数理解析研究所講究録
1511巻 2006年 1-9

3/2数系とMahlerの問題

秋山 茂樹 (AKIYAMA Shigeki)
新潟大・理 (Faculty of Science, Niigata Univ.)

1 はじめに

3/2をベースとするとても奇妙な数系は、J.Sakarovitch と Ch. Frougny の発案による。私がこの話を始めて聞いたのは2000年の6月末に初めてパリ第七大学にFrougny を訪問した際である。彼等は、この正整数を表す数系の基本的な性質をいくつか調べたのだが、どれも初等的な観察であり論文にするには内容不足と考えたらしい。告白すれば、初めてこの数系の話を少し考えたとき、少しまっとうな数学の本筋から外れた世界と感じた。だが直感はあまりあてにならないことが多い。その後数年が過ぎ、JSPSの日仏二国間交流の援助によって彼等が新潟大学に滞在した際、彼等のまとまった話を聞き議論することができた。このとき重要な進歩があった。第一にこの数系が実数の表示にも用いることができる。第二にこの数系による正の実数表示が $(3/2)^n$ $(n=1,2,\dots)$ 等の数列の小数部分の分布と直接関係があるのである。この観察によりこの数系は、数論、言語理論などの境界に属する大変興味深い対象に成長した。まだ多くないが、新しい知見が出てきている。本稿では、そのいくつかを紹介する。詳しい結果は [2] および [1] にまとめられている。

2 p/q 数系の定義

互いに素な整数 p,q を $1<q<p$ にとり既約な有理数 p/q を固定する。アルファベットを $\mathcal{A}=\{0,1,\dots,p-1\}$ とする。このとき任意の正整数 n は次のような表示をもつ。

$$n=\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^i \qquad a_i\in\mathcal{A} \tag{1}$$

すなわち、10進法のベース 10^i にあたる部分が $\frac{1}{q}(\frac{p}{q})^i$ $(i=0,1,\dots)$ に変わったものを考える。環 $\mathbb{Z}(q)=\{z/q^n \mid z\in\mathbb{Z},\ n=0,1,\dots\}$ において $\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^i\in\mathbb{Z}(q)$ は p で割り切れるので $a_0/q\equiv n \pmod p$ すなわち $a_0\equiv qn \pmod p$ により a_0 が定まる。10進表記の類似をたどり誤解の恐れが無いとき (1) の右辺を $a_m a_{m-1}\dots a_0$

と書く。a_0 を決定する操作を繰り返せば表示は一意的に剰余アルゴリズムにより下から $a_0, a_1, \ldots$ の順に定まっていくことがわかる。言い換えると、次のような計算により正整数 n の (1) 表示ができる。$n_0 = n$ とおき

$$qn_i = pn_{i+1} + a_i, \qquad a_i \in \mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

により、非負整数列 n_i と a_i を定めればよい。n_i は減少列なので明らかに有限回で 0 に到達し表示を得る。

Example 2.1. $p = 3$, $q = 2$ とすれば表題の 3/2 数系となる。右辺が 3/2 数系の表示である。

$$\begin{aligned}
1 &= 2 \\
2 &= 21 \\
3 &= 210 \\
4 &= 212 \\
5 &= 2101 \\
6 &= 2120 \\
7 &= 2122 \\
8 &= 21011 \\
9 &= 21200 \\
10 &= 21202
\end{aligned}$$

3 加速された加法機械

数系において文字列上 $n \to n+1$ を行う機械を加法機械 (adding machine) という。例えば 3 進法で $b_n b_{n-1} \ldots b_0$ に 1 を足すのは、

1. $i = 0$ とする。

2. もし b_i が 0,1 ならば $b_i \to b_i + 1$ で終了。

3. もし b_i が 2 ならば $b_i = 0$, $i \to i+1$ として **2.** に戻る。

という形で実現される。ここでの計算は $b_n b_{n-1} \ldots b_0$ をこれに左に 0 を無限回付け加えた $\ldots 0 b_n b_{n-1} \ldots b_0$ と同一視している。無論これはオートマトンによって記述される。B.Pascal の発明した歴史上最初の計算機は、このオートマトンを歯車の回転で実現するものであった。繰り上がりが生じる毎に、となりの歯車が +1 動くのである。

この歯車を 2 倍に「加速する」ことを考えよう。1 を足すのは +2 の操作であり 1, 2 のときは 3 に到達するか通り越すので繰り上がる。しかしその繰り上がりは次の桁に +2 を行う操作なのである！

