数理解析研究所講究録
1501 巻 2006 年 168-180

孤立特異点に付随する 代数的局所コホモロジーとホロノミック系

新潟大学・工学部情報工学科 田島慎一*(Shinichi Tajima)
Faculty of Engineering, Niigata University
近畿大学・理工学部 中村弥生†(Yayoi Nakamura)
Institute of Science and Engineering, Kinki University

Abstract

本稿では, 超平面孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー類とその偏微分作用素環における annihilator イデアルの計算法について述べる. この方法は, 特異点の定義関数が複数のパラメーターを含んでいる場合にも有効である.

Introduction

X を, n-次元アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍とする. f を, X 上の正則関数で, 原点 O に孤立特異点をもつものとする. f のヤコビイデアル $\mathcal{J}\subset\mathcal{O}_{X,O}$ に対して, 原点に台を持つ n 次代数的局所コホモロジー類であり, $\mathcal{J}$ で annihilate されるようなもの全体のなす集合を

$$\Omega_f=\{\psi\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)\mid\psi g=0,\forall g\in\mathcal{J}\}$$

とおく. ここで, $\mathcal{O}_{X,O}$ は正則関数のなす層 $\mathcal{O}_X$ の原点における茎, Ω^n_X は正則 n 形式の層である. 多変数留数をとることにより, Ω_f と $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の間には自然な pairing が定義できる. この pairing は非退化であり (グロタンディック局所双対定理), Ω_f は $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の双対ベクトル空間と見なすことができる.

$\omega\in\Omega_f$ を Ω_f の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元とする. 各自然数 k に対し, $\mathcal{L}^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ を高々k 階の偏微分作用素で, $\omega\in\Omega_f$ を annihilate するものの集合とし, $Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ により, $\mathcal{L}^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ で生成される右 $\mathcal{D}_{X,O}$ イデアルを表すことにする. ここで, $\mathcal{D}_{X,O}$ は X 上の線形偏微分作用素全体のなす層 $\mathcal{D}_X$ の原点における茎である.

*tajima@ie.niigata-u.ac.jp
†yayoi@math.kindai.ac.jp

ホロノミック系 $\mathcal{D}_{X,O}/\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ の重複度を $\mu^{(k)}_f$ とおく. $\mu^{(0)}_f$ は, 特異点の Milnor 数に一致する. 一般に, $\mu^{(k)}_f$ は, f の定義する孤立特異点の不変量となっている. 特に, $k=1$ の場合, $\mu^{(1)}_f$ は, 特異点の非斉次性を測る不変量であるといえる. 実際, 次の結果がある.

定理 [6] $\mu^{(1)}_f = 1$ は $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ で定義された孤立特異点が擬斉次であることの必要十分条件である.

定理 [3] $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ は原点に半擬斉次 unimodal 孤立特異点を定義するとする. このとき, $\mu^{(1)}_f = 2$ である.

また, f を, inner modality 4 以下の擬斉次孤立特異点の定義関数に upper monomial を一つ加えて得られた関数であるとする. このとき, 不変量 $\mu^{(1)}_f$ と, Milnor 数と Tjurina 数との関係を示唆する関係式

$$\mu^{(1)}_f = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) + 1$$

が得られている ([4]).

これらの結果が示すように, Ω_f, $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ の構造と特異点の複素解析的な諸性質との関係を調べることは興味深い. また, ホロノミック系の構成問題それ自体, 基本的で重要な問題である. しかし, 従来我々が用いていた Ω_f, $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ などの計算アルゴリズムは, 関数 f の半擬斉次性に注目して重みの概念を用いて導出している部分などもあり, 一般の特異点に対してそのまま適用することはできない. また, グレブナ基底の計算を必要としたため, 特異点の定義関数がパラメーターを含んでおり, パラメーターの値によって特異性が変化してくるような場合には, 用いることはできない. そこで本稿では, 一般的な孤立特異点に対しても有効であり, さらにパラメーターを扱う場合にも応用できるような, Ω_f とその annihilator の計算アルゴリズムを与える.

1 Ω_f の計算法

以下, $\mathbb{C}^n$ の座標 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を固定する. 原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類を, relative Čech cohomology による表現を用いて

$$\begin{aligned}\left[\sum a_\lambda \frac{1}{x^\lambda} dx\right] &= \left[\sum a_{\ell_1 \ldots \ell_n} \frac{1}{x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n}} dx\right] \\ &= \sum \left[a_{\ell_1 \ldots \ell_n} \frac{1}{x_1^{\ell_1} \ldots x_n^{\ell_n}} dx\right]\end{aligned}$$

の形で表すことにする. ここで, $\sum$ は, $\lambda = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n_+$ に関する有限和を意味する. $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ である.

