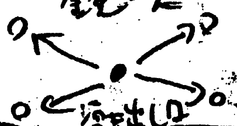
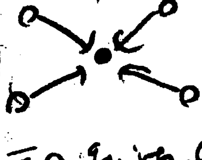
数理解析研究所講究録
1507巻 2006年 64-74

部分因子環の竹崎双対性とquiverのHilbert表現の双対性

九州大学・大学院数理学研究院　綿谷安男
Kyushu University　Watatani, Yasuo

0 はじめに

作用素環における竹崎双対性はアーベル群のポントリャーギン双対性を越えて因子環の構造定理まで到達した基本的なものである。その部分因子環版を考察するとquiver(有向グラフ)のヒルベルト空間と作用素による表現に表われる双対性と類似がみえてくるというのを示したい。どちらも双対を1回とることが「向き」を反転することに相当し、2回双対をとると「向き」がもう1回反転して元に戻るという構造になっている。

	群	von Neumann 環	部分因子環	quiver (有向グラフ)
元の対象	局所アーベル群 G	M: von Neumann 環 $\alpha: G \to \mathrm{Aut}\, M$ 接合積 $M \rtimes_\alpha G$	M: II_1 factor N: subfactor $N \subset M$	Γ: quiver, (H, f): ヒルベルト表現 
双対の対象	$\hat{G}$ $= \{\chi \mid \chi: G \to \mathbb{T}\}$ 指標	$\hat{G}$による接合積 $(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$	e_N: Jones projection $N \subset \langle M, e_N \rangle$ basic construction	$\hat{\Gamma}$: ひで反転したquiver $(\hat{H}, \hat{f})$: ヒルベルト表現のひで鏡映 
双対性	$\hat{\hat{G}}$ $\cong G$	$((M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ $\cong M \otimes B(L^2(G))$ $\hat{\hat{\alpha}} = \alpha \otimes \mathrm{Ad}\lambda$	$\langle\langle M, e_N \rangle, e_M \rangle$ $\cong M$ 森田同値 射影 e_M $(\mathrm{tr}(e_M) = \frac{1}{[M:N]})$ で$\langle\langle M, e_N \rangle, e_M \rangle$ を切ると M と同型	$(\hat{\hat{\Gamma}}) \cong \Gamma$ $(\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{f}})$ $\cong (H, f)$  元のquiverの ヒルベルト表現 と同型

1 部分因子環の双対性

M : II_1-factor

$N \subset M$: subfactor

で Jones index $[M:N] < \infty$ を仮定

$E_N : M \longrightarrow N$ を条件付期待値

$\eta : M \longrightarrow L^2(M, \tau)$ をうめこみで

$$(\eta(x)|\eta(y)) = \tau(y^* x)$$

$e_N : L^2(M, \tau) \longrightarrow L^2(N, \tau)$ を Jones projection [J]

$$e_N(\eta(x)) = \eta(E_N(x))$$

$\langle M, e_N \rangle$: Jones の basic construction，つまり，M と e_N で生成された von Neumann algebra on $L^2(M, \tau)$

例 M : II_1-factor

G : 有限群

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, M$ を outer action で $N \underset{\text{おく}}{=} M^G$

この時 $E_N : M \longrightarrow N$ は $E_N(m) = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \alpha_g(m)$

ユニタリ $u_g \in B(L^2(M, \tau))$ を $u_g \eta(x) = \eta(\alpha_g(x))$ で定める

$$u_g m u_g^* = \alpha_g(m) \quad (m \in M)$$

接合積 $M \rtimes_\alpha G \triangleq \{ \sum_{g \in G} x_g u_g \mid x_g \in M \}$

$$\langle M, e_N \rangle \cong M \rtimes_\alpha G$$

$$e_N = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} u_g$$

Jones 指数は

$$[\langle M, e_N\rangle : M] = [M \rtimes_\alpha G : M] = \# G$$

特に G が有限アーベル群とする。

$\hat{\alpha} : \hat{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(M \rtimes G)$ を dual action

$$\Rightarrow (M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong M \otimes B(\ell^2(G))$$

