

# 二軸回転する球体内流れの実験†

後藤 晋\* 石井伸和 木田重雄 西岡通男

(Susumu Goto, Nobukazu Ishii, Shigeo Kida & Michio Nishioka)

京大・工・機械理工

(Dep. Mech. Eng. Sci., Kyoto Univ.)

## 概要

ある軸のまわりに（角速度  $\Omega_H$  で）回転している球体を、回転軸ごとさらにそれに直交する別の軸のまわりに（角速度  $\Omega_V$  で）回転させる装置を製作し、球体内部に閉じ込められた流体の運動を可視化により明らかにした。この流れはレイノルズ数  $Re \equiv a^2 \Omega_H / \nu$ （ここで  $a$  は球体の半径、 $\nu$  は流体の動粘性係数）と二軸の回転角速度の比  $W \equiv \Omega_V / \Omega_H$  の二つのパラメタで特徴づけられる。 $Re$  を固定したまま  $W$  をゼロより増化させると、流れ場は剛体回転流、コリオリ力により回転軸が傾いた回転流、振動流を経て乱流へと遷移する。こうして得られた乱流は後から印加した回転角速度  $\Omega_V$  に基づくレイノルズ数  $Re_V \equiv a^2 \Omega_V / \nu$  が小さい場合には一様等方的な乱流場となるが、 $Re_V$  が大きい場合には後から印加した回転の中心軸まわりの循環流を平均流として伴う。

## 1 はじめに

乱れた流れはわれわれの身のまわりにありふれており、たとえば室内実験でこれを生成することも難しくはない。しかし精度よく制御された乱流を生成維持することは決して容易ではない。一方で乱流は強い混合、拡散、輸送あるいは大きな壁面抵抗などを生み出すためにその制御や予測はあらゆる工業システム内の流れや環境流体などにおいて常に中心課題のひとつである。そこで本研究では、乱流を素朴な駆動機構をもつ単純な装置で生成維持し、さらにその状態を精度よく制御する方法を模索する。具体的には、二つの回転軸を有する回転球体内に流体を閉じ込め、これらの二つの回転角速度を精度よく制御することによる内部流れの制御を目指す。以下に示すように、われわれの室内実験によれば二軸の回転数の変化に応じて球体内の流れは層流から乱流へと多様な流れを呈する。本稿では、この二軸回転球体流れのパラメタ依存性をおもに可視解析により明らかとした結果を報告する。

## 2 実験装置の概要

上記の目的を達成するために、図1に示す装置を用いた室内実験を行った。半径  $a$  が 50mm の球体内に水を充填し、この球体をまず水平軸まわりに一定の角速度  $\Omega_H$  で回転させる。この回転している球体および回転の駆動装置全体を、さらに鉛直軸まわりに一定の角速度  $\Omega_V$  で回転させる。この装置の構造は極めて単純であり、また二つの軸まわりの回転数さえ精度よく制御できれば不確定要素の入り込む余地は少ない。なお、回転はステッピングモータと精度のよい発振器とを用いることによって高精度で制御可能である。