最も単純な場合である $\left[\frac{1}{x_1 \dots x_n} dx\right]$ は, Dirac の超関数 δ に対応する. 全ての j に対して $x_j \delta = 0$ であるから, $\delta \in \Omega_f$ である. このように, Ω_f の中には, 一つの項からなるコホモロジー類が存在する. しかし, 一般には, Ω_f の要素は, いくつかの項の線形結合で与えられる. 一つの項からなるコホモロジー類を単項コホモロジー類と呼び, いくつかの単項コホモロジー類の線形結合で与えられるコホモロジー類を多項コホモロジー類と呼ぶことにする.

以下, Ω_f の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底の計算法を与える.

1.1 計算の概要

代数的局所コホモロジー類に対して, 項順序を導入しておこう. 多重指数 $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ に対して, $x^\lambda = x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n}$, $|\lambda| = \sum_{j=1}^n \ell_j$ とおく. $\succ$ を多項式の集合における全次数辞書式順序とする.

定義 1 (代数的局所コホモロジー類における項順序). 代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{x^\lambda} dx]$, $[\frac{1}{x^{\lambda'}} dx]$ に対して, 項順序 $\succ$ を

$$[\frac{1}{x^\lambda} dx] \succ [\frac{1}{x^{\lambda'}} dx] \Longleftrightarrow x^\lambda \succ x^{\lambda'}$$

で定義する.

多項コホモロジー類が与えられたとき, その多項コホモロジー類に現れる単項コホモロジー類のうち, 項順序が最も高いものを主項, その他を低階項と呼ぶことにする.

単項コホモロジー類は明らかに $\mathbb{C}$ 上線形独立なので, はじめに単項コホモロジー類を求め, 基底の構成要素として採用する. 次に, 多項コホモロジー類を計算するが, 既に求めてある単項コホモロジー類を含まない一次独立なものを計算する. そのために, 主項の順序が低いものから順に求めていく.

多項コホモロジー類の計算において, 主項や低階項になりうる単項を選択するときに, 次の結果を用いると計算の効率が良くなる.

命題 1.1. 代数的局所コホモロジー類 $\psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega_X)$ に対して, ψ が Ω_f に属するならば, 全ての $j = 1, \dots, n$ について $x_j \psi \in \Omega_f$ が成り立つ.

1.2 基底単項コホモロジー類の計算

与えられた特異点の定義多項式 f に対して, その偏導関数 $f_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ に現れる全ての単項式の指数の集合を F_j とおく.

$$F_j = \{\kappa \in \mathbb{N}^n \mid f_j = \sum_\kappa a_\kappa x^\kappa, a_\kappa \neq 0\}.$$

$F=\cup_{j=1}^{n}F_j$ に対し, $\bar{F}=\{\kappa+\kappa'\in\mathbb{N}^n \mid \kappa\in F, \kappa'\in\mathbb{N}^n\}$ とおき, $K_S=\mathbb{N}^n\setminus\bar{F}$ と定める. K_S を用いて $\Lambda_S=\{\lambda+\mathbf{1} \mid \lambda\in K_S\}$ とおく. 但し, $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$ である. このとき, 次が成り立つ.

補題 1. $\lambda\in\Lambda_S$ は $[\frac{1}{x^\lambda}dx]\in\Omega_f$ となる必要十分条件である.

この結果によって, 基底となる単項コホモロジー類を全て与えることができる. 基底となる単項コホモロジー類全ての集合を Γ_S とおく.

$$\Gamma_S=\{[\frac{1}{x^\lambda}dx] \mid \lambda\in\Lambda_S\}.$$

1.3 多項コホモロジー類の計算法

次に, 多項コホモロジー類を, 主項の全次数の小さいものから順に求めていく. 命題 1.1 を用いて主項の候補を絞っていく. すでに基底のうち, 単項コホモロジー類全てと, いくつかの多項コホモロジー類が主項の全次数の小さいものから順に求めてあるとする. このとき, 主項となりうる単項コホモロジー類に対する次の必要条件を得る.

