

TASOEV型連分数の有理近似

弘前大学・理工学部 小松 尚夫 (TAKAO KOMATSU)
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
HIROSAKI UNIVERSITY

1. 序論

Hurwitz連分数は

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{Q_1(k), \dots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty} \\ = [a_0; a_1, \dots, a_n, Q_1(1), \dots, Q_p(1), Q_1(2), \dots, Q_p(2), Q_1(3), \dots]$$

という形をしている擬似周期的単純連分数である. ここで a_0 は整数, a_1, \dots, a_n は正整数, Q_1, \dots, Q_p は有理係数多項式で, $k = 1, 2, \dots$ に対して正整数値を取り, 少なくとも一つは定数ではない.

Tasoev連分数 ([8], [10]) も擬似周期的ではあるが, $Q_j(k)$ が多項式ではなく k の指数である点で異なる. 筆者は[2]で, Tasoevが提唱したが間違いを含んでいた $[0; \overbrace{a^k, \dots, a^k}]_{k=1}^{\infty}$ という連分数の閉じた形を正しく求め, また[3]においてある種の拡張形を見出した. すなわち,

$$[0; \overline{ua^k}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}},$$

$$[0; ua - 1, 1, \overline{ua^{k+1} - 2}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}},$$

$$[0; \overline{ua^k, va^k}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}},$$

$$[0; ua - 1, 1, va - 2, 1, \overline{ua^{k+1} - 2, 1, va^{k+1} - 2}]_{k=1}^{\infty} \\ = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}$$

などを得た.

[4] では, ある種の周期3のTasoev 連分数が得られた. すなわち,

$$[0; \overline{ua^{2k-1} - 1, 1, va^{2k} - 1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}},$$

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究(C)(2) 15540021の補助を受けた。

$$[0; \overline{ua^k - 1, 1, va^k - 1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - (-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - (-1)^i)^{-1}}$$

などである。

[5] では、別の種類の周期3のTasoev連分数が得られた。すなわち、

$$[0; \overline{ua^k - 1, 1, v - 1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} v^{-2n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} ((uv)^{-2n} a^{-n^2} - (uv)^{-2n-1} a^{-(n+1)^2}) \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}},$$

$$[0; \overline{v - 1, 1, ua^k - 1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (u^{-2n} v^{-2n-1} a^{-n^2} + u^{-2n-1} v^{-2n-2} a^{-(n+1)^2}) \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (uv)^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}$$

などである。これらはeのタイプのHurwitz連分数に対応するものと考えられる。

様々なHurwitz連分数の有理近似が多く著者によって考えられてきた。より一般のHurwitz連分数に対する結果として、Tasoev [10]は特に次の結果を得た。 $\alpha = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_s, c_1 + kd_1, \dots, c_m + kd_m}]_{k=1}^{\infty}$ とする、ここで a_0 は整数で、それ以外の部分商はみな正整数値をとるものとする。 $\Omega (> 0)$ を0でない d_i の個数とし、 $d = \max_{1 \leq i \leq m} d_i$ とおく。このとき、 $C = \Omega/d$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) \frac{\log \log q}{q^2 \log q}$$

が無限個の p, q について成り立ち、一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) \frac{\log \log q}{q^2 \log q}$$

であるような正定数 q_0 が存在する。

Tasoevは指数の場合の結果も与えている。整数 $a_0, a > 1, m > 1$ に対して $\alpha = [a_0; \underbrace{a^k, \dots, a^k}_{m}]_{k=1}^{\infty}$ とおく。すると $C = 1/\sqrt{a}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / (m \log q)}}$$

が無限個の p, q について成り立ち、一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / (m \log q)}}$$