†京都大学数理解析研究所 講究録『混合、化学反応、燃焼の流体力学』（2006）

\*goto@mech.kyoto-u.ac.jp

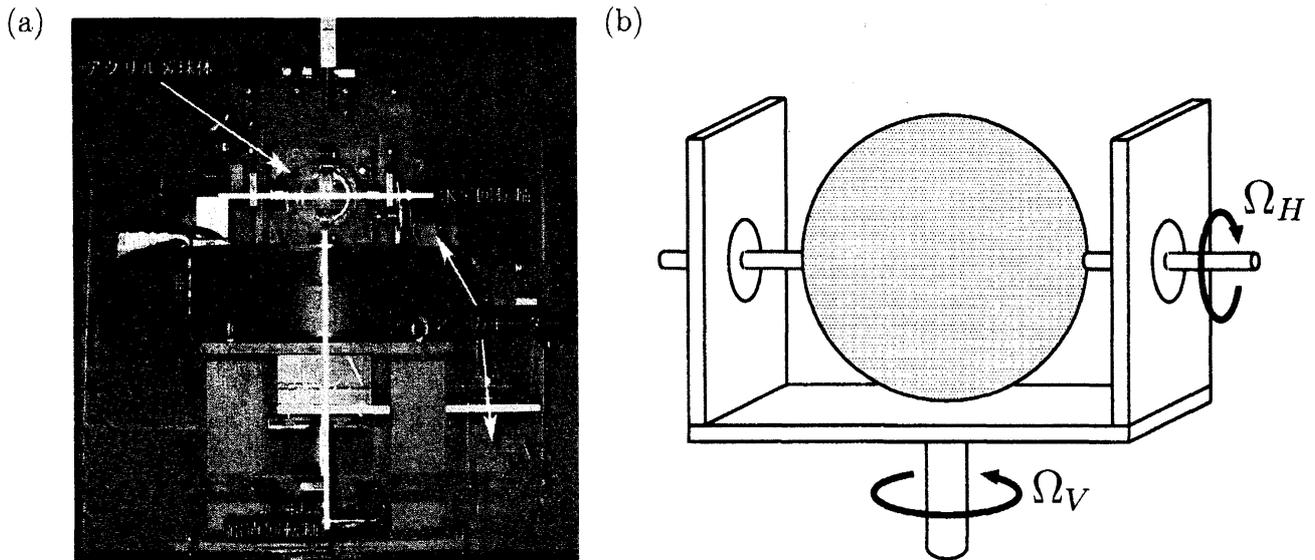


図1 (a) 実験装置の写真および (b) その模式図。半径 50mm の球体に流体（水）を閉じ込め、これを水平軸まわりに一定角速度  $\Omega_H$  で回転させ、さらにその全体を鉛直軸まわりに一定角速度  $\Omega_V$  で回転させる。この装置では鉛直回転軸の方向は時刻に依存しないが、水平回転軸は慣性系に対して回転しており、したがって2つの回転の果たす役割は異なる。

この装置において、水平軸まわりの回転数  $\Omega_H/2\pi$  を  $0.2 \text{ s}^{-1}$  から  $1.8 \text{ s}^{-1}$  まで変化させ、また、鉛直軸まわりの回転数  $\Omega_V/2\pi$  を 0 から  $0.8 \text{ s}^{-1}$  まで変化させることにより球体内部の流れの様子の変化を観察した。可視化の方法は以下の通りである。流体中にトレーサー粒子を混入し、水平回転軸に垂直な面内へのシート光の入射によりこの面内におけるトレーサー粒子の運動の様子を可視化し、これを鉛直軸まわりに（角速度  $\Omega_V$  で）回転する系においてビデオ撮影を行う。このときシート光およびカメラがこの回転系に固定されている点に注意する。なお、シート光は実験室系に固定したスポット状のハロゲン光を回転系に固定したスリットによりシート光に変換したもの（この場合には径が約  $180\mu\text{m}$  のポリエチレン粒子をトレーサーとする）か、回転系に固定したレーザーシート光源によるもの（この場合は銀コーティングされた中空の微小ガラス粒子をトレーサーとする）かのいずれかを目的に応じて使い分ける。以下に示すように（図3を参照）、二つの回転数の組み合わせにより流れの様子は層流から乱流まで多岐に渡る。しかも上述のようにパラメタ調整が精度よく行なえるため、流れの再現性はとてもよい。

### 3 支配方程式とパラメタ

実験結果を述べるまえに、系を支配するパラメタをまとめる。流体は非圧縮であるとし、その運動は連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

および、ナビエ・ストークス方程式、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}_V \quad (2)$$

にしたがうものとする。ただし(2)は鉛直軸まわりの角速度 $\Omega_V$ の回転とともに運動する非慣性系において記述されたものであり、右辺第3項はコリオリ力を表す。またこの座標系における境界条件は壁面上の粘着条件、

$$\mathbf{u} = \Omega_H \times \mathbf{r} \quad (r = a \text{ において}) \quad (3)$$

となる。ただし、 $\mathbf{r}$ は球の中心を原点とする位置ベクトル、 $r$ はその大きさである。

ここで時間と長さをそれぞれ水平軸まわりの回転角速度の逆数 $\Omega_H^{-1}$ と球体の半径 $a$ とで無次元化する。このとき、時刻、速度、圧力および鉛直軸まわりの回転角速度はそれぞれ

$$t = \tilde{t}/\Omega_H, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = a \Omega_H \tilde{\mathbf{u}}, \quad (5)$$

$$p = \rho (a \Omega_H)^2 \tilde{p}, \quad (6)$$

$$\Omega_V = \Omega_H \tilde{\Omega}_V \quad (= \Omega_H (\Omega_V/\Omega_H) \hat{\mathbf{e}}_V) \quad (7)$$