条件 1 *(主項となる必要条件)*. 単項コホモロジー類 τ が, 基底となる多項コホモロジー類の主項ならば, 各 $j=1,\ldots,n$ に対して, $x_j\tau$ は

- Γ_S に含まれるか,
- 0 であるか,
- すでに求めてある多項コホモロジー類の主項であるか

のいずれかを満たす.

この条件に基づき, 主項の候補が全て与えられる. これらの候補のうち項順序の低いものから順に, 実際に基底の主項となっているかどうかを一つずつ調べていく. 候補 ψ を主項とする多項コホモロジー類の低階項は, 次の条件を満たす.

条件 2 *(低階項となる必要条件)*. 単項コホモロジー類 $\varrho\prec\tau$ が, τ を主項とする多項コホモロジー類の低階項ならば, 各 $j=1,\ldots,n$ に対して, $x_j\varrho$ は,

- Γ_S に含まれるか,
- すでに求めてある多項コホモロジー類の主項であるか,
- すでに求めてある多項コホモロジー類の低階項であるか,

- 0であるか

のいずれかを満たす.

このようにして選ばれた単項の線形結合が, $\mathcal{J}$ で annihilate されるという条件を満たすかどうか調べることにより, 基底となるコホモロジー類を求めることができる. さらに, 計算の終了条件は, 命題 1.1 により次で与えられる.

終了条件: 基底となるコホモロジー類のうち, 主項の全次数が m であるものまでが求められているとする. 全次数が $m+1$ であるような主項の候補を全て求める. これらの候補全てが, 基底となるコホモロジー類の主項となりえない場合, 計算を終了する.

以下, Ω_f の基底となる多項コホモロジー類の計算法を与える. 微分形式 dx を固定しているので, コホモロジー類 ηdx の, 微分形式 dx に対する係数 $\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ のみを求める. すなわち, $\mathcal{H}_f = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid g\eta = 0, \forall g \in \mathcal{J}\}$ のベクトル空間としての基底を求める.

アルゴリズム 1 (基底コホモロジー類の具体的な構成法). $\mathcal{H}_f$ の基底のうち, 単項コホモロジー類の全て $\Delta_S = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ と, 主項の全次数が d までの多項コホモロジー類 $\eta_{s+1}, \ldots, \eta_k$ 全てが, 主項の項順序が低いものから順に与えられたとする.

$$\Delta = \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$$

とおく.

1. $|\lambda| = d+1$ を満たす λ に対し, 条件 1 を用いて, 基底となる多項コホモロジー類の主項の候補 $\left[\dfrac{1}{x^\lambda}\right]$ を選択する.

2. $[1/x^\lambda] \succ [1/x^\nu]$ を満たす単項 $[1/x^\nu]$ のうち, 他の基底となる多項コホモロジー類の主項と Δ_S を除いたものから, 条件 2 を用いて低階項となる候補を選択し, その指数の集合を C_λ とおく. 未定係数 c_ν を用いて,
$$\eta = [\frac{1}{x^\lambda}] + \sum_{\nu \in C_\lambda} c_\nu [\frac{1}{x^\nu}]$$
とおく.

3. 未定係数 c_ν に関する一次方程式 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\eta = 0,\ j = 1, \ldots, n$ を解く.
   - 方程式が解けた場合, $\Delta = \Delta \cup \{\eta\}$ とおく.
   - 方程式が解けなかった場合, Δ はそのままとする.

全次数が $d+1$ である単項の基底が存在せず, さらに全次数が $d+1$ である主項の候補全てに対する方程式が解けない場合, そこで計算を終了する.

このとき, Δ が $\mathcal{H}_f$ の基底となる.

上の手順で求めた $\mathcal{H}_f$ の基底と微分形式 dx との積をとったものが, Ω_f の基底となる. なお, 手順2,3 に, 命題1.1 を用いて改良を加えることにより, さらに計算効率を良くすることが可能である.

1.4 基底コホモロジー類の計算例

$f = x^3y + y^6 + axy^5$ (a はパラメーター) に対する $\mathcal{H}_f$ の基底を計算しよう. まずはじめに基底となる単項コホモロジー類を求める.

$$\Lambda_S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,4),(2,3),(1,5),(2,4)\}$$

より,

$$\Delta_S = \{\left[\frac{1}{xy}\right],\left[\frac{1}{xy^2}\right],\left[\frac{1}{x^2y}\right],\left[\frac{1}{xy^3}\right],\left[\frac{1}{x^2y^2}\right],\left[\frac{1}{x^3y}\right],\left[\frac{1}{xy^4}\right],\left[\frac{1}{x^2y^3}\right],\left[\frac{1}{xy^5}\right],\left[\frac{1}{x^2y^4}\right]\}$$

を得る.