であるような a, m, ϵ に依存する正定数 q_0 が存在する。似たような結果は[9]にも見られるが、残念ながら誤りも多く、重要な結果とは思えない。

[4]で見られるように, Tasoev連分数のうちのあるタイプのは Rogers-Ramanujan連分数のうちのあるタイプのも的一致する. この観点から, Rogers-Ramanujan連分数の有理近似を考えてみることは有益であるが, 知られている結果は極めて少ない. 塩川[7]の有理近似の結果は希少価値がある. $f(\alpha, x)$ を $f(\alpha, x) = 1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha x^2}{1} + \frac{\alpha x^3}{1} + \dots$ によって定義される Rogers-Ramanujan連分数とする. $a (\geq 2)$, b, d を $\gcd(b, d) = 1$ である正整数とし, d は a を割り切るものとする. また, $(d/b)^2 > a$ のとき $C = \sqrt{b/d}$, それ以外のとき $C = \sqrt{d/(ab)}$ とおく. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| f\left(\frac{d}{b}, \frac{1}{a}\right) - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon)q^{-2 - \sqrt{\log a / \log q}}$$

が無限個の p, q について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| f\left(\frac{d}{b}, \frac{1}{a}\right) - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon)q^{-2 - \sqrt{\log a / \log q}}$$

であるような正整数 $q_0 = q_0(a, b, d, \epsilon)$ が存在する. $f(d/b, 1/a) = [1; \overline{ba^k/d, a^k}]_{k=1}^{\infty}$ となつて, この Rogers-Ramanujan連分数は Tasoev型の連分数に一致することに注意する.

この原稿では

$$\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_s, \overline{u_1 a_1^k + v_1, \dots, u_m a_m^k + v_m}]_{k=1}^{\infty}$$

というタイプの一般的な Tasoev型の連分数の有理近似を与える. ここで, b_0 は整数, b_1, \dots, b_s は正整数, $u_j a_j^k + v_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) は $k = 1, 2, \dots$ に対して正整数値を取り, u_j のうち少なくとも一つは 0 でない.

2. 主結果

上述の実数 α は一般的な形をしてはいるが, 非循環部を取り除き, $u_j = 0$ となる部分をまとめて

$$\alpha = [0; \overline{u_1 a_1^k + v_1, \dots, u_r a_r^k + v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+l}}]_{k=1}^{\infty}$$

という場合を考えれば十分である. ここで $u_j > 0$ ($1 \leq j \leq r$) で $r + l = m$ である.

定理 1. $A = a_1 \dots a_r$, $U = \prod_{j=1}^r u_j$, $V = \prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}$ とおく. このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (1 + \epsilon)q^{-2 - C^*}$$

が無限個の整数 p, q について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (1 - \epsilon)q^{-2 - C^*}$$

であるような a_j, u_j ($1 \leq j \leq r$), v_j ($1 \leq j \leq m$), ϵ に依存する正定数 q_0 が存在する, ここで

$$C^* = \max_{1 \leq j \leq r} \left(\left(\log(u_j \sqrt{a_j}) - \frac{\log a_j \log(a_1 \dots a_{j-1} UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q} + \frac{\sqrt{2} \log a_j}{\sqrt{\log A \cdot \log q}} \right).$$

注. (1) もし $r = m$, $u_j = 1$, $a_j = a$, $v_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$)ならば, 定理 1 は上記の Tasoev の近似の結果と一致する.

(2) もし $r = m = 2$, $u_1 = b/d$, $a_1 = a_2 = a$, $v_1 = v_2 = 0$ ならば, 定理 1 は上記の 塩川 の近似の結果と一致する.

定理 1 は一見するとかなり複雑な形をしているが, 今までに知られている Tasoev 連分数に応用してみると割とすっきりした結果に落ち着く. 例として幾つか挙げよう.

例 1.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}} \\ &= [0; ua^{2k-1} - 1, 1, va^{2k} - 1]_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

という Tasoev 連分数を考える. 定理 1 で $r = 2$, $l = 1$, $a_1 = a_2 = a^2$, $u_1 = u/a$, $u_2 = v$, $v_1 = v_2 = -1$, $v_3 = 1$ とおく. また

$$C = \begin{cases} \sqrt{v/(ua)} & (u \geq v \text{ のとき}) \\ \sqrt{u/(va)} & (u < v \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

が無限個の整数 p, q について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

であるような正定数 $q_0 = q_0(a, u, v, \epsilon)$ が存在する.