と無次元化される。ここで $\sim$ のついた量は無次元量を表す。これらの無次元量を用いて(1)–(3)を書き直すと、それぞれ

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\nu}{a^2 \Omega_H} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + 2 \frac{\Omega_V}{\Omega_H} \tilde{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{e}}_V, \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{e}}_H \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (\tilde{r} = 1 \text{ において}) \quad (10)$$

を得る。ここで $\hat{\mathbf{e}}_H$ および $\hat{\mathbf{e}}_V$ はそれぞれ水平回転軸方向および鉛直回転軸方向の単位ベクトルである。これらは考えている座標系において時刻に依存しない。結局、無次元化された方程式系(8)–(10)は、レイノルズ数、

$$Re \equiv \frac{a^2 \Omega_H}{\nu} \quad (11)$$

および、角速度比、

$$W \equiv \Omega_V / \Omega_H \quad (12)$$

にのみ依存する。したがって、 $Re$ と $W$ とが系を支配するパラメタとなる。なお、この系は二つの回転軸の入れ替えに関して対称ではなく(図1を参照)、 $W$ は(1以下だけではなく)非負のすべての値について異なるパラメタとなる。

## 4 支配パラメタの変化による流れの変化とその解釈

### 4.1 相図

おもなパラメタの組み合わせにおける流れの様子を可視化を図2に示す。可視化はパラメタを固定した状態から十分に時間をおき、系が統計的に定常となったのちに行っている。なお、統計的に定常となるのに要する時間は実時間で60秒程度、 $\Omega_H$ による無次元時間で $O(10^2) \sim O(10^3)$ である。

図3に相図を示す。図3(a)によれば流れの様子は、水平軸まわりの回転角速度に基づくレイノルズ数 $Re$ と回転角速度比 $W$ との組み合わせに応じて、次のように分類される。(i) 水平

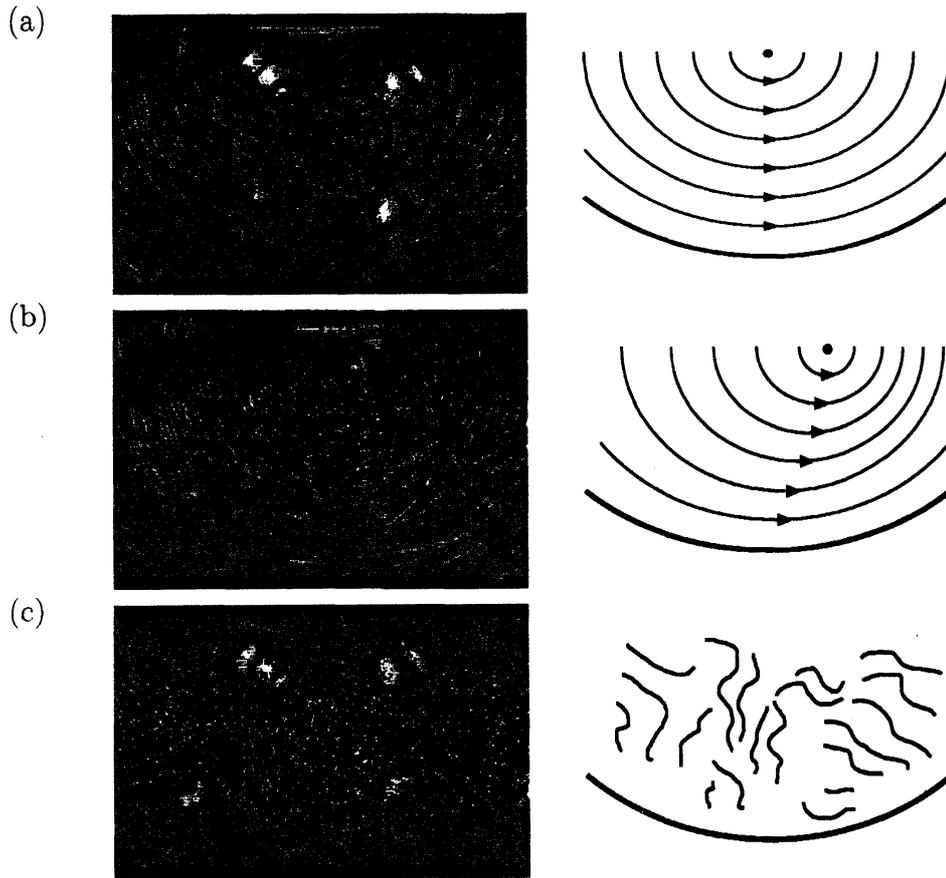


図2 水平回転軸と垂直な鉛直断面内（ただしこの面は球の中心を通過していない）におけるトレーサー粒子の運動の可視化。(a)  $Re = 15000$ ,  $W = 0$ ; 水平軸まわりの剛体回転流。(b)  $Re = 15000$ ,  $W = 0.0125$ ; 中心軸が傾いた回転流。(c)  $Re = 15000$ ,  $W = 0.1$ ; 乱流。

