $\text{Sign}\tilde{S}/G$ の比較であるが、この種の問題は、同変符号数定理の範疇に属す。ただし \tilde{S} には A 型特異点という商特異点があるので、正確にはこの定理の orbifold 版が必要である。いずれにせよ G 作用に関する固定点跡に関する「一般化された Lefschetz 数」を計算すればよいことになるがこれが Dedekind 和に翻訳されることは 1960 ~ 1970 年代より知られていたことである。 G 作用とモノドロミーの関連性は、先の説明で了解いただけるだろう。こうして結局, valency, screw 数等に関する Dedekind 和を計算する必要が生じたのである。

さてこの計算は完全に explicit に実行される。Dedekind 和の相互律の反復使用と松本-Montesinos [MM1] にある、ある型の数列の和公式が鍵となった。本章で一番お伝えしたいのは、この部分である。

我々の主結果である定理 11.2 の適用範囲を見るために、例 A で述べた非安定ファイバー芽 F_α について、種数 2 の局所符号数 $\sigma(F_\alpha)$ を計算して見よう。 $F_\alpha, \hat{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha$ のファイバー芽の乗っている曲面の符合数への局所寄与を、同じく形式的に σ で書くことにする。まず特異点解消の例外曲線の本数を数えて

$$\sigma(\hat{F}_\alpha) - \sigma(F_\alpha) = 12 + k, \sigma(\tilde{F}_\alpha) - \sigma(F_\alpha^\#) = 16 + 12k$$

を得る。定義 11.1 の安定符号欠損数 $\partial S(F)$ は、今の場合、第一項 = $5/3$, 第二項 = $-11/12$, 第三項 = 0 であるゆえ、

$$\sigma(\hat{F}_\alpha) - (1/12)\sigma(\tilde{F}_\alpha) = \partial S(F_\alpha) = 3/4$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sigma(F_\alpha) &= (\sigma(F_\alpha) - \sigma(\hat{F}_\alpha)) + (\sigma(\hat{F}_\alpha) - \frac{1}{12}\sigma(\tilde{F}_\alpha)) + \frac{1}{12}(\sigma(\tilde{F}_\alpha) - \sigma(F_\alpha^\#)) + \frac{1}{12}\sigma(F_\alpha^\#) \\ &= -\frac{199}{12} + \frac{1}{12}\sigma(F_\alpha^\#) \end{aligned}$$

となる。つまり半安定ファイバーの局所符号数 $\sigma(F_\alpha^\#)$ に帰着された。これから先は、他の方法に頼らねばならない。今の場合、まず $F_\alpha^\#$ は σ を保存しつつ $(17 + 12k)$ 個の分離 Lefschetz ファイバーに分裂する (図 2)。

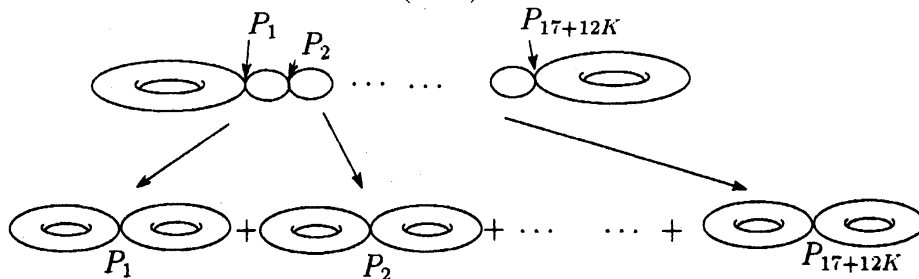


図 2

さらに二つの楕円曲線が一点で交わる特異ファイバーをもつ芽を X とすると $\sigma(X) = -1/5$ であるので ([U] [Ma2]), $\sigma(F_\alpha^\#) = -(17 + 12k)/5$ となり、先の計算とあわせて $\sigma(F_\alpha) =$

$-k/5 - 51/5$ を得る. ちなみにこの値は, 2 重被覆を経由する別の方法で求めた値とも一致する.

なお, 局所符号数の周辺は, 最近トポロジー, 代数幾何双方から色々な方法で貢献が絶えないところであり, その動きを今野一宏氏, 遠藤久顕氏とそれぞれ共同で若干の解説 ([AK], [AE]) をさせていただいた. [AK], [AE] の文献表作成後も, 例えば飯田修一氏 [Ii] による断熱極限を用いる方法等が現れている.

本章の構成は以下のとおりである. §6 ~ 8 で Dedekind 和と (orbifold) 同変符号数定理について必要な事柄を復習する. §9, 10 で valency と screw 数から生ずる Dedekind 和を計算する. §11 で我々の主張を述べ, 証明のアウトラインを与える.

本章はもともと手書きの原稿であったのであるが, 石坂瑞穂氏によって日本語 Tex に入力いただいた. その際, もとの原稿の細かいミスも訂正いただいた. これは集会の主催者としての氏のお立場というよりも, 近年来の共同研究者の一人としての友情によるものであろう. 氏に深く感謝したい.

なお本稿は, その性格上議論の骨子のみを与えているに過ぎない. 正確な記述は, 来るべき論文を待ってご参照いただきたい.

6 Dedekind 和の由来

互いに素な自然数 p, q に対し, Dedekind 和は,

$$s(p, q) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left(\frac{k}{p} \right) \right) \left(\left(\frac{qk}{p} \right) \right) \quad (23)$$

と定義される. ここに $((x))$ は $((x)) := x - [x] - 1/2$ ($x \notin \mathbf{Z}$), $((x)) := 0$ ($x \in \mathbf{Z}$) によって定義される絶対値が $1/2$ 未満の実数を表している. 式 (23) は 19 世紀に, その名の如く Dedekind によって導入されたものであるが, 彼の動機は, いわゆる Dedekind-エータ関数

$$\eta(\tau) = e^{2\pi i/24} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad (\tau \in \mathcal{H})$$

の Möbius 変換 $\gamma(\tau) = (c\tau + d)/(a\tau + b)$ ($ad - bc = 1$) による変動を正確に記述するためであった. その答えは次式のようになる;

$$\eta(\gamma\tau) = \exp \left(\left(\frac{1+d}{12c} - s(c, d) \right) \pi i \right) \sqrt{-i(c\tau + d)} \eta(\tau).$$

ここに平方根の枝は, 実軸の正部分では正になるようにとられている.

Dedekind はこの変換則とあわせて, もう一つの重要な式である, 相互律

$$s(p, q) + s(q, p) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q} + \frac{1}{pq} \right) \quad (24)$$

を証明した。(24)式は、例えばこれから平方剰余の相互律の簡明な別証明が得られること一つをとってみても豊かな式であることに間違いはないが、本稿においても、格段の重要な役割を演ずる。

さてエータ関数 $\eta(\tau)$ は、その 24 乗が重さ 12 のモジュラー形式になることから、保型形式論における重要性は論を待たないが、 $\eta(\tau)$ とあわせ、Dedekind 和 $s(p, q)$ それ自身も、歴史的に数論家の興味を引き続けてきたようである。

その中の一人 Rademacher は、おそらく $s(p, q)$ を愛した最右翼の数学者の一人と思われるが³、彼が証明した公式のうちの一つに cotangent 和公式

$$s(p, q) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{p-1} \cot \frac{\pi k}{p} \cot \frac{\pi qk}{p} \quad (25)$$

がある。20 世紀後半に入り、Dedekind 和は式 (25) を通じて、今度は幾何学の分野に登場する。それは同変指数定理、つまり群作用を許容する指数定理の中で、一般化された「Lefschetz 数」としての役割を担うことになるからである。この方面は、現代では非常な一般論が発達しているところであるが、次節では以後の議論に必要となる特殊な状況にのみ限定して、その成果の一端を復習してみる。