次に基底となる多項コホモロジー類を求めよう. $\Delta = \Delta_S$ とおく.

まずはじめに, 全次数が5であり, Δ_S に含まれず, さらに x_T, y_T が Δ_S に含まれるか0になるものとして, $\{(3,2),(4,1)\}$ が, 主項の候補の指数として挙がる.

候補 $[1/x^3y^2]$ について調べる.
この単項コホモロジー類よりも順序の低い単項コホモロジー類は全て Δ_S に含まれる. よって $(3,2)$ は主項の指数にはなりえない.

候補 $[1/x^4y]$ について調べる.
$C_{(4,1)} = \{(3,2)\}$ である. $\eta = [1/x^4y] + c_{(3,2)}[1/x^3y^2]$ とおく. しかし, $\frac{\partial f}{\partial y}\eta \neq 0$ であり, $[1/x^4y]$ は $\mathcal{H}_f$ の基底の主項とはなりえない.

全次数が6の場合は, 条件1を満たすものは全て Δ_S に含まれる.
全次数が7であり, 条件1を満たし, Δ_S に含まれないものの指数として $\{(1,6),(2,5)\}$ が候補に挙がる.

候補 $[1/xy^6]$ について調べる. $C_{(1,6)} = \{(3,2),(4,1)\}$ である.

$$\eta = \left[\frac{1}{xy^6} + c_{(3,2)}\frac{1}{x^3y^2} + c_{(4,1)}\frac{1}{x^4y}\right]$$

とおく. $\frac{\partial f}{\partial x}\eta = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\eta = 0$ より $c_{(3,2)} = -\frac{1}{3}a$, $c_{(4,1)} = -6$ となり, $[1/xy^6]$ を主項に持つ多項コホモロジー類

$$\eta = \left[\frac{1}{xy^6} - 6\frac{1}{x^4y} - \frac{1}{3}a\frac{1}{x^3y^2}\right]$$

を得る. $\Delta = \Delta \cup \{\eta\}$ とおく.

候補 $[1/x^2y^5]$ についても同様に考えることにより, $[1/x^2y^5]$ を主項に持つ多項コホモロジー類

$$\eta = \left[\frac{1}{x^2y^5} - 5a\frac{1}{x^4y}\right]$$

を得る. $\Delta = \Delta \cup \{\eta\}$ とおく.

次の主項の指数の候補としては, 全次数が 8 であり, Δ_S に含まれず, $x\tau, y\tau$ が 0 になるか, あるいはその指数が $(1,6)$ または $(2,5)$ と一致する. これらの条件を満たすものの指数として $\{(1,7),(2,6)\}$ が挙がる.

候補 $[1/xy^7]$ について考える. $C_{(1,7)} = \{(3,2),(4,1),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ となる. $[1/xy^7]$ に, これらに関する線形結合を加えたものは $\frac{\partial f}{\partial x}$ によって annihilate されないので, $[1/xy^7]$ は主項となりえない.

候補 $[1/x^2y^6]$ について考える. $C_{(2,6)} = \{(3,3),(4,2),(5,1),(1,7)\}$ となる. $[1/x^2y^6]$ にこれらに関する線形結合を加え, η とおく. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ によって annihilate されるという条件で結合の係数を決めることができ,

$$\eta = \left[\frac{1}{x^2y^6} + \frac{7}{27}a^2\frac{1}{x^3y^3} - \frac{1}{3}a\frac{1}{x^4y^2} - 6\frac{1}{x^5y} - \frac{7}{9}a\frac{1}{xy^7}\right]$$

を得る. $\Delta = \Delta \cup \{\eta\}$ とおく.

全次数が 8 であるような主項の候補は存在しない. 終了条件が満たされたので, ここで計算を終了する. 以上で全ての基底コホモロジー類の計算が終わり, $\mathcal{H}_f$ の基底 Δ を得た.

2 annihilator の計算法

Ω_f の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元である代数的局所コホモロジー類を annihilate する 1 階以上の微分作用素の計算法を与える. イデアル $\mathcal{J}$ が一般の 0 次元イデアルの場合の代数的局所コホモロジー類の annihilator の計算に関しては, [7] があるが, 本稿では, コホモロジー類の台が原点のみという特殊性に注目し, より効率的な計算法を与える. 特に, $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の基底単項式の計算やイデアル $\mathcal{J}$ に関する membership の計算を行う際に, 前節で求めた Ω_f の基底を用いる.