例 2.

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} v^{-2n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} ((uv)^{-2n} a^{-n^2} - (uv)^{-2n-1} a^{-(n+1)^2}) \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}} \\ &= [0; ua^k - 1, 1, v - 1]_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

という Tasoev 連分数を考える. 定理 1 で $r = 1$, $l = 2$, $a_1 = a$, $u_1 = u$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = v - 1$ とおく. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{v-1}{\sqrt{a}} + \epsilon \right) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

が無限個の整数 p, q について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \left(\frac{v-1}{\sqrt{a}} - \epsilon \right) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

であるような正定数 $q_0 = q_0(a, u, v, \epsilon)$ が存在する.

例 3.

$$\begin{aligned}\gamma &= [0; \overline{ua^k, va^k}]_{k=1}^{\infty} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}\end{aligned}$$

というTasoev連分数を考える. 定理1で $r = 2$, $l = 0$, $a_1 = a_2 = a$, $u_1 = u$, $u_2 = v$ とおく. また

$$C = \begin{cases} \sqrt{v/(ua)} & (v/u \leq \sqrt{a} \text{ のとき}) \\ \sqrt{u/v} & (v/u > \sqrt{a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) q^{-2 - \sqrt{\log a / \log q}}$$

が無限個の整数 p, q について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) q^{-2 - \sqrt{\log a / \log q}}$$

であるような正定数 $q_0 = q_0(a, u, v, \epsilon)$ が存在する.

γ の代わりに, $[0; \overline{ua - 1, 1, va - 2, 1, ua^{k+1} - 2, 1, va^{k+1} - 2}]_{k=1}^{\infty}$ や $[0; \overline{ua^k - 1, 1, va^k - 1}]_{k=1}^{\infty}$ などのTasoev型連分数を考えても, これと同じ結果となる.

3. 定理 1 の証明

定理の証明には次が必要である.

補題 1. $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ をある連分数, その近似分数を $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ ($n = 0, 1, \dots$) とする. もし $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_{n+1})^{-1} < \infty$ ならば, $q_n / (a_1 a_2 \cdots a_n)$ は $n \rightarrow \infty$ で, ある有限な 0 でない極限に収束する.

証明 ([6], Lemma 1). 定義により

$$q_1 = a_1, \quad q_2 = a_1 a_2 \left(1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right),$$

$$\begin{aligned}q_3 &= a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left(1 + \frac{1}{a_2 a_3} \left(1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right)^{-1} \right) \\ &= a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left(1 + \frac{t_2}{a_2 a_3} \right)\end{aligned}$$

が $1/2 \leq t_2 < 1$ である t_2 について成り立つ. 同様に

$$q_n = a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{t_j}{a_j a_{j+1}} \right)$$

が $1/2 < t_j < 1$ である t_j ($3 \leq j \leq n-1$) について成り立つ。よって, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_{n+1})^{-1} < \infty$ ならば, $q_n / (a_1 a_2 \cdots a_n)$ は $n \rightarrow \infty$ で, ある有限な 0 でない極限に収束する。

定理 1 の証明. $n = (k-1)m$ のとき, $a_{n+1} = u_1 a_1^k + v_1$ かつ

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^r (u_j a_j^i + v_j) \cdot \prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}^{k-1}$$

を得る. 補題 1 より

$$\begin{aligned} \log q_n &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^r \log(u_j a_j^i + v_j) + \sum_{\nu=1}^l \log v_{r+\nu}^{k-1} + O(1) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \log A + (k-1) \log(UV) + O(1) \\ &= \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\log(UV)}{\log A} \right)^2 \frac{\log A}{2} + O(1) \end{aligned}$$

であるから,

$$k \sim \frac{1}{2} - \frac{\log(UV)}{\log A} + \sqrt{\frac{2 \log q_n}{\log A}}$$