7 複素曲面上の同変符号数定理

M をコンパクト複素曲面とし、 M には位数 n の巡回群 $G = \mathbf{Z}/(n)$ が正則に作用しているとする。この状況下で、Atiyah-Singer の同変符号数定理 ([AS, §6]) と呼ばれているものを復習しよう。

各 $g \in G$ に対し、 g -作用の固定点集合を $M^g = \coprod_j P_j \coprod_k D_k$ とする。ここに $\{P_j\}$ は孤立固定点集合、 $\{D_k\}$ は (必然的に非特異な) 複素曲線の固定点跡である。点 P_j の接空間 $T_{P_j, M}$ への g -作用は

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \cos \beta_j & -\sin \beta_j \\ \sin \beta_j & \cos \beta_j \end{pmatrix}$$

の形であるとしてよい。つまり g は、 P_j 中心の複素座標系に局所的には α_j 回転と β_j 回転の直和として作用している。同様に g は、 D_k の法束 $N_{D_k/M}$ に θ_k 回転で作用してるとしてよい。

今、 $H := H^2(M, \mathbf{Q})$ 上の交叉形式 $H \times H \rightarrow \mathbf{Q}$ に関する正および負の固有空間への直交分解 $H = H_+ \oplus H_-$ を考える。このとき g -作用のトレースの差 $\text{sign}(g, M) := \text{trg}|_{H_+} - \text{trg}|_{H_-}$ について、

$$\text{sign}(g, M) = - \sum_{P_j} \cot \frac{\alpha_j}{2} \cot \frac{\beta_j}{2} + \sum_{D_k} \text{cosec}^2 \frac{\theta_k}{2} \cdot c_1(N_{D_k/M})^2 \quad (26)$$

³彼の死後、弟子の Grassward が遺稿を整理して出版した [RG] は今でもこの方面の座右の書の一つになっている。

が成り立つ ([AS, p.585]).

さて、商空間 M/G は自然に正規解析空間の構造を持つが、位相的には有理ホモロジー多様体と見ることができるので、交叉形式 $H^2(M/G, \mathbf{Q}) \times H^2(M/G, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ が well-defined である。その符号数を $\text{Sign}(M/G)$ と書くとき、容易に (しかしやや大げさに言えば Grothendieck の原理より)

$$\text{Sign}(M/G) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{sign}(g, M)$$

となる。 M 上の通常の符号数は恒等写像 id に対する g -符号数に一致する、つまり $\text{Sign}(M) = \text{Sign}(\text{id}, M)$ であるので、

$$\text{Sign}(M/G) - \frac{1}{n} \text{Sign}(M) = \frac{1}{n} \sum_{g \neq \text{id}} \text{sign}(g, M) \quad (27)$$

を得る。

式(26), (27) を知っている人が、式(25) を眺めれば、孤立固定点の寄与に関して Dedekind 和が登場することはすぐ見て取れる。それに最初に気づいたのは Hirzebruch [Hi] であろうと思う。[Hi] では非孤立固定点の寄与も同時に計算されている。これらをあわせると次のようになる：

G に関する isotropy 群が非自明な孤立点の軌道の集合を $\{\overline{P}_j\}$ とする。各 \overline{P}_j に対し、次の性質を満たす自然数の三つ組み $(m(\overline{P}_j), \lambda(\overline{P}_j), \delta(\overline{P}_j))$ が唯一定まる；軌道 \overline{P}_j は、 $m(\overline{P}_j)$ 個の相異なる点よりなり、 G の生成元 g_0 はこれらを巡回的に置換する。元 $g_0^{m(\overline{P}_j)}$ はこれら各点を固定し、その接空間に $\exp(2\pi i/\lambda(\overline{P}_j)) \oplus \exp(2\pi i\delta(\overline{P}_j)/\lambda(\overline{P}_j))$ 回転で作用する。(ただし、これは各点で原始 $\lambda(\overline{P}_j)$ 乗根を 入れ替えて正規化した形に書いたものである。) また $\{D_k\}$ を、そこでの安定化群 $\text{Stab}_G(D_k)$ が非自明な複素曲線の集合とし、 $n(D_k)$ を群 $\text{Stab}_G(D_k)$ の位数とする。このとき、

$$\text{Sign}(M/G) - \frac{1}{n} \text{Sign}(M) = -4 \sum_{\overline{P}_j} s(\delta(\overline{P}_j), \lambda(\overline{P}_j)) + \sum_{D_k} \frac{n(D_k)^2 - 1}{3n} \cdot c_1(N_{D_k/M})^2 \quad (28)$$

となる。式(28) は Hirzebruch-Zagier [HZ, p.181] Theorem 2 を、我々に使いやすい形に書き直したものである。

8 Orbifold 版同変符号数定理の一例

本稿では実際用いるのは、前節の M が非特異な複素曲面のときではなくて、これ自身が A 型有理 2 重点を持つ解析曲面の場合である。この特異点は商特異点であるので、 M 自身が orbifold (複素 V -多様体) である。これに巡回群 $G = \mathbf{Z}/(n)$ が正則に作用している場合、つまり orbifold 間の写像 $\phi: M \rightarrow M/G$ に対して、式(28)にあたるものが必要である。

その処方箋は現代幾何では Dirac 作用素 (符号数作用素もその範疇に属す) に対する局所指数定理として整備されている (川崎 [Ka], Vergne [Vi]). その方法を一言で言うと, 局所一意化写像を通じて局所的に非特異多様体間の状況と比べて比較し, それを global に patch して良いということである⁴. つまり次のようにすればよい:

M/G の orbifold chart $\{\tilde{U}_\alpha \rightarrow U_\alpha, \tilde{G}_\alpha = \text{Gal}(\tilde{U}_\alpha/U_\alpha), M/G = \bigcup_\alpha U_\alpha\}$ を以下のようにとる. $\phi^{-1}(U_\alpha) = \coprod_\beta V_{\alpha,\beta}$ とし, $V_{\alpha,\beta}$ の局所一意化 $\tilde{V}_{\alpha,\beta}$ が \tilde{U}_α と一致し, 且つ一意化写像が U_α のそれを factor するようにとれる. そうして $\tilde{H}_{\alpha,\beta} = \text{Gal}(\tilde{V}_{\alpha,\beta}/V_{\alpha,\beta})$ が \tilde{G}_α の部分群であり, 群 $\tilde{G}_\alpha/\tilde{H}_{\alpha,\beta}$ についての商写像 $V_{\alpha,\beta} \rightarrow U_\alpha$ が写像 $\phi: M \rightarrow M/G$ の $V_{\alpha,\beta}$ への制限であるようにする:

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{U}_\alpha = \tilde{V}_{\alpha,\beta} & \\
 \tilde{G}_\alpha \text{ の商} \swarrow & & \searrow \tilde{H}_{\alpha,\beta} \\
 U_\alpha & \xrightarrow{\tilde{G}_\alpha/\tilde{H}_{\alpha,\beta} \text{ の商} = \phi|_{V_{\alpha,\beta}}} & V_{\alpha,\beta}
 \end{array} \tag{29}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 & \text{Sign}(M/G) - \frac{1}{n} \text{Sign}(M) \\
 &= \sum_g \int_{\tilde{U}_\alpha} \tilde{\rho}_\alpha \cdot \frac{1}{\#(\tilde{G}_\alpha)} \left\{ \sum_{g \in \tilde{G}_\alpha} \text{sign}(g, \tilde{U}_\alpha) - \sum_\beta \sum_{h \in \tilde{H}_{\alpha,\beta}} \text{sign}(h, \tilde{V}_{\alpha,\beta}) \right\} \tag{30}
 \end{aligned}$$

となる. ここに $\{\tilde{\rho}_\alpha\}$ は M 及び M/G に射影したときそれぞれ 1 の分割となる $0 \leq \tilde{\rho}_\alpha \leq 1$ を満たす \tilde{U}_α 上の C^∞ 関数である.