1: $i=0$ とする。

2: もし b_i が 0 ならば $b_i \to b_i+2$ で終了。

3: もし b_i が 1 ならば $b_i=0, i\to i+1$ として **2:** に戻る。

4: もし b_i が 2 ならば $b_i=1, i\to i+1$ として **2:** に戻る。

この計算で例 2.1 の表が簡単に再構成される。このことは一般の p/q 数系でも全く同様である。

一般に整数の有限集合 $\mathcal{B}$ をアルファベットととし、正整数 n に

$$n=\sum_{i=0}^{m}\frac{b_i}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^i, \quad b_i\in\mathcal{B}$$

という表示が与えれたとき、n を p/q 数系表示に変換する有限オートマトン（正規化オートマトン）が存在することが容易にわかる。なぜなら、$\mathcal{B}$ の桁を下から順に剰余アルゴリズムで $\mathcal{A}$ の元に変換するのだが、その際生じる繰り上がりの可能性も有限だからである。このことは p/q 数系での二つの数の和や差を計算するオートマトンが存在することを意味している。このように p/q 数系は、算術的に扱いやすい対象に思えるが、次節で示すようにその生成する言語は大変難しい対象なのである。

4 p/q 数系の言語

$\mathcal{A}$ の有限語の全体を $\mathcal{A}^*$ と書く。$\mathcal{A}^*$ は語の連結を演算とし空語 ε を単位元とするモノイドである。空語でないものの全体を $\mathcal{A}^+=\mathcal{A}^*\setminus\{\varepsilon\}$ と書くのが常用の記号である。$L(p/q)$ を p/q 数系による自然数 $\mathbb{N}$ の表示[1]から得られる語の全体からなる $\mathcal{A}^*$ の部分集合とする。すなわち $L(p/q)$ は p/q 数系の言語である。

この言語を研究するために $\mathbb{N}$ から自身への部分関数 τ_a $(a\in\mathcal{A})$ を

$$\tau_a(z)=\begin{cases}\frac{pz+a}{q} & \text{if } \frac{pz+a}{q}\in\mathbb{N}\\ \text{定義しない} & \text{if } \frac{pz+a}{q}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

と定義する。この部分関数を Tree で図示するため

$$\mathbb{N}\ni z\xrightarrow{a}\tau_a(z)\in\mathbb{N}$$

という風に矢印の上に対応するアルファベットを載せて記述する。たとえば $p=3, q=2$ の場合は図 1 のようになる。この部分関数の定義から明らかなように、$n\in\mathbb{N}$ の p/q 数系による表示は Tree において左端の 0 から出発し n の位置まで矢印のラベルを順に読めば得られる。

[1]本稿では $\mathbb{N}$ は 0 を含むものとする

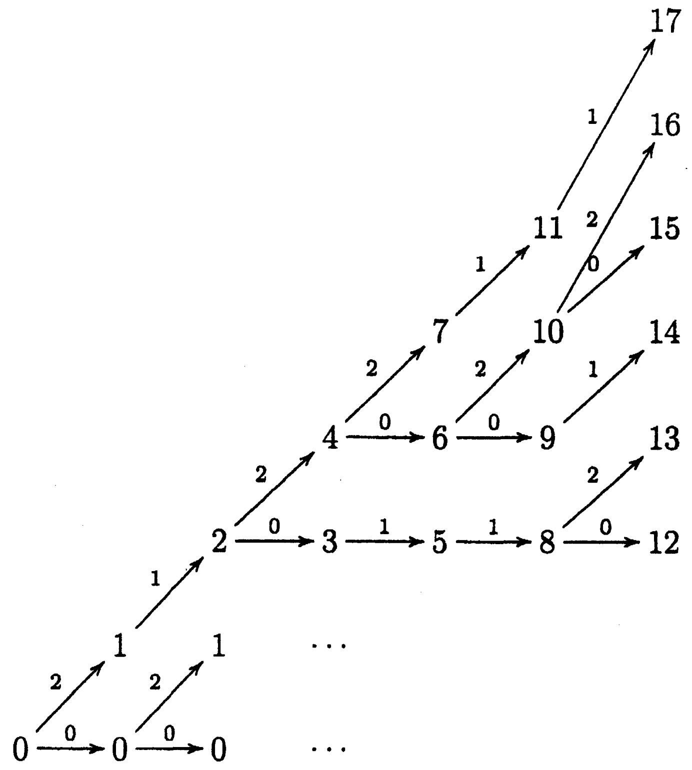

図 1: 3/2 数系の Tree

このようにして作られた 1 から下の無限 Tree の構造は複雑でどの n から下の部分 Tree も互いに同型ではない。このことは $L_{p/q}$ が正規言語でないことを意味する。