2.1 annihlator の性質

ω を Ω_f の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元とする. ω の $\mathcal{D}_{X,O}$ 上の annihilator で生成される右 $\mathcal{D}_{X,O}$ イデアルを $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ とおく.

$\mathcal{L}^{(k)}(\omega)$ を, 代数的局所コホモロジー類 ω を annihilate する高々 k 階の偏微分作用素の集合 $\{P \in \mathcal{D}_{X,O} \mid \omega P = 0, \operatorname{ord} P \leq k\}$ とし, $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ を $\mathcal{L}^{(k)}(\omega)$ で生成される右 $\mathcal{D}_{X,O}$ イデアルとする.

$$\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) = \mathcal{L}^{(k)}(\omega)\mathcal{D}_{X,O} \subseteq \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega).$$

ω は Ω_f の生成元であることから, 明らかに $\mathcal{A}nn^{(0)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) = \mathcal{J}\mathcal{D}_{X,O}$ である. また $\{\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)\}_k$ はイデアルの増大列を成すが, $\mathcal{D}_{X,O}$ のネター性によって, 自然数 ν であって

$$\mathcal{A}nn^{(0)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) \subseteq \mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) \subseteq \mathcal{A}nn^{(2)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) \subseteq \cdots$$
$$\subseteq \mathcal{A}nn^{(\nu)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) = \mathcal{A}nn^{(\nu+1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega) = \cdots = \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$$

を満たすものが存在する.

ここで, 偏微分作用素 P, Q に対し, $[P,Q] = PQ - QP$ とおく. 次の結果が成り立つ.

定理 1. R を k 階線形偏微分作用素とする. 次の二つの条件は同値である.

(i) 任意の $g \in \mathcal{J}$ に対して

$$[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}(\omega), {}^{\forall} g \in \mathcal{L}^{(0)}(\omega) = \mathcal{J}$$

が成り立つ.

(ii) 関数 $h \in \mathcal{O}_X$ であって $\omega(R+h) = 0$ を満たすものが存在する.

証明 : 一般に, s 階の偏微分作用素 S と t 階の偏微分作用素 T に対して, 交換子積 $[S,T]$ は高々 $s+t-1$ 階の偏微分作用素となる. $R + h \in \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ ならば, $[R+h,g] = [R,g] \in \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ であり, $[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}(\omega)$ が成り立つ. 逆に, k 階の偏微分作用素 R に対し, $[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}(\omega)$ とする. このとき, $\omega[R,g] = \omega Rg - \omega gR$ であるが, $g \in \mathcal{L}^{(0)}(\omega)$ により $\omega gR = 0$ となり, $\omega[R,g] = \omega Rg$ である. 今, $[R,g] \in \mathcal{L}^{(k-1)}(\omega)$ であることから, 代数的局所コホモロジー類 ωR は, 任意の $g \in \mathcal{J}$ に対して $(\omega R)g = 0$ を満たす. Ω_f の定義によって,

$$\omega R \in \Omega_f$$

を得る. Ω_f は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 ω で生成されるから,

$$\omega R = -\omega h$$

となる $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ が存在する．よって，$\omega(R+h)=0$ となり，$R+h \in \mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ を得る．□

この結果は，本稿における annihilator 計算アルゴリズム導出の際に中心的役割を果たす．

2.2 アルゴリズム導出の準備

$\mathcal{J}$ に属する任意の関数は ω を annihilate するから，ω の annihilator となる線形偏微分作用素の係数関数としては，$\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の基底単項式の線形結合のみを考えれば十分である．そこでまず，annihilator の計算の際に必要となる $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の基底単項式の計算について考える．計算機に実装可能なアルゴリズムの導出を目的としているので，以下，特異点の定義関数は，$f \in K[x]$ なる有理数係数の多項式であると仮定しておく．

前節で述べた方法で求めた $\mathcal{H}_f$ の基底のうち，多項コホモロジー類で与えられるものを $\{\eta_{s+1},\dots,\eta_\mu\}$ とする．このとき，主項の項順序が小さい順に並んでいることに注意しよう．これらの多項コホモロジー類に現れる全ての単項コホモロジー類を $\{\varrho_1,\dots,\varrho_p\}$ とする．これらは，項順序が小さい順に並んでいるものとする．多項コホモロジー類のこれらの単項コホモロジー類による線形結合を行列を用いて表したときの係数行列を A とする．

$$\begin{pmatrix}\eta_{s+1}\\ \vdots \\ \eta_\mu\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\varrho_1\\ \vdots \\ \varrho_p\end{pmatrix}.$$