(30) 式の右辺は (27), (28) 式を局所化して計算できる. つまり孤立固定点に関しては, M/G の持つ Dedekind 和と, 対応する M の孤立特異点 (我々の状況では, これは A 型有理 2 重点なので簡単) の持つ Dedekind 和の差が寄与し, また非孤立固定点跡に関しては, (28) 式の $c_1(N_{D_k/M})^2$ を orbi-bundle としての法束の Chern 数と思って計算すればよい. 我々の状況下での, この具体的計算を §10.4 で与える.

9 Valency の寄与

前節までで準備ができたので, 本論に入る. 本節では Nielsen-松本-Montesinos のモノドロミーの情報のうち, valency からくる Dedekind 和を求める. ここでは他の状況にも応用できるように, 最初に純粹に (初等) 整数論的な計算を行い, その後に幾何的意味づけを与える.

⁴筆者はこの方面の一般論に詳しくないので, ここでは我々の扱う特殊な状況に限って, 直接考察している. 文中の説明は一般論としては成り立たないことかもしれないので, その場合はご容赦下さい. 専門家の方で, 何かお気づきの点があればお教えください.

9.1 整数論的な準備

(λ, σ) を $1 \leq \sigma \leq \lambda - 1$ を満たす互いに素な自然数とする. λ/σ の負型連分数展開

$$\frac{\lambda}{\sigma} = K_1 - \frac{n_2}{\sigma} = K_1 - \frac{1}{K_2 - \frac{n_3}{n_2}} = \cdots = K_1 - \frac{1}{K_2 - \frac{1}{K_3 - \cdots - \frac{1}{K_r}}} \quad (31)$$

を考える. 本稿ではスペースの節約のため $\text{NCF}(K_1, K_2, \dots, K_r)$ とかく. (NCF は negative continuous fraction の略) しかしこの答えだけではなく, 途中計算に現れる数, $n_0 := \lambda$, $n_1 := \sigma$, $n_2, n_3, \dots, n_{r-1} = K_{r-1}n_r, n_r = 1$ ($n_{i+1} = K_i n_i - n_{i-1}$) も重要であって, この列をここでは連分数展開 (31) の重複度列と呼ぶことにする.

さて相互律 (24) より, $s(\sigma, \lambda) + s(\lambda, \sigma) = -1/4 + (\sigma/\lambda + \lambda/\sigma + 1/\lambda\sigma)/12$ を得るが, $\lambda = K_1\sigma - n_2$ より, $s(\lambda, \sigma) = s(-n_2, \sigma) = -s(n_2, \sigma)$ であるから,

$$s(\sigma\lambda) = s(n_2, \sigma) - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{n_2}{\sigma} + K_1 + \frac{1}{n_0 n_1} \right)$$

となる. これで $\lambda/\sigma = K_1 - n_2/\sigma$ のところを処理したと思つて, 次の $\lambda/\sigma = K_1 - 1/(K_2 - n_3/n_2)$ を用いて, $s(n_2, \sigma)$ に対して再び相互律を用いることにより,

$$s(\sigma\lambda) = s(n_2, n_3) - \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{n_3}{n_2} + K_1 + K_2 + \frac{1}{n_0 n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} \right)$$

を得る. これを進めて連分数全体を使い切ると,

$$s(\sigma, \lambda) = s(1, K_r) - \frac{r-1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{1}{K_r} + \sum K_i + \sum \frac{1}{n_{i-1} n_i} \right) \quad (32)$$

となる. ここで [MM1] 中の次の Lemma に注目する:

Lemma 9.1 δ を $\sigma\delta \equiv 1 \pmod{\lambda}$, ($1 \leq \delta \leq \lambda - 1$) を満たす自然数とする. このとき

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{n_{i-1} n_i} = \frac{\delta}{\lambda}.$$

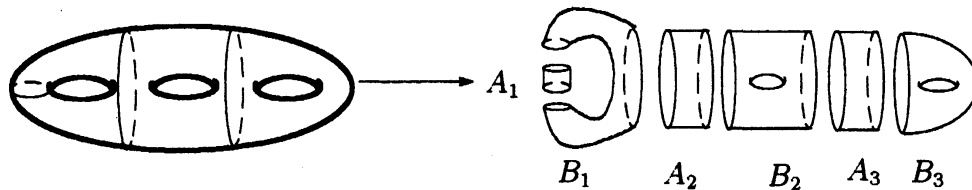
Lemma 9.1 と直接計算により得られる $s(1, K_r) = (K_r - 1)(K_r - 2)/12K_r$ とあわせると, (32) 式より次の Lemma を得る.

Lemma 9.2

$$s(\sigma, \lambda) = -\frac{r}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma + \delta}{\lambda} + \sum_{i=1}^r K_i \right).$$

9.2 幾何の観点から

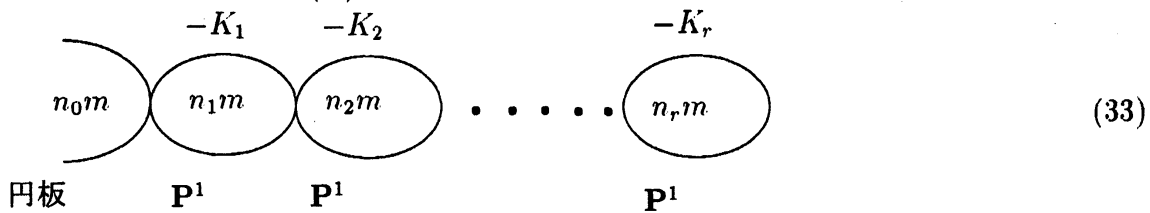
幾何的状況を説明する. Σ_g を種数 g のリーマン面として, $\mu: \Sigma_g \rightarrow \Sigma$ を負型擬周期写像とする. $\Sigma_g = A \cup B$ を, μ に応ずる許容単純閉曲線のアニュラス近傍 $A = \coprod A_j$ 及び, body 部分 $B = \coprod B_k$ への分解とする (下図).



B 内の重複点 (multiple point) P での valency (Nielsen [Ni1]) を $(m(P), \lambda(P), \sigma(P))$ とする. P に対応する [MM1] の一般商空間 Σ_g/μ の「部品」は次のように構成される. $\lambda = \lambda(P)$, $\sigma = \sigma(P)$ とし, λ/σ を (31) のように連分数展開して重複度列 $n_0, n_1, \dots, n_r = 1$ を作る. こうして, いったん重複度 n_0 の円板に, 重複度 n_1, n_2, \dots, n_r の球面 \mathbf{P}^1 の列を次々に transversal につなげた空間



を作る. これを $m = m(P)$ 倍して



としたものが, その部品である.

μ を a-priori に与えて退化族 $\rho: S \rightarrow \Delta = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < 1\}$ をつくる [MM1] の構成は, 一般商空間 Σ_g/μ がちょうど特異ファイバー $F = \rho^{-1}(0)$ になるように作られる. このとき (33) 中の \mathbf{P}^1 たちは F の成分の一部となって, この重複度を持つ. また連分数展開で得られた $\{K_i\}$ は, この順で r 個の \mathbf{P}^1 の S 内での自己交点数の絶対値を与える.