(竹崎 duality)

$$\cong M \otimes M_n(\mathbb{C}), \quad n = \# G$$

一方 $(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong \langle\langle M, e_N\rangle, e_M\rangle$

よってこの場合に上の2つを組み合わせると、

$$\langle\langle M, e_N\rangle, e_M\rangle \cong M \otimes M_n(\mathbb{C})$$

$$n = \# G = [M : N]$$

これが竹崎の双対定理になる。

- 一般の subfactor $N \subset M$ の場合は Jones 指数 $[M : N]$ は整数ではないが、

$$\langle\langle M, e_N\rangle, e_M\rangle \cong M \otimes M_{[M:N]}(\mathbb{C})$$

を $e_M(\langle\langle M, e_N\rangle, e_M\rangle)e_M \cong M$ と解釈できる

ここで e_M は trace の値が $[M:N]^{-1}$ の projection である。

● 因子環のガロア理論 (Paragroupについては[E-K]をみよ)

M : II_1-factor

G : 有限群

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, M$ は outer action

$N = M^G$: 不動点環

$\Rightarrow \{K \mid N \subset K \subset M$ は中間因子環$\} \overset{\text{ガロア対応}}{\Longleftrightarrow} \{H \mid H \subset G$ は部分群$\}$

$$K = M^H$$

一般の部分因子環の時については

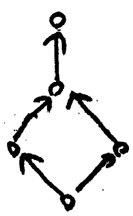
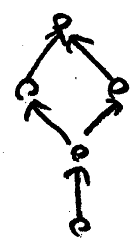
$\boxed{\text{Theorem}}$ [W]

M : II_1-factor
$N \subset M$: subfactor
$[M:N] < \infty$
$N' \cap M = \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ 中間因子環全体 $\mathcal{L}$ は有限束になる。

さらに $M \subset \langle M, e_N \rangle$ の中間因子環全体のつくる有限束 $\hat{\mathcal{L}}$ は $N \subset M$ の中間因子環全体のつくる有限束 $\mathcal{L}$ の双対になっている。包含関係 $\subset$ を o⟶o とグラフの矢印でかくと

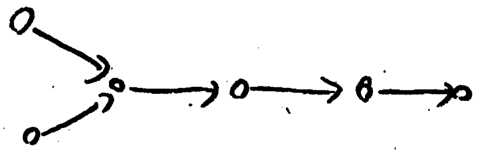
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \langle M, e_N \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \langle M, e_{K_1} \rangle \arrow[dr, dash] & & \langle M, e_{K_2} \rangle \arrow[dl, dash] \\ & M \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ K_1 \arrow[dr, dash] & & K_2 \arrow[dl, dash] \\ & N & \end{tikzcd}$$

例 $\mathcal{L}$ ＝  $\Rightarrow$ $\hat{\mathcal{L}}$ ＝ 

$\boxed{2}$ Quiver の Hilbert 表現の双対性

$\boxed{\text{Def}}$ 有向グラフ $\Gamma = (V, E, s, r)$ をここでは <u>quiver</u> という。つまり

$\begin{cases} V: \text{頂点全体} \\ E: \text{辺全体} \end{cases}$ $\underset{x}{\circ} \xrightarrow{e} \underset{y}{\circ}$ の時 $s(e) = x$: 始点
$r(e) = y$: 終点



$\boxed{\text{Def}}$ (H, f) が quiver Γ の Hilbert 表現

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $H = (H_x)_{x \in V}$: Hilbert 空間の族
$f = (f_e)_{e \in E}$: bounded operator の族

s.t. $\underset{x}{\circ} \xrightarrow{e} \underset{y}{\circ}$ には $H_x \xrightarrow{f_e} H_y$ が対応している

$\boxed{\text{Def}}$ (H, f) と (K, g) を Γ の Hilbert 表現
$\varphi : (H, f) \longrightarrow (K, g)$ が <u>homomorphism</u> (isomorphism) resp

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi = (\varphi_x)_{x \in V} : H_x \longrightarrow K_x$ は bounded operator (invertible) resp. の族

s.t. $\begin{array}{c} \overset{x}{\circ} \\ e \big\downarrow \\ \underset{y}{\circ} \end{array}$ には

$$\begin{tikzcd} H_x \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "f_e"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & K_x \arrow[d, "g_e"] \\ H_y \arrow[r, "\varphi_y"] & K_y \end{tikzcd}$$