A は階数 $\mu-s$ の $(\mu-s,p)$ 行列である．

行列 A から行基本変形により導かれる階段行列を $\tilde{A}$ とする．階段行列 $\tilde{A}$ のピボットを含む列に対応する単項コホモロジー類を $[1/x^{\lambda_i}]$, $i=s+1,\dots,\mu$ とする．各 i に対し κ_i を $\kappa_i=\lambda_i-\mathbf{1}$ で定め，$K_D=\{\kappa_{s+1},\dots,\kappa_\mu\}$ とおく．次の結果が成り立つ．

命題 2.1. $f \in K[x]$ とする．多項式環において $\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n$ が生成するイデアルを J とおく．J を準素イデアル分解したときに得られる準素イデアルであり，原点を零点として持つものを J_0 とおく．このとき，$K[x]/J_0$ の項順序 $\succ$ に関する基底単項式は $\{x^\kappa \mid \kappa \in K_S \cup K_D\}$ で与えられる．

以下、$K[x]/J_0$ と $E=\mathrm{Span}\{x^\kappa \mid \kappa \in K_S\cup K_D\}$ を同一視する．

n 変数における全次数辞書式順序 $\succ$ に対して，$2n$ 変数の多項式環における項順序 $\succ$ を

$$x^\alpha\xi^\gamma \succ x^{\alpha'}\xi^{\gamma'} \iff \begin{cases} \xi^\gamma \succ \xi^{\gamma'} \text{ または} \\ \gamma=\gamma' \text{ かつ } x^\alpha \succ x^{\alpha'} \end{cases}$$

で与える．これまでに n 変数多項式，$2n$ 変数多項式，代数的局所コホモロジー類に対する項順序を与えているが，混乱はないと思われるので同じ記号 $\succ$ を用いる．

k 階の線形偏微分作用素 $P=\sum a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$ に対し, その主表象を $\sigma(P)$ とおく. さらに, その主表象 $\sigma(P)$ の頭項を $\mathrm{ht}(P)$ と表し, P の頭項と呼ぶことにする.

$|\gamma|=k\in\mathbb{N}$ をみたす多重指数 $\gamma\in\mathbb{N}^n$ に対し,

$$L_\gamma^{(k)}=\{P\in \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)\mid P=a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma+\sum_{\gamma'\prec\gamma}a_{\gamma'}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^{\gamma'}, a_\gamma(x)\in E, |\gamma|=k\}$$

とおき,

$$T_\gamma=\{x^\alpha\in E\mid {}^\exists P\in L_\gamma^{(k)}, \mathrm{s.t.}, \mathrm{ht}(P)=x^\alpha\xi^\gamma\},$$

$$E_\gamma=\mathrm{Span}\{x^\alpha\in E\mid x^\alpha\notin T_\gamma\}$$

とおく. 多重指数 γ と γ' が, 全ての $i=1,\ldots,n$ に対して $\gamma_i\geq\gamma'_i$ であるとすると,

$$E_\gamma\subseteq E_{\gamma'}$$

であることに注意しよう.

$|\gamma|=k\in\mathbb{N}$ となる多重指数 γ に対し, 多重指数 γ' で, 全ての $i=1,\ldots,n$ に対して $\gamma_i\geq\gamma'_i$ であり, かつ, 少なくとも一つの i において $\gamma_i>\gamma'_i$ となるとき, $\gamma>\gamma'$ と書くことにする.

$$E'_\gamma=\cap_{\gamma'<\gamma}E_{\gamma'}$$

とおく. さらに, $k\geq1$ に対し,

$$V_\gamma^{(k)}=\{P\in L_\gamma^{(k)}\mid P=a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma+\sum_{\gamma'\prec\gamma}a_{\gamma'}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^{\gamma'}, a_\gamma(x)\in E'_\gamma, a_{\gamma'}(x)\in E_{\gamma'}\}$$

と逐次的に定める. $V^{(k)}=\oplus_{|\gamma|=k}V_\gamma^{(k)}$ とおく. ここで, $V_\gamma^{(k)}$ の定義において, 線形偏微分作用素 P の頭項にある係数多項式 $a_\gamma(x)$ は, E ではなく E'_γ に属するという条件を課していることに注意しよう.