ところでこの構成を可能にしているのは次の観察である. P の Σ_g 内での小円板近傍 D_p をとる. 集合として $\mu^m(D_p) = D_p$ となるが, 写像 μ^m は D_p を角度 $2\pi\delta/\lambda$ だけ回転させる. (ここに δ は Lemma 9.1 中のもの.) 一方 (33) が特異ファイバー中に実現できるとすると, r 個の node に応ずる一般ファイバーの消滅サイクルの各アニュラス近傍で $2\pi/n_{i-1}n_i$

回転がおこる ([MM, II §8]). これらの回転を足し合わせると, D_p の回転に一致しなければならない, つまり

$$2\pi \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{n_{i-1}n_i} = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

とならなければならない. このことを保証しているのが Lemma 9.1 の役割である.

この場面に限らず, 連分数から生ずる $\sum 1/n_{i-1}n_i$ の形の和は [MM1] に頻繁に登場して縁の下の力持ちのような役割を果たす. 本稿ではこの和を「MM 分母和」と呼ぶことにしよう. (勿論ここで果たす役割を考慮したうえでのことでもある.)

なお, 特異点論的には, この構成は $A_{\lambda, \delta}$ 型巡回商特異点⁵ の Hirzebruch-Jung 解消 (cf. [BPV, p.80]) をしていることに他ならない. これは勿論偶然ではなくて, 与えられた退化族の安定還元族の巡回群による商空間は, valency と 1 対 1 に対応するこの型の特異点を必ず持つからである. このことは次節で再度述べる.

10 Screw 数の寄与

ここでは NMM 情報のうち, アニュラス部分の持つ screw 数及び境界成分の valency から生ずる Dedekind 和の計算を行なう. 前節と同じく最初に数値的情報のみを抜き出して整数論的計算を行い, 後で幾何的意味づけを与える.

10.1 初等整数論的考察

$i = 1, 2$ について, (λ_i, σ_i) を $1 \leq \sigma_i \leq \lambda_i - 1$ をみたす互いに素な自然数とする. δ_i を $\sigma_i \delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$, $1 \leq \delta_i \leq \lambda_i - 1$ をみたす自然数とし, また, σ'_i を $\sigma_i \delta_i = \sigma'_i \lambda_i + 1$ によって定義しておく. 今 \mathbf{K} を非負整数とし,

$$\mathbf{s} := -\frac{\delta_1}{\lambda_1} - \frac{\delta_2}{\lambda_2} - \mathbf{K} \quad (34)$$

とにおいて, $(\lambda_i, \sigma_i)_{i=1,2}$ 及び \mathbf{K} から生ずる screw 数とよぶ. さて,

$$\frac{\lambda_1}{\sigma_1} = \text{NCF}(K_1, K_2, \dots, K_r), \quad \frac{\lambda_2}{\sigma_2} = \text{NCF}(L_1, L_2, \dots, L_{r'}) \quad (35)$$

を連分数展開とし, これから生ずる重複度列をそれぞれ $\{n_1, \dots, n_r\}$ 及び $\{m_1, \dots, m_{r'}\}$ とする. 我々は (35) と \mathbf{K} から生ずる次の連分数を考える:

$$(*) := \text{NCF}(K_1, K_2, \dots, K_{r-1}, \underbrace{(K_r + 1), 2, \dots, 2}_{\mathbf{K}-1}, (L_{r'} + 1), L_{r'-1}, \dots, L_2, L_1) \quad (36)$$

⁵ ξ を原始 λ 乗根とし, \mathbb{C}^2 の自己同型 $g_0: (Z_1, Z_2) \mapsto (\xi Z_1, \xi^\delta Z_2)$ の生成する巡回群 $G_0 = \langle g_0 \rangle$ による商空間 \mathbb{C}^2/G_0 の持つ特異点をこうよぶ.

Lemma 10.1 ([MM1], [Tak], [To])

(i) 連分数 (*) の重複度列は

$$\{n_0, n_1, \dots, n_r, \underbrace{1 \cdots 1}_{\mathbf{K}-1}, m_{r'}, m_{r'-1}, \dots, m_1, m_0\}$$

である. この重複度列に対しての MM 分母和は screw 数 s に一致する.

(ii) $d = -\lambda_1 \lambda_2 s$, $v = \sigma_1 \delta_2 + \lambda_2 \sigma'_1 + \sigma_1 \lambda_2 \mathbf{K}$ とおくととき, 連分数 (*) の値は d/v に等しい.

Lemma 10.1 と Lemma 9.2 より次が成り立つことがわかる.

Lemma 10.2 $v^* = \sigma_2 \delta_1 + \lambda_1 \sigma'_2 + \sigma_2 \lambda_1 \mathbf{K}$ とおくととき;

$$(i) s(v, d) = \frac{1}{4} (r + r' + \mathbf{K} - 1) + \frac{1}{12} \left(\frac{v + v^*}{d} + \sum_{i=1}^r K_i + \sum_{i=1}^{r'} L_i + 2\mathbf{K} \right),$$

$$(ii) s(v, d) - s(\sigma_1, \lambda_1) - s(\sigma_2, \lambda_2) = \frac{1}{12} \left\{ s - \frac{1}{d} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right\} + \frac{1}{4}.$$

10.2 幾何的考察から

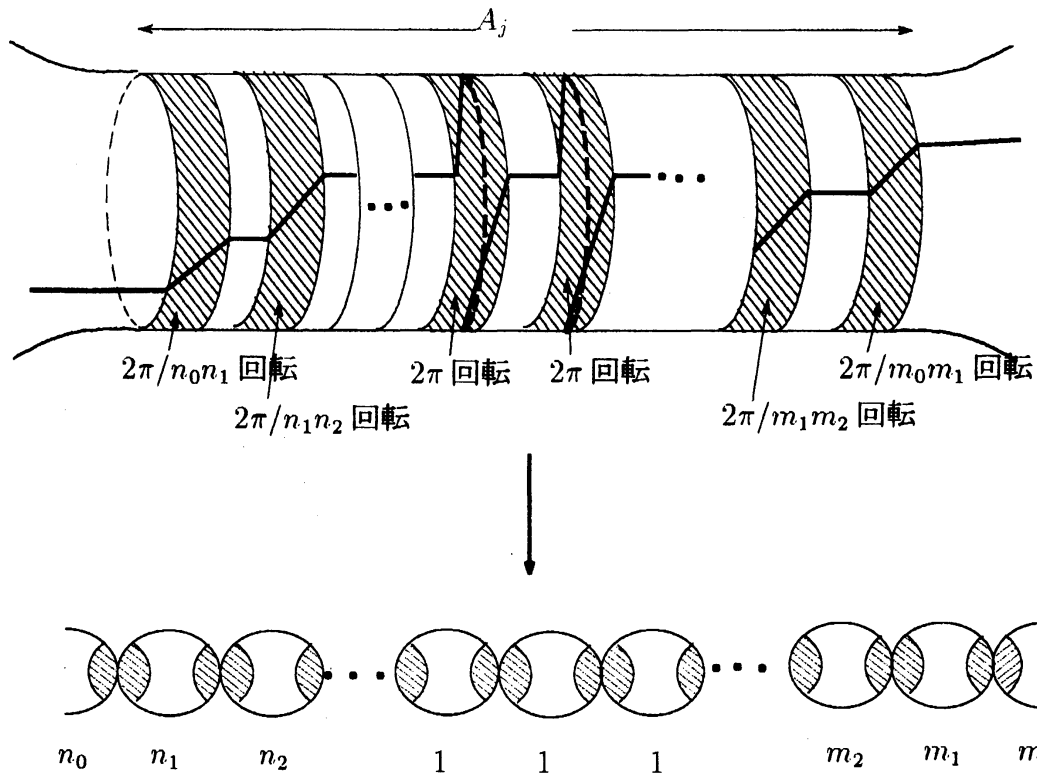
幾何的説明を加える. 前節での擬周期写像 μ から生ずる分解 $\Sigma_g = A \cup B$ において, A の連結成分のうちの non-amphidrome アニュラス A_j を一つとる. A_j での Nielsen の screw 数を $s(A_j)$ とする ([Ni2]). A_j の両側の境界 $\partial A_j = \partial A_j^{(1)} \amalg \partial A_j^{(2)}$ での valency をそれぞれ $(m, \lambda_1, \sigma_1, \delta_1)$, $(m, \lambda_2, \sigma_2, \delta_2)$ とする⁶. このとき, $\mathbf{K} \geq -1$ を満たす整数 \mathbf{K} があって

$$s(A_j) = -\frac{\delta_1}{\lambda_1} - \frac{\delta_2}{\lambda_2} - \mathbf{K} \quad (37)$$