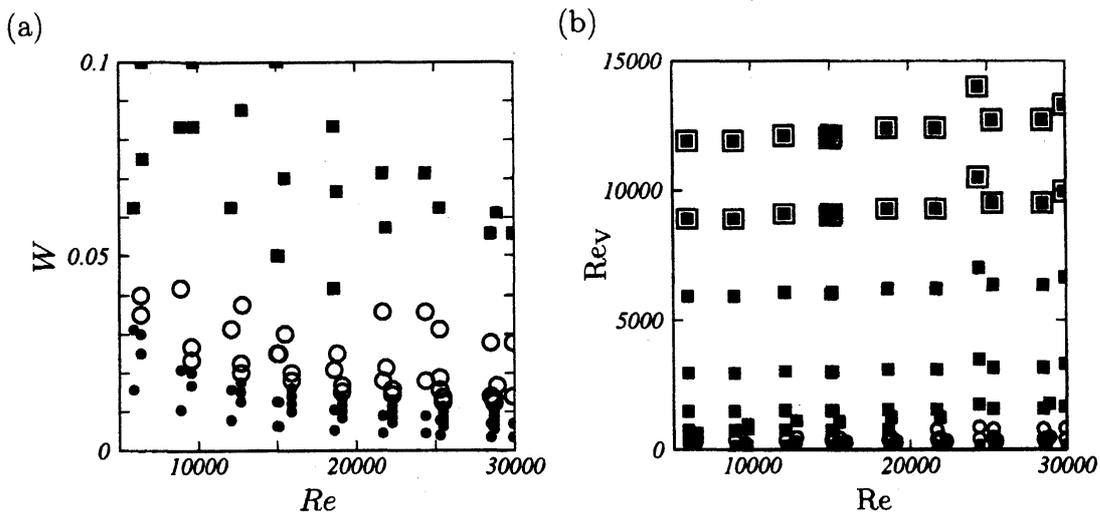


図3 (a) 角速度比  $W$  と水平回転軸まわりの角速度で定義されるレイノルズ数  $Re$  とで表現した相図。 $\bullet$ 、定常流。 $\circ$ 、振動流。 $\blacksquare$ 、乱流。横軸の左端は  $Re = 5000$  であることに注意。(b) 縦軸を鉛直回転軸まわりの角速度で定義されるレイノルズ数とした場合の相図。記号は (a) と同様だが、鉛直軸まわりの循環流を伴う乱流は二重四角で示す。

回転軸のまわりの剛体回転流、(ii) (i) の状態に近い定常流 (図 3 の ●)、(iii) 振動流 (○)、(iv) 乱流 (■) である。また図 3(b) によれば、乱流は  $\Omega_V$  で定義されるレイノルズ数

$$Re_V \equiv \frac{a^2 \Omega_V}{\nu} \quad (13)$$

が小さいうちは平均流を伴わない一様等方的な乱流であるが、 $Re_V$  が大きくなると鉛直回転軸まわりの循環流を平均流として伴う。

われわれがこれまでに行なった実験によれば、レイノルズ数  $Re$  が約 5000 より大きい場合には、 $Re$  を固定したまま角速度比  $W$  をゼロより次第に大きくしてゆくと、(i) から (iv) の状態が順番に現れることが示された。このとき  $W$  がたかだか 0.05 の程度で乱流まで遷移していることに注意する。つまり、一軸回転のみでの乱流生成は回転角速度を非定常にするなどの工夫が必要であるのに対して (下の §4.2.1 を参照)、二軸回転を用いればかなり容易に乱流状態を生成維持できる。ただし図 3(a) に示すように、 $Re$  が低い領域では定常流がより大きな角速度比  $W$  においても維持されている。実際、直接数値計算の結果によれば少なくとも  $Re$  が  $O(100)$  より小さい場合には  $W$  を  $O(1)$  まで大きくしても系の状態は (ii) の定常流となることが分かっている。したがって、 $Re$  が  $O(100)$  から 5000 程度のまでの間に乱流が維持できる最低のレイノルズ数が存在するはずである。しかし低レイノルズ数の遅い流れの様子を可視化によって精確に分類することは難しく、これまでのところこの臨界レイノルズ数は分かっていない。定量的な測定や数値計算の助けを借りて今後明らかにする。