次が成り立つ.

補題 2.

$$T_\gamma=(\cup_{\gamma'<\gamma}T_{\gamma'})\cup\{x^\alpha\in E'_\gamma\mid {}^\exists P\in V_\gamma^{(k)}, \mathrm{s.t.}, \mathrm{ht}(P)=x^\alpha\xi^\gamma\}$$

が成り立つ.

今, $V^{(1)},\ldots,V^{(k-1)}$ までが求まっているとする. $B^{(j)}$ を $V^{(j)}$ の基底とする. $\cup_{j=1}^{k-1}B^{(j)}=\{P_1,\ldots,P_\ell\}$ が与えられたとしよう. このとき, 定理 1 の membership の判定は以下のアルゴリズムで与えられる.

アルゴリズム 2 (membership). $P=\sum a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$, $g\in\mathcal{J}$ の交換子積

$$(\sum a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma)g-g\sum a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$$

に対して，

$$[P,g]=\sum_{|\gamma|\leq k-1} b_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$$

なる形の表示をライプニッツ則を用いて求める．

1. 各 γ に対し，$b_\gamma(x)$ の $\mathcal{J}$ を法とする標準形 (E における表現) を，Ω_f の基底を用いて求める．

   それらをあたらめて $b_\gamma(x)$ とおき，

$$R=\sum_{|\gamma|\leq k-1} b_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$$

   とおく．

2. $\mathrm{ht}(R)=\mathrm{ht}(P_1)h_1(x,\xi)+\cdots+\mathrm{ht}(P_\ell)h_\ell(x,\xi)$ を満たす $2n$ 変数関数 $h_1(x,\xi),\ldots,h_\ell(x,\xi)$ を求める．

3. $R-(P_1h_1(x,\frac{\partial}{\partial x})+\cdots+P_\ell h_\ell(x,\frac{\partial}{\partial x}))$ をあらためて R とおく．

手順 1 から 3 を繰り返し，$R=0$ となれば $[P,g]\in\mathcal{L}^{(k-1)}(\omega)$ であり，$R=0$ とすることができなければ $[P,g]\notin\mathcal{L}^{(k-1)}(\omega)$ である．

2.3 アルゴリズムの概要

前節で与えたこの判定法を用いることにより，annihilator を次のようにして構成することができる．

アルゴリズム 3 (annihilator の逐次構成法). Ω_f の基底が与えられているとする．

1. $V^{(0)}$ の構成

   $V^{(0)}=J_0$ とおく．

   J_0 の生成元を $B^{(0)}$ とおく．

2. $V^{(1)}$ の構成

   (a) $\gamma=(0,\ldots,0,1)$ に対する $V_\gamma^{(1)}$ の構成
   a_λ を未定係数とし，$a(x)=\sum_{\lambda\neq 0}a_\lambda x^\lambda\in E$ とおき，$R=a(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ とおく．
   条件 $[R,g]\in\mathcal{J}$ を満たす全ての $a(x)$ を求める．
   各 R に対し，$R+h\in\mathcal{L}^{(1)}(\omega)$ となる h を決める．
   $P=R+h$ とおき，これら P 全体のなすベクトル空間 $V_\gamma^{(1)}$ の基底を $B_\gamma^{(1)}$ とおく．
   T_γ を求め，$E_\gamma=E\setminus T_\gamma$ とおく．

(b) $\gamma = (0,\ldots,0,1,0)$ に対する $V_\gamma^{(1)}$ の構成

未定係数を用いて $a_{n-1}(x) = \sum_{\lambda \neq \mathbf{0}} a_{n-1,\lambda} x^\lambda \in E$, $a_n(x) \in E_{(0,\ldots,0,1)}$ をとり, $R = a_{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ とおく.

条件 $[R, g] \in \mathcal{J}$ を満たす $(a_{n-1}(x), a_n(x))$ を全て求める.

各 R に対し, $R + h \in \mathcal{L}^{(1)}(\omega)$ となる h を決める.

$P = R + h$ とおき, これら P 全体のなすベクトル空間 $V_\gamma^{(1)}$ の基底を $B_\gamma^{(1)}$ とおく.

T_γ を求め, $E_\gamma = E \setminus T_\gamma$ とおく.

以下同様に, $|\gamma| = 1$ となる全ての多重指数 γ に対して, $B_\gamma^{(1)}$ を構成し, $B^{(1)} = \cup_{|\gamma|=1} B_\gamma^{(1)}$ とおく.