となる ([MM, I §3]). (34) はこの公式 (37) を定義として逆用したものである. (ただし今は $\mathbf{K} \geq 0$ の場合を考えている. $\mathbf{K} = -1$ のときは §10.3 で扱う.)

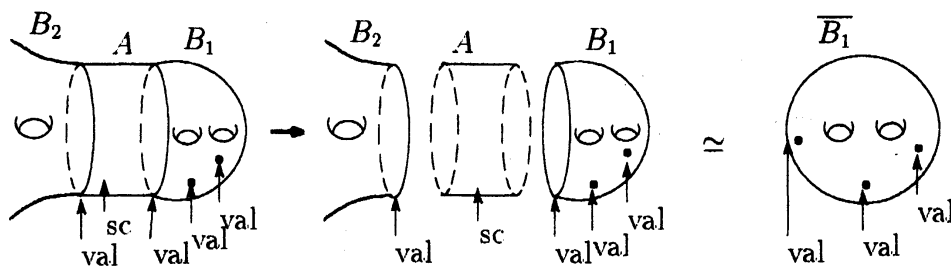
この screw 数を持つアニュラス A_j に対する [MM1] の一般商空間の部品の構成は Lemma 10.1 -(i) の重複度列をもとに次のように行なわれる. (なおこの重複度数列を持つ連分数を逆算してだしたのが (36) の (*) である.) アニュラスを両側から輪切りにしていき, 交互に黒域と白域と呼ばれる, より小さなアニュラス達に分ける. そして白域は恒等写像のままで, 黒域に対して片側から角度 $2\pi/n_{i-1}n_i$ 回転を, もう片側から $2\pi/m_{i-1}m_i$ 回転を順次させていき, 中央部は $\mathbf{K} - 1$ 回転, 整 Dehn twist をさせる. その回転の総和が screw 数に一致している. これが Lemma 10.1-(i) の意味である. そして, 黒域の中心線のみを node につぶして Σ_g/μ の部品を作っていく (下図).

⁶ δ_i は $\sigma_i \delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$, $(1 \leq \delta_i \leq \lambda_i - 1)$ をみたす自然数であるが何度も出てくるので定義の中に組み入れ 4 組とした.



ここは [MM1] の構成のなかでも白眉のところであり piecewise-linear なこの型のアニュラス位相同型写像は超標準形式 (super-standard form) という美しい名前がつけられている。MM 分母和が本質的に寄与する場面であるが、これが Lemma 10.2 の Dedekind 和の計算にも役立つことになった。なおこの部分の構成は、特異点論的には Lemma 10.1-(ii) にある d, v による $A_{d,v}$ 型巡回商特異点の Hirzebruch-Jung 解消をしていることにあたる。このことは前述の高村茂、都丸正両氏の論文にお互いに全く異なる文脈から求められている。valency のときと同様に、non-amphidrome アニュラスと安定還元族の巡回商上のこの特異点が 1 対 1 に対応する。

また Lemma 10.2-(ii) で $s(v, d)$ から両側の valency を持つ Dedekind 和を引いた理由は、単に答えが簡明になるという以上に、次の意図からきている。則ちアニュラスの境界曲線は body 部の境界曲線でもあるわけだが、この境界曲線につけられた valency は body 部の責任分担とさせ、アニュラスの責任は「純粋 screw 数」のみにしようというわけである。body 部成分の total valency は、それにフタをした低種数リーマン面の周期的同相写像の情報と一致するので、種数に関する帰納的扱いを可能にするわけである (下図)。



これを代数幾何的に言えば、安定曲線族全体への群作用の情報から、それを正規化した各成分の持つ群作用を差し引こうということである。

10.3 $K = -1$ の場合

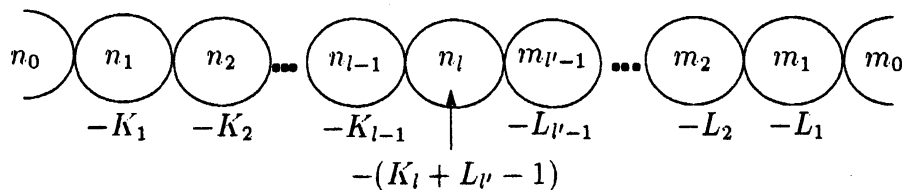
さて $K = -1$ の場合を扱おう。

Lemma 10.3 ([Tak], [MM1]) (35) の連分数展開の重複度列において, $1 \leq l \leq r$, $1 \leq l' \leq r'$ であって

$$(i) \ n_l = m_l, \quad (ii) \ n_{l+1} + m_{l'+1} = n_l$$

を満たすものが唯一存在する。

上の状況で得られる、重複度列および自己交点数列は次のようになる (これが一般商空間の部品である) :



これから得られる連分数, つまり $NCF(K_1, K_2, \dots, K_{l-1}, K_l + L_{l'} - 1, L_{l'+1}, \dots, L_1)$ の値は Lemma 10.1-(ii) の d, v で形式的に $K = -1$ とおいたときの d/v に一致する. さて条件 $\delta_1/\lambda_1 + \delta_2/\lambda_2 \geq 1$ の下で $s[-1] = -\delta_1/\lambda_1 - \delta_2/\lambda_2 + 1$ とおく. これが $K = -1$ のときの screw 数である. ここで

$$\mathcal{E}[-1] = \frac{1}{12} \left\{ \sum_{i=l+1}^r (3 - K_i) + \sum_{i=l'+1}^{r'} (3 - L_i) - 2 \right\} \quad (38)$$

とおく. このとき;

Lemma 10.4

$$s(v, d) - s(\sigma_1, \lambda_1) - s(\sigma_2, \lambda_2) = \frac{1}{12} \left\{ s[-1] - \frac{1}{d} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right\} + \frac{1}{4} + \mathcal{E}[-1].$$

つまり Lemma 10.2 と比較して, $\mathcal{E}[-1]$ の補正項が付いた. この証明は, 連分数展開の途中までで, 相互律の使用を止める点が少しテクニカルである.

10.4 まとめ

同じ状況で、もう一つだけ Lemma を与える. $c = \gcd(\lambda_1, \lambda_2)$, $d' = d/c$, $\lambda'_i = \lambda_i/c$, ($i = 1, 2$) とおき, さらに

$$\begin{aligned} \alpha &= -4s(v, d) + 4s(\sigma_1, \lambda_1) + 4s(\sigma_2, \lambda_2), \\ \beta &= -\frac{4c}{\lambda_1\lambda_2} \cdot s(d' - 1, d'), \\ \gamma &= \frac{c}{\lambda_1\lambda_2} \left(\frac{\lambda_1^2 - 1}{3} + \frac{\lambda_2^2 - 1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{d'} \right), \end{aligned} \tag{39}$$

とおく. また次のようにおく.