が可換図式になる

$\boxed{\text{Def}}$ (直和) $(H, f) = (K, g) \oplus (K', g')$ $\quad \overset{x}{\circ} \xrightarrow{e} \overset{y}{\circ}$

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x \in V \quad H_x = K_x \oplus K'_x$

$\forall e \in E \quad f_e = g_e \oplus g'_e : K_x \oplus K'_x \to K_y \oplus K'_y$

$\boxed{\text{Def}}$ (零対象) $(H, f) = 0$

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x \in V \quad H_x = 0$

$\boxed{\text{Def}}$ (H, f) を Γ の Hilbert 表現

(H, f) が <u>decomposable</u>

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists (K, g) \neq 0, \ \exists (K', g') \neq 0$

$(H, f) \cong (K, g) \oplus (K', g')$

$\boxed{\text{Def}}$ (H, f) が <u>indecomposable</u> (直既約)

$\underset{\text{def}}{\iff}$ (H, f) は decomposable ではない

$\boxed{\text{例}}$ 拡大ディンキン図形 $\tilde{E}_6$ に次のように向きをつけた quiver Γ のヒルベルト表現を次できめると直既約になる

$K = \ell^2(\mathbb{N})$ 上の unilateral shift を S とする

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[d] & F_2 \arrow[d] & F_3 \arrow[d] \\
E_1 \arrow[dr] & E_2 \arrow[d] & E_3 \arrow[dl] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

$H = K \oplus K \oplus K$

$E_1 = K \oplus K \oplus 0 \supset F_1 = \{(x, x, 0) \in H \mid x \in K\}$

$E_2 = 0 \oplus K \oplus K \supset F_2 = \{(0, x, Sx) \in H \mid x \in K\}$

$E_3 = K \oplus 0 \oplus K \supset F_3 = \{(x, 0, x) \mid x \in K\}$

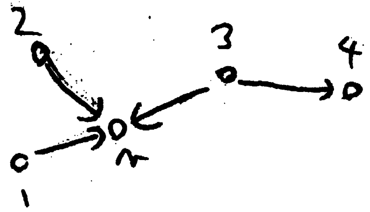
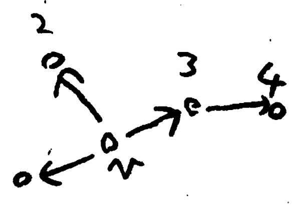
$\boxed{\text{Theorem}}$ [EW2]

連結な有限無向グラフ G で，どんな向きづけを入れてつくった quiver Γ にも無限次元直既約 Hilbert 表現が存在しない。

$\Longrightarrow$ G はディンキン図形の $\underset{(n\geq 1)}{A_n}$ か $\underset{(n\geq 4)}{D_n}$ か E_6, E_7, E_8

$\boxed{\text{Def}}$ 鏡映関手

Γ を quiver に吸いこみ口 $v\in V$ があったとせよ。
この時 v から出てゆく辺の向きのみを反転したものを
$\sigma_v^+(\Gamma)$ とかこう。例えば

Γ :  の時 $\sigma_v^+(\Gamma)$ 

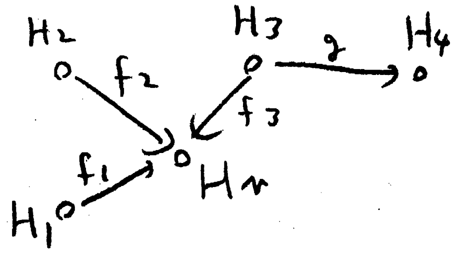
Γ の Hilbert 表現 (H, f) が与えられた時，
$\sigma_v^+(\Gamma)$ の Hilbert 表現 (H^+, f^+) を次で定義する：