## 4.2 $Re \gtrsim 5000$ の場合 ( $Re = 15000$ を例として)

上述のように、レイノルズ数  $Re$  が約 5000 よりも大きな場合には、 $W$  をゼロより次第に大きくしてゆくと、球体内の流れは剛体回転流から、定常流、振動流、乱流へと遷移してゆく。以下では、 $Re = 15000$  の場合に  $W$  の変化に応じた流れの変化の様子を報告し、その解釈を簡単に議論する。

### 4.2.1 $W = 0$ の場合

まず、鉛直軸まわりの回転がない場合には、球体内の流れは必ず水平回転軸まわりの剛体回転流となる。このことは  $Re$  (つまり  $\Omega_H$ ) に依存せず常に観察される現象であり、以下のよう示される。球が静止している座標系で運動方程式を書き下すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}_H \quad (14)$$

となり、また境界条件は  $r = a$  で  $\mathbf{u} = 0$  である。両辺に  $\mathbf{u}$  を乗じると、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^2 = -\nabla \cdot \left( \frac{p\mathbf{u}}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \mathbf{u} \right) + \nu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \quad (15)$$

を得るが、これを境界条件に注意して球体内全体で積分すると、

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} u^2 dV = -\nu \int_V \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} dV \leq 0 \quad (16)$$

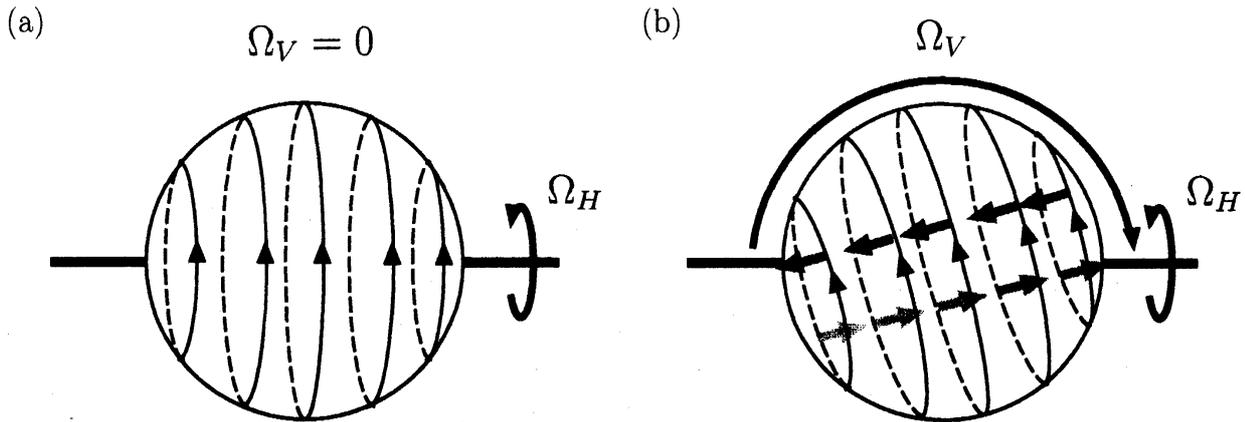


図4 装置を鉛直上方より観察した図。鉛直軸まわりの回転とともに回転する座標系における観察。(a) 鉛直軸まわりの回転がない場合。(b) 矢印の方向の回転を加えた場合の流れの様子。矢印がコリオリ力の方向を示す。

が示される。ただし上式の等号が成り立つのは速度勾配が空間全体で消滅するときのみであり、つまり上式は速度勾配が消滅するまでこの座標系における運動エネルギーは減衰することを意味する。したがって一軸のみの回転 ( $W = 0$ ) の場合には初期にいかなる流れを与えてもやがては剛体回転流へと落ち着く。