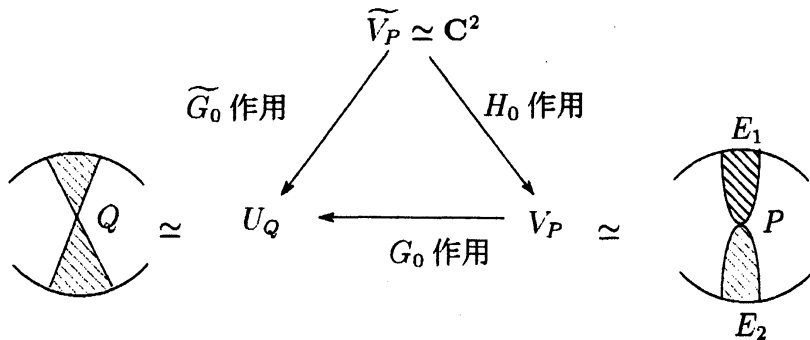
$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \mathbf{K} \geq 0 \text{ のとき} \\ -4\varepsilon[-1] & \mathbf{K} = -1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{40}$$

Lemma 10.5

$$\alpha - \beta + \gamma = \frac{c}{\lambda_1\lambda_2} - 1 + \varepsilon.$$

この Lemma の幾何的意味を述べる. §10.2 で触れた non-amphidrome アニュラス A_j に 1 対 1 で対応する安定還元族の商空間上の特異点 $A_{d,v}$ の生じ方を, 局所的に描写すると以下のようなになる (cf. [Tak]):

安定還元族の特異ファイバーである安定曲線 C の node P は, 族の上で $A_{d'-1}$ 型有理 2 重点を持っており, この近傍 V_P に位数 $(\lambda_1\lambda_2)/c$ の巡回群 G_0 が作用している. その商写像を $\phi: V_P \rightarrow V_P/G_0 := U_Q$ とすると, 点 $Q = \phi(P)$ のところにこの $A_{d,v}$ 型特異点がある. 今, d' 次巡回群 H_0 をガロア群に持つ局所一意化写像 $\tilde{V}_P \rightarrow V_P$ によって G_0 を lift したものを \tilde{G}_0 とする (下図).



これはまさに図式 (29) の状況であって, orbifold 同変符号数定理が適応できる状況である. このとき, 孤立固定点に関しては \tilde{G}_0 作用の寄与は (28) 式の如く $-4s(v, d)$ であり, これは (39) の α 項に関与する. H_0 寄与は $-4s(d' - 1, d')$ であり β 項にあたる. また $C|_{V_P}$ の局所既約成分 E_1, E_2 によって $P = E_1 \cap E_2$ となっているとすると, 各 E_i は非孤立固

定跡になり、点 P の orbi-法束の Chern 数寄与は $-1/d'$ であって、 γ 項にカウントされる。(ただし、 α 項については、両側の valency からくる Dedekind 和を §10.2 で述べた理由で差し引いた。)

こうして与えられた退化族の、安定還元族への群作用にかんする符号数の変化量に、このアニュラス A_j が与える「純正効果」を計算したのが Lemma 10.5 である。筆者は実はこの値に、 A_j の持つもつとも本質的な不変量と思える screw 数がどう寄与するかと思って計算したのだが、答えはそれを含まない実にシンプルな形となった。この不思議さを反語的に強調するため、本節の表題を取って「screw 数の寄与」のままにしておいたのである。

11 安定還元による符号欠損数

11.1 安定還元と NMM 情報

S を非特異コンパクト複素曲面、 B を閉リーマン面とし、正則写像 $f: S \rightarrow B$ は種数 $g \geq 2$ の代数曲線族を与えると仮定する。

$\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{B}$ を f の最小安定還元とし、 n をそのような \tilde{f} を与える底空間の分岐被覆写像 $\tilde{B} \rightarrow B$ の次数とする。具体的に n は次のように与えられる：

f の特異ファイバーの集合を $\{F_\alpha\}$ ($F_\alpha = f^{-1}(P_\alpha)$, $P_\alpha \in B$) とする。各 F_α に対し、このまわりの局所位相モノドロミー写像を与える負型擬周期写像の代表元を $\mu_\alpha: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ とする。数 $n(\mu_\alpha)$ を μ_α の周期とする。つまり $\Sigma_g = A_\alpha \cup B_\alpha$ を μ_α から決まる §9 で述べたアニュラス部及び body 部への分解とすると、 $n(\mu_\alpha)$ は $(\mu_\alpha|_{B_\alpha})^{n(\mu_\alpha)} \sim \text{id}_{B_\alpha}$ (isotopic) を満たす最小の自然数である。このとき、これら $\{n(\mu_\alpha)\}$ たちの最小公倍数が n に一致している。このことは [MM1] の簡単な帰結の一つである (cf. [AI])。なお蛇足ながら、通常安定還元定理の証明法 (cf. [BPV, p.94]) で得られる被覆次数は、この最少数 n とは似ても似付かぬ大きな値になることを注意しておきたい。(これらのことは、[AI] の共著者の石坂氏との議論の中から体得していったことである。)

安定還元族 \tilde{S} の構成は $\{P_\alpha\}$ たちにさらに必要ならダミー点 P_0 (これは非臨界点) を加え、 $\{P_\alpha\}$ と P_0 で分岐する n 次巡回被覆 $\tilde{B} \rightarrow B$ をつくり $S \times_B \tilde{B}$ の適当な双有理モデルをとることにより得られる (しかし P_0 での符号数変化量への寄与は 0 なので今は無視してよい)。

このとき、 \tilde{S} が複素 2 次元であることから、 n 次巡回群 $G = \mathbf{Z}/(n)$ は \tilde{S} に正則に作用する。本節では前節までの結果を踏まえて、 $\text{Sign}(\tilde{S}/G) - \text{Sign}(\tilde{S})/n$ の値を、 $\{\mu_\alpha\}$ たちの持つ NMM 情報によって具体的に書き下す。なお本来の目標は勿論 $\text{Sign}(S) - \text{Sign}(\tilde{S})/n$ の値であるが、差 $\text{Sign}(S) - \text{Sign}(\tilde{S}/G)$ については (ここでは説明を略するが) 序論で述べたように簡単にもとまる。したがって本来の目標も達せられることになる。

11.2 Defect 公式

我々の主張を定式化するために、各特異ファイバー F_α に対して、「安定符号欠損数」 $\partial\mathcal{S}(F_\alpha)$ なる量を定義しよう。

まず μ_α に関する body 部 B_α 上の、全ての重複点及び境界曲線の連結成分上に与えられている valency の集合を $\{m_i, \lambda_i\sigma_i, \delta_i\}$ とする。また $\lambda_i/\sigma_i := \text{NCF}(K_1(i), K_2(i), \dots, K_{r(i)}(i))$ とおく。 $r(i)$ は連分数の長さである。次に $A_\alpha = \coprod_j A_j \coprod_k \widetilde{A}_k$ を non-amphidrome アニュラス $\{A_j\}$ 及び amphidrome アニュラス $\{\widetilde{A}_k\}$ への分解とする。 A_j の2つの境界成分上の valency をそれぞれ $(m(A_j), \lambda_1(A_j), \sigma_1(A_j), \delta_1(A_j))$ 及び $(m(A_j), \lambda_2(A_j), \sigma_2(A_j), \delta_2(A_j))$ とする。 $\mathcal{E}(A_j)$ を (40) で定義された量とする。また、 \widetilde{A}_k の境界成分の valency を $(m(\widetilde{A}_k), \lambda(\widetilde{A}_k), \sigma(\widetilde{A}_k), \delta(\widetilde{A}_k))$ とする (amphidrome アニュラスでは両側の valency は一致している。)