$x \neq v \Rightarrow H_x^+ = H_x$

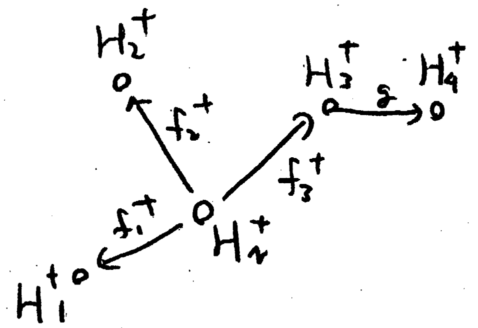
$x = v \Rightarrow H_v^+ = \left\{ (x_u)_u \in \bigoplus_{(u,v)\in E} H_u \;\middle|\; \sum_{u \xrightarrow{e} v} f_e(x_u) = 0 \right\}$

$$f_e^+ : H_v^+ \longrightarrow H_u$$
$$(x_u)_u \longmapsto H_u$$

例えば



なら



$$\begin{cases} H_v^+ = \{ (x_1, x_2, x_3) \in H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \mid \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i) = 0 \} \\ f_i^+ : H_v^+ \longrightarrow H_i \text{ は } f_i^+(x_1, x_2, x_3) = x_i \end{cases}$$

この時

$\Phi_v^+(H, f) = (H^+, f^+)$ とおいて (H, f) に $\Phi_v^+(H, f)$ を対応させるのを鏡映関手 Φ_v^+ という。

同様に quiver Γ に湧き出し口 $v \in V$ があったとせよ。この時 v にいってくる辺の向きのみを反転したものを $\sigma_v^-(\Gamma)$ とかこう。Γ の Hilbert 表現 (H, f) が与えられた時，$\sigma_v^-(\Gamma)$ の Hilbert 表現 (H^-, f^-) を次で定義する：

$x \neq v \Rightarrow H_x^- = H_x$

$x = v \Rightarrow H_v^- = \{ f_{(v,u)}(x) \in \bigoplus_{(v,u) \in E} H_u \mid x \in H_v \}^\perp \cap \bigoplus_{(v,u) \in E} H_u$

$$f_e^- : \begin{array}{ccc} H_u & \longrightarrow & H_v^- \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x_u & \longmapsto & \mathrm{Proj}_{H_v^-}(0, \dots, 0, x_u, 0, \dots) \end{array}$$

この時 $\Phi_v^-(H, f) = (H^-, f^-)$ とおいて，(H, f) に $\Phi_v^-(H, f)$ を対応させるのを鏡映関手 Φ_v^- という

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Hilbert表現の双対性 I) [EW2]

quiver Γ の Hilbert 表現 (H, f) を考える。

$v \in V$ は吸い込み口とし、(H, f) が v で full と仮定する。つまり $\{\sum_u f_{(u,v)}(x_u) \mid x_u \in H_u, (u,v) \in E\} = H_v$

$\Rightarrow \Phi_v^- \Phi_v^+ (H, f) \cong (H, f)$

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Hilbert表現の双対性 II) [EW2]

quiver Γ の Hilbert 表現 (H, f) を考える。

$v \in V$ は湧き出し口とし、(H, f) が v で co-full と仮定する。つまり $\{\sum_u f^*_{(u,v)}(x_u) \mid x_u \in H_u, (v,u) \in E\} = H_v$

$\Rightarrow (H, f) \cong \Phi_v^+ \Phi_v^- (H, f)$

(注) ヒルベルト空間の部分空間の配置については [EW1] で研究を開始した。Quiver の Hilbert 表現はちょうどそれを quiver (有向グラフ) に沿って部分空間を配置することに当たる。Jones の部分因子環の理論とこの quiver の Hilbert 表現は直接の関係は無いが、どうもある種の双対性が成立する。この類似の底に流れているものを考えるのが課題である。

《References》

[EK] D. Evans and Y. Kawahigashi, Quantum Symmetries on Operator Algebras, Oxford Univ. Press, 1998

[EW1] M. Enomoto and Y. Watatani, Relative Position of four subspaces in a Hilbert space, to appear in Advances Math.

[EW2] M. Enotomo and Y. Watatani, Hilbert representations of quivers, (準備中)

[J]. V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-15.

[W] Y. Watatani, Lattices of intermediate subfactors, J. Funct. Analy. 140 (1996), 312-334.