#### 4.2.2 $W \lesssim 0.02$ の場合

次に、鉛直軸まわりの回転が水平軸まわりの回転に比べて十分に遅い場合を考える。流れを鉛直軸まわりの回転に乗った座標系で観察すると、 $W = 0$  の場合の剛体回転流が少し傾いた流れが実現される。このことは、この座標系において剛体回転流が受けるコリオリ力の向きを考慮することにより次のように説明される。図4(a)は鉛直軸まわりの回転がない場合 ( $\Omega_V = 0$ ) の剛体回転流を表す。この状態に図4(b)に示す方向に  $\Omega_V (\ll \Omega_H)$  の微小な回転を加えた場合を考える。鉛直軸まわりの回転とともに回転する座標系において(a)の剛体回転流が受けるコリオリ力の方向は(b)に太い矢印で示した方向(この場合、流速の方向に対して常に左向き)となる。このコリオリ力により旋回流の回転中心軸は鉛直軸まわりの回転に対して少し遅れた方向を向くことになる<sup>†</sup>。このとき球体壁面上の流体粒子は粘着境界条件により水平回転軸まわりに剛体回転しているので(コリオリ力により傾こうとする)内部流れとの間にせん断が生じ、それによる粘性応力がコリオリ力とつりあうときに定常流が得られるはずである。

#### 4.2.3 $0.02 \lesssim W \lesssim 0.05$ の場合

鉛直軸まわりの回転数を増大させ  $W$  を大きくすると、前節の定常流はホップ分岐をおこし振動流が現れる。簡易的な粒子画像流速測定によれば、 $Re = 15000$  における振動流への分岐は  $W$  が約 0.016 付近で起こり、そのときの最不安定モードの ( $\Omega_H$  で規格化された) 角振動数は  $\omega_c / \Omega_H \approx 0.77$  である。

<sup>†</sup>この結論は二つの回転の回転方向にはよらない。このことは実験室系における剛体回転流の慣性を考えれば当然である。

#### 4.2.4 $0.05 \lesssim W$ の場合

さらに  $W$  を大きくすると、上述の振動流も不安定化し非周期流つまり乱流状態へと遷移する。乱流へと遷移する  $W$  の値は約 0.05 程度であり、極めて小さい。つまり、水平軸まわりの回転数が十分なレイノルズ数を与える大きさであれば、球体内流れを不安定化させるための鉛直軸まわりの回転数はさほど大きくないことが分かる。このことは比較的容易に乱流状態を生成できることを意味し、たとえば二軸回転を用いた混合器などへの応用が期待される。

ところで、一般に定常乱流は大きなスケールに注入されたエネルギーが小さなスケールへと伝達され、粘性散逸により熱に変換されることによって維持される。この装置では水平軸まわりの回転によって球体内の流れに大きなスケールの渦を常に生成させ、この回転流を鉛直軸まわりの回転によって不安定化することによって乱れを生成維持させていると考えることができる。

#### 4.2.5 $W \gg 1$ ( $Re_V \gg 1$ ) の場合

さらに回転角速度比  $W$  が増大すると、球体内の乱流は鉛直回転軸まわりの循環流を平均流として伴うようになる。この循環流は鉛直回転とともに回転する座標系においても鉛直回転方向に循環している。つまり、球体内流れは球体壁面上の鉛直軸まわりの回転よりもさらに速く循環している。この循環流は（球体を地球と見立てた場合に）赤道付近でも、両極近傍でも同じ向きとなっている。

なお、可視化による観察によると、鉛直回転角速度が同一であっても、この鉛直軸まわりの循環流の速度は、 $Re$ （つまり水平回転軸まわりの回転角速度）の増大とともに増大するようである。また、この循環流は  $W$  が大きい場合というよりは、 $\Omega_V$  で定義されるレイノルズ数  $Re_V$ （式(13)を参照）が  $O(10^4)$  を超えると現れるようである（図3(b)を参照）。

強い回転がある場合に秩序立った大規模構造が現れることは珍しくはない。たとえば多くの惑星で見られる惑星大気の経度方向の循環流などが思い浮かぶ。惑星大気では熱輸送に起因する子午面循環による角運動の輸送が大事な要素のひとつとなりうるが、この系では角運動量輸送がいかに行われているのかの詳細は不明である。乱流運動により壁面近傍の速い循環流が内部に運ばれているのかもしれない。いずれにしても壁面速度よりも速い循環流が現れる理由は未知のままであり興味深い現象である。

## 5 おわりに

本稿はわれわれが最近行った二軸回転する球体内流れの実験に関する第一報である。この系はその駆動機構が極めて単純であるにも拘らず、流れ場の様子は層流から乱流まで多様であり、また駆動機構に不確定性が入り込みにくいためにそれらの再現性も極めてよい。今回、おもに可視化により流れ場の様子を観察し、流れのパラメタ依存性を大まかに分類することができた（図3）が、より精密な計測による流れ場の詳細かつ精確な分類、数値解析の助けを借りた線形安定性解析などは残された重要な課題であり、今後早急に行う計画である。