Definition 11.1

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{S}(F_\alpha) := & \sum_i \left\{ r(i) - \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_i + \delta_i}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{r(i)} K_j(i) \right) \right\} \\ & + \sum_{A_j} \left\{ \frac{\gcd(\lambda_1(A_j), \lambda_2(A_j))}{\lambda_1(A_j)\lambda_2(A_j)} - 1 + \mathcal{E}(A_j) \right\} + \sum_{\widetilde{A}_k} \left\{ \frac{1}{\lambda(\widetilde{A}_k) - \frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Theorem 11.2

$$\text{Sign}(\widetilde{S}/G) - \frac{1}{n} \text{Sign}(\widetilde{S}) = \sum_{F_\alpha} \partial\mathcal{S}(F_\alpha).$$

定理の証明については、実質的な部分はすでに前節までに現れているので、全局的なスケッチのみを行なう。

F_α より安定還元される \tilde{f} 内の安定曲線 C_α について、これの node の集合を $\{P\}$ 、 C_α の一般の集合を $C_\alpha^{(0)} = C_\alpha \setminus \coprod\{P\}$ とする。

$C_\alpha^{(0)}$ 上にある G に関する isotropy 群の非自明な点の集合 $\{Q\}$ は、 F_α のモノドロミー写像 $\mu_\alpha: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ による §9.2 の分解 $\Sigma_g = A_\alpha \cup B_\alpha$ において、body 部 B_α 上の重複点 $\{\overline{Q}\}$ と1対1に対応する。さらに Q の近傍での G -作用は \overline{Q} での valency (m, λ, σ) を用いて書かれる、 $A_{\lambda, \sigma}$ 型巡回商特異点を生ずる局所作用に一致する。

また C_α の node の集合 $\{P\}$ は、 A_α の連結成分の集合と1対1に対応する。この対応で non-amphidrome アニュラスに対応する node P の近傍への G 作用は (適当な descend の後に)、§10 で与えた $A_{d, v}$ 型巡回商特異点を生ずる局所作用に一致する。

以上のことと、Lemma 9.2 (実際はこれを (-4) 倍しなければならない。(28) 式参照) 及び Lemma 10.5 より、amphidrome アニュラス部の寄与以外の主張は明らかである。

Amphidrome アニュラスに対応する node P への作用は「valency を2倍にした non-amphidrome アニュラス + involution」の問題と考えるので ([MM1] [Tak]), non-amphidrome の結果にすこし修正を加えるだけで出てくる。以上が証明のアウトラインである。

なお \tilde{S} への G 作用の記述は本質的に [Tak] でなされているものの⁷, [Tak] の目的は別のところ (線形退化の構成) にあるので, 本稿で必要な安定還元族からの元の曲線族の再構成という部分について少し議論を補充する必要がある.

11.3 エピローグ

最後に私事におよんで誠に恐縮であるが, 本章の内容を考えるに至った経緯を有体に述べ, 結びとさせていただきます.

ファイバー芽の局所符号数と, モノドロミーの Dedekind 和に関連性があること自体は, 以前から気づいていたことで, 他の集会等で話させていただいたこともある. (cf. [A1]) しかし, これが explicit に計算可能であることが分かったのはごく最近のことである.

その直接のキッカケになったのは, 昨年末, 私とは旧知の間柄であり, 複素曲面特異点の専門家である都丸正氏の訪問を受けた時に始まる. 氏が研究中的内容につき, 熱心にお話いただいたのであったが, そのなかで負型連分数が登場し, 良い働きをしていたことが, 鮮やかで印象的であった.

ここで負型と敢えて強調しているのは, 本章でもすでにしばしば登場しているように, 例えば $12/5 = 3 - 1/(2 - 1/3)$ とすることであり, $12/5 = 2 + 1/(2 + 1/2)$ とする正型連分数と区別して呼んでいるのである. 曲面特異点でこの型の連分数が出てくること自体は, 特にめずらしいことではなく, むしろそれをどう使いこなすかという点に, 専門家の技術の一端が発揮される面もある.

さて都丸氏が帰られたあと, まだその余韻の残る中で, 私は, 最近ではほとんど脳裏を去ることがないと言っていい, ファイバー芽の局所不変量の問題に再び立ち戻っていった.

しかし, そのとき, 不思議な事に気が付いた. それは, 私はまだ「負型では Dedekind 和を計算していない」ということであった. 私の研究ノートに Dedekind 和の数値計算は散在しているのだが, 例えば $s(5, 12)$ を計算する際, $s(5, 12) + s(12, 5) = s(5, 12) + s(2, 5) = -1/4 + (1/5 + 1/12 + 1/60)/12$ と相互律 (24) を用い, 次に $s(2, 5)$ に対して同様にする. つまり $12/5 = 2 + 2/5 = \dots = 2 + 1/(2 + 1/2)$ を用いており, 決して一度も $s(5, 12) + s(12, 5) = s(5, 2) + s(-3, 5) = \dots$ という風に $12/5 = 3 - 3/5 = \dots = 3 - 1/(2 - 1/3)$ を用いてないことである.

これは誠に異なることである. 私は 90 年代は複素曲面特異点の研究者の末席をけがす者の一人であり, 都丸氏と同様, 負型連分数には勿論親しんでいる. 今, 退化代数曲線族の研究においても, こういう特異点は沢山出てきている. 正型と負型の意味合いの違いを十分認識しているはずの私が, 今回ばかりはなぜ, 正型連分数を用いているのであろう? なんと人間の知恵の浅はかであることよ! (ここで私自身の浅はかさを人類全体に拡張したことをお許しいただきたい.)

このことにやっと気づいた夜, 私は初めて負型連分数を用いて Dedekind 和を計算してみた. そうすると, 相互律の末尾項 ((24) 式の $1/pq$ のこと) が重なりあい, どこかで見たこ

⁷今吉洋一氏 [Im] の中にも, 関連する, 別の立場での研究がなされている.

とのある数列が現れたではないか！これこそ松本-Montesinos[MM1] 両氏が多用していた、そして本稿で「MM 分母和」で呼ばせていただいた、その独特の姿であった。

あとは、スルスルスル、スルスルスルと話が進んで、本稿の様になった。特に種数に関する induction を可能にする「アニュラス純正効果」(Lemma 10.5 のこと)を、非常にシンプルな形で取り出せたことは、気持ちの良いことであった。

さて私は今、始めて「MM 分母和」に巡り合った時の気持ちを、改めて思い出している。それはもう随分と前のことであるが、何と表現してよいか、何だか世の中には“不可思議なもの”があるんだな、という気持ちであったと思う。少なくとも代数幾何出身の私にとって、分数 Dehn twist の重ね合わせという考え方自体、それまで馴染んで来た数学とは異質のものであり、トポロジーというものの“生身の姿”を見せられた思いがしたものであった。しかし年月を経て、その気持ちは心の奥深くに沈殿し、長く意識に上ることはなかった。そうであるから今回のことは、とても突然のように感じられる。例えて言えば、どこかにずっと隠れていた八百万の神様のお一人が、突然目の前に現われ、“やあ”とお声をかけていただいたような、そんな感じがしている.....