3. $V^{(j)}$ の構成 ($V^{(0)}, \ldots, V^{(j-1)}$ は構成済みとする.)

$|\gamma| = j$ を満たす γ のうち, 項順序の小さいものから順に $V_\gamma^{(j)}$ を構成していく.

$|\gamma'| = j$, $\gamma' \prec \gamma$ を満たす全ての多重指数 γ' に対する $V_{\gamma'}^{(j)}$ は既に求められているとする.

$V_\gamma^{(j)}$ の構成

$$R = a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma + \sum_{|\gamma'|=j, \gamma' \prec \gamma} a_{\gamma'}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^{\gamma'} + \sum_{|\beta|<j} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta$$

とおく. 但し, $a_\gamma(x) = \sum_{\lambda \neq \mathbf{0}} a_{\gamma,\lambda} x^\lambda \in E'_\gamma$, $a_{\gamma'}(x) \in E_{\gamma'}$, $a_\beta(x) \in E_\beta$ とする.

$[R, g] \in \mathcal{L}^{(j-1)}(\omega)$ を満たす全ての係数多項式の組 $(a_\gamma(x), a_{\gamma'}(x), \beta(x))$ を求める.

各 R に対し, $R + h \in \mathcal{L}^{(j)}(\omega)$ となる h を決める.

$P = R + h$ とおき, これら P 全体のなすベクトル空間 $V_\gamma^{(j)}$ の基底を $B_\gamma^{(j)}$ とおく.

$E_\gamma = E'_\gamma \setminus \{x^\alpha \in E'_\gamma \mid \exists P \in V_\gamma^{(j)}, \text{s.t.}, \text{ht}(P) = x^\alpha \xi^\gamma\}$ とおく.

$|\gamma| = j$ を満たす全ての γ に対し, 順序の小さいものから順に $B_\gamma^{(j)}$ を上の手順によって構成し, $B^{(j)} = \cup_{|\gamma|=j} B_\gamma^{(j)}$ とおく.

このとき, $B^{(0)} \cup B^{(1)} \cup \cdots \cup B^{(j)}$ は $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(j)}(\omega)$ の生成元を与える.

さらに, 上の手順 3 を $j = k$ まで繰り返し, ホロノミック系 $\mathcal{D}_X / \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}^{(k)}(\omega)$ の重複度 $\mu_f^{(k)}$ が 1 となれば, $B^{(0)} \cup B^{(1)} \cup \cdots \cup B^{(k)}$ が $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ の生成元を与える.

一般に, 偏微分作用素 P が $Ann_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega)$ に属するならば, $\sigma(P)(x,\xi)=\sum a_\gamma(x)\xi^\gamma$ となる全ての $a_\gamma(x)$ に対し $a_\gamma(x)$ は原点における極大イデアルに属する. 上記のアルゴリズムはこの事実に基づいていることを注意しておく.

本稿で与えた方法は, 特異点の定義関数 f がパラメーターを含んでいる場合にも対応させることができる. 詳細に関しては, 別の機会に述べることにする. 命題2.1で述べたように, Ω_f の基底を用いることで, $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の基底単項式を求めることができる. この結果とグロタンディック双対性を用いると, $\mathcal{J}$ のグレブナ基底を効率的に求めるアルゴリズムを導出することができる. また, 本稿の membership の計算で用いた normal form の計算なども可能となる. これらについても, あらためて別の機会に述べることにする.

References

[1] 阿部隆行, 田島慎一, 「孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナ基底の計算法」, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定.

[2] B. MOURRAIN, *Isolated points, duality and residues*, J. Pure and Appl. Alg. **117** & **118** (1997), 469–493.

[3] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *Unimodal singularities and differential operators*, Séminaires et Congrès **10**, Société Mathématique de France, (2005), 191–208.

[4] 中村弥生, 田島慎一, 「Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について」, 京都大学数理解析研究所講究録, **1431** (2005), 55–67.

[5] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities*, Proceedings of the third Franco-Japanese Symposium, to appear.

[6] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities*, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 1–10.

[7] 田島慎一, 中村弥生, 「零次元代数的局所コホモロジー類に付随するホロノミック系の構成アルゴリズム」, 京都大学数理解析研究所講究録, **1412** (2005), 189–198.

[8] 田島慎一, 「零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について」, 京都大学数理解析研究所講究録, **1456** (2005), 126–132.