となる. よく知られているように,

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

である, ここで $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots]$. 従って,

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| &\sim \frac{1}{u_1 q_n^{k \log a_1 / \log q_n} q_n^2} \\ &\sim q_n^{-2 - \left(\log(u_1 \sqrt{a_1}) - \frac{\log a_1 \log(UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2} \log a_1}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}} \end{aligned}$$

を得る. $n = (k-1)m + 1$ のとき, $a_{n+1} = u_2 a_2^k + v_2$ かつ

$$a_1 a_2 \cdots a_n = (u_1 a_1^k + v_1) \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^r (u_j a_j^i + v_j) \cdot \prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}^{k-1}$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned} \log q_n &= \log(u_1 a_1^k + v_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^r \log(u_j a_j^i + v_j) + \sum_{\nu=1}^l \log v_{r+\nu}^{k-1} + O(1) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \log A + (k-1) \log(UV) + k \log a_1 + \log u_1 + O(1) \\ &= \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\log(a_1 UV)}{\log A} \right)^2 \frac{\log A}{2} + O(1) \end{aligned}$$

であるから,

$$k \sim \frac{1}{2} - \frac{\log(a_1 UV)}{\log A} + \sqrt{\frac{2 \log q_n}{\log A}}$$

が得られる. 従って,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \sim \frac{1}{u_2 q_n^{k \log a_2 / \log q_n} q_n^2} \\ \sim q_n^{-2 - \left(\log(u_2 \sqrt{a_2}) - \frac{\log a_2 \log(a_1 UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2} \log a_2}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}}$$

を得る. 同様に, $n = (k-1)m + (j-1)$ ($j = 1, 2, \dots, r$)のとき,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \sim q_n^{-2 - \left(\log(u_j \sqrt{a_j}) - \frac{\log a_j \log(a_1 \dots a_{j-1} UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2} \log a_j}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}}$$

を得る. 他方, $n = (k-1)m + (r-1+\nu)$ ($\nu = 1, 2, \dots, l$)のとき,

$$\frac{1}{(v_{r+\nu} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{v_{r+\nu}q_n^2}$$

を得る.

REFERENCES

- [1] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions: Analytic theory and applications*, (Encyclopedia of mathematics and its applications; vol. 11), Addison-Wesley, Reading, 1980.
- [2] T. Komatsu, *On Tasoiev's continued fractions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 1-12.
- [3] T. Komatsu, *On Hurwitzian and Tasoiev's continued fractions*, Acta Arith. **107** (2003), 161-177.
- [4] T. Komatsu, *Tasoiev's continued fractions and Rogers-Ramanujan continued fractions*, J. Number Theory **109** (2004), 27-40.
- [5] T. Komatsu, *Hurwitz and Tasoiev continued fractions*, Monatsh. Math. (2004), DOI 10.1007/s00605-004-0281-0 (online).
- [6] I. Shiokawa, *Rational approximations to the values of certain hypergeometric functions*, Number Theory and Combinatorics, Japan 1984 (J. Akiyama et. al., eds.), World Sci. Publ. Co., Singapore, 1985, pp. 353-367.
- [7] I. Shiokawa, *Rational approximations to the Rogers-Ramanujan continued fraction*, Acta Arith. **50** (1988), 23-30.
- [8] B. G. Tasoiev, *Certain problems in the theory of continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **16/17** (1984), 53-83. (Russian)
- [9] B. G. Tasoiev, *Rational approximations to some infinite continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **24** (1988), 104-138. (Russian)
- [10] B. G. Tasoiev, *Rational approximations to certain numbers*, Mat. Zametki **67** (2000), 931-937; English transl. in Math. Notes **67** (2000), 786-791.

TAKAO KOMATSU
 FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
 HIROSAKI UNIVERSITY
 HIROSAKI, 036-8561
 JAPAN
 komatsu@cc.hirosaki-u.ac.jp