References

- [ACV] D. Abramovich, A. Corti and A. Vistori, Twisted bundles and admissible covers, Preprint.
- [AA] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of hyperelliptic pencils I, *Tohoku Math. J.* **53** (2001), 369–394.
- [A1] T. Ashikaga, On local signature of pencils of curves. *R. I. M. S. Kokyu-Roku* **1345** (2003), 203–237. (in Japanese)
- [A2] T. Ashikaga, The behaviour of determinant of cohomology and local signature of pencils of curves under the stable reduction, in: *Algebraic Geometry and Topology of Hodge theory. Degenerations and Complex surfaces* (2004), 140–160. (in Japanese)
- [A3] T. Ashikaga, Examples and the background of smooth critical fiber germs of genus 4, In: *Projective varieties / Projective geometry of Algebraic varieties III + Algebraic curves*, pp.1–11, Symposium report at Waseda Univ. 2004. (in Japanese)
- [AE] T. Ashikaga and H. Endo, Various aspects of degenerations of Riemann surfaces, *Sugaku* **56** (2004), 49–72.(in Japanese)
- [AI] T. Ashikaga and M. Ishizaka, Classification of degenerations of curves of genus 3 via Matsumoto-Montesinos' theorem, *Tohoku Math. J.* **53**(2001), 369–394.
- [AK] T. Ashikaga and K. Konno, Global and local properties of pencil of algebraic curves, in *Algebraic Geometry 2000 Azumino*, ed. by S. Usui et al., *Adv. St. in Pure Math.* **36**(2002), 1–49.

- [AS] M. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators III, *Ann. of Math.* **87**(1968), 546–604.
- [BPV] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, 1984.
- [CC] F. Catanese and C. Ciliberto, Surfaces with $p_g = q = 1$, in; *Problems in the Theory of Surfaces and Their Classification*, Symposia Math. Vol. XXXII (Catanese et al. ed.), Academic Press 1991, pp. 49–79.
- [C] Z. Chen, On the lower bound of the slope of a non-hyperelliptic fibration of genus 4, *Intern. J. Math.*, **4** (1993), 367–378.
- [CT] Z. Chen and S. Tan, Upper bound on the slope of a genus 3 fibration, Preprint.
- [CH] M. Cornalba and J. Harris, Divisor classes associated to families of stable varieties with application to the moduli space of curves, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sp.* **21** (1988), 455–475.
- [DM] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. I. H. E. S.* **36** (1969), 75–110.
- [EH] D. Eisenbud and J. Harris, The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus ≥ 23 , *Invent. Math.* **90** (1987), 359–387.
- [HaMo] J. Harris and I. Morrison, *Moduli of Curves*, Springer, 1998.
- [HaMu] J. Harris and D. Mumford, On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.* **67** (1982), 23–88.
- [Hi] F. Hirzebruch, The signature theorem: reminiscences and recreation, *Prospects in Math.*, *Ann. of Math. Studies* 70,3–31, Princeton Univ. Press, 1971.
- [HZ] F. Hirzebruch and D. B. Zagier, *The Atiyah-Zinger index theorem and elementary number theory*, Publish or Perish, Wilmington, 1974.
- [Ho1] E. Horikawa, On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, a volume dedicated to K. Kodaira, pp. 79–90, Tokyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge University Press, 1977
- [Ho2] E. Horikawa, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2 . I, *Ann. of Math.* **104** (1976), 357–387; II, *Invent. Math.* **37** (1976), 121–155; III, *Invent. Math.* **47** (1978), 209–248; IV, *Invent. Math.* **50** (1979), 103–128; V, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A* **283** (1981), 745–755.
- [Ho3] E. Horikawa, Local deformation of pencils of curves of genus two, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **64** (1988), 241–244.

- [Ii] S. Iida, Adiabatic limit of η -invariants and the Meyer function of genus two, Master's thesis at Univ. of Tokyo (2005).
- [Im] Y. Imayoshi, Construction of holomorphic family of Riemann surfaces over punctured disk with given monodromy, in: *Algebraic Geometry and Topology of Hodge theory, Degenerations and Complex surfaces* (2004), 93–114. (in Japanese)
- [Ka] T. Kawasaki, The signature theorem for V-manifolds, *Topology* 17 (1978), 75–83.
- [Ko1] K. Konno, A note on surfaces with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 3, *Osaka J. Math.* 28 (1991), 737–745.
- [Ko2] K. Konno, Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces, *Ann. Sc. Norm. Pisa Sup. Ser.IV, vol.XX* (1993), 575–595.
- [Ko3] K. Konno, Clifford index and the slope of fibered surfaces, *J. Alg. Geom.* 8 (1999), 207–220.
- [L] Y. Lee, private communication.
- [Ma1] Y. Matsumoto, Topological equivalence class of fiber spaces on 4-manifolds, in: *The report of Zao-Seminar on Topology and Algebraic Geometry*, 1 pp. 1–18, 2004. (in Japanese)
- [Ma2] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two - a topological approach - , in: *Proceedings of 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces"* pp. 123–148, World Scientific, Singapore, 1996.
- [MM1] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces, I, II, preprints, Univ. of Tokyo and Univ. Complutense de Madrid, 1991/1994.
- [MM2] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, Pseudo-periodic homeomorphisms and degeneration of Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 30 (1994), 70–75.
- [Me] M. Mendes-Lopes, The relative canonical algebra for genus 3 fibrations, Thesis, Univ. of Warwick 1988.
- [Mu1] D. Mumford, Stability of projective varieties, *L'Ens. Math.* 23 (1977), 39–110.
- [Mu2] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, In: *Arithmetic and geometry. II*, Progress in Math. 36 (1983) pp. 271–326, Birkhauser.
- [Ni1] J. Nielsen, Die Structure periodischer Transformationen von Flächen, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 15(1937), English translation: in *Collected Papers 2*. Birkhäuser, 1986.
- [Ni2] J. Nielsen, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 21 (1944), pp.3–89. English translation: in *Collected Papers 2*, Birkhäuser, 1986.

- [NU] Y. Namikawa and K. Ueno, The complete classification of fibers in pencils of curves of genus two, *Manuscripta Math.* **9** (1973), 143–186.
- [RG] H. A. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind Sums*, Carus Mathematical Monographs No. 16, MAA, 1972.
- [R] M. Reid, Problems on pencils of small genus, preprint (1990) (in his Home Page.)
- [S] I. Smith, Lefschetz fibrations and the Hodge bundle, *Geometry and Topology* **3** (1999), 211–233.
- [Tak] S. Takamura, Towards the classification of atoms of degenerations II, (Linearization of degenerations of complex curves), Preprint.
- [Tan] S. L. Tan, On the invariants of base changes of pencils of curves I, *Manuscripta Math.* **84** (1994), 225–244. :II, *Math. Z.* **222** (1996), 655–676.
- [Te] T. Terasoma, An appendix to Endo’s paper, *Math. Ann.* **316** (2000), 355–357.
- [To] T. Tomaru, Pencil genus for normal surface singularities, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [U] K. Ueno, Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata* (1987), pp. 749–770, Kinokuniya.
- [Ve] M. Vergne, Equivariant index formula for orbifolds, *Duke Math. J.* **82** (1992), 203–219.
- [Vi] E. Viehweg, Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one, *Comp. Math.* **35** (1977), 197–233.
- [X1] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, *Math. Ann.* **276** (1987), 449–466.
- [X2] G. Xiao, On the stable reduction of pencils of curves, *Math. Z.* **203** (1990), 379–389.
- [Y1] K. Yoshikawa, The signature divisor on the moduli space of curves, in: *Algebraic Geometry and Topology of Hodge theory, Degenerations and Complex surfaces* (2004), 115–139. (in Japanese)
- [Y2] K. Yoshikawa, private communication.