さて $a_1 \ldots a_m \in \mathcal{A}^*$ について $a_1 \ldots a_n$ の型の部分語を prefix, $a_k \ldots a_m$ の型の部分語を suffix という。Tree 構造から次は明らかである。

Lemma 4.1. $L(p/q)$ の任意の語の *prefix* は $L(p/q)$ に属する。

この性質を $L(p/q)$ は prefix closed であるという。例 2.1 の表を見れば suffix closed ではないこともわかる。実際 $L(p/q)$ には 1 から始まる語は存在しない。

図 1 を見ると、始点 n につづいてラベル 11 が現れるのは $n \equiv 3 \pmod 4$ の時なのは明らかだが、同様に $a_1 a_2 \ldots a_n \in \mathcal{A}^*$ が始点 n 以下に現れるための必要十分条件は $n \pmod{2^n}$ が一つの固定した剰余類に属することである。すなわち次の性質がある。

Lemma 4.2. 任意の $\mathcal{A}^*$ の語はある $L(p/q)$ の元の *suffix* として現れる。

従って $L(p/q)$ の部分語の全体は $\mathcal{A}^*$ に他ならない。一方、この p/q 数系には次の極めて強い非周期性が存在する。

Lemma 4.3. 任意の $L(p/q)$ の語 x と任意の $\mathcal{A}^+$ の語 y に対し、全ての自然数 n について $xy^n \in L(p/q)$ ならばある非負整数 n, m が存在して $x = 0^n, y = 0^m$ で

ある。わかりやすく言えば $L(p/q)$ からは 0^∞ を除き循環する無限語を生成できない。

この証明は容易であり、本質的に 0 を除く自然数は 2 で無限回割りきれないことの反映にすぎない。この Lemma 4.3 と Pumping Lemma を用いると、$L(p/q)$ が正規言語どころか文脈自由言語ですらない事がすぐにわかる。植物の成長を記述する Lindenmayer System に文脈自由言語や文脈依存言語が使われるのはよく知られているが、筆者はこのような複雑な言語が数学に応用された例をあまり知らない。

5 実数の p/q 数系による表示

ここまで自然数 $\mathbb{N}$ の表示を扱ってきた。これをいわば整数部分と考えれば、数系を扱う際には小数部分を定義し、両側無限に拡張するのが自然であるし、記号力学系との連絡もよい。そこで次のような集合を考える。

$$F(p/q) = \{a_{-1}a_{-2}\cdots \in \mathcal{A}^\infty \mid \forall n \quad a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n} \in L(p/q)\}$$

$\mathcal{A}$ の離散位相から生ずる $\mathcal{A}^\infty$ の直積位相に関して $F(p/q)$ は compact である。さらにこの $F(p/q)$ の元 $a_{-1}a_{-2}\ldots$ を実軸に自然に実現する。実数であることを表すのに、通例に習って小数点を先頭に加えることにしよう。

$$.a_{-1}a_{-2}\cdots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{-i}}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{-i}}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} = \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p}\frac{q}{p} + \frac{a_{-3}}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots$$

この対応 $F(p/q) \ni a_{-1}a_{-2}\cdots \xrightarrow{\pi} .a_{-1}a_{-2}\cdots \in \mathbb{R}$ は連続であるから像 $\pi(F(p/q))$ は $\mathbb{R}$ で compact である。さらに次がなりたつ。

Lemma 5.1. ある $\theta(p/q) > 0$ が存在し $\pi(F(p/q))$ は区間 $[0, \theta(p/q)]$ である。さらに $F(p/q)$ の辞書式順序を考えれば、π は順序を保存する。

この証明は、p/q 数系 Tree における「隣り合う」枝のラベルの関係を用いて行う。隣う合うとは、分岐後に下の枝からは常に最大の分岐を選び、上の枝は最小を選ぶと言うことである。たとえば 図 1 の Tree により

$$2 \xrightarrow{0} 3 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{2} 13 \xrightarrow{1} 20 \xrightarrow{2} 31 \xrightarrow{1} 47\ldots$$

と

$$2 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{0} 6 \xrightarrow{0} 9 \xrightarrow{1} 14 \xrightarrow{0} 21 \xrightarrow{1} 32 \xrightarrow{0} 48\ldots$$

は隣り合うので頂点の自然数は差は分岐後 1 であり、ラベルは分岐が終わると差が常に -1 となる。一般に、分岐後に下の枝からの最大路と上の枝からの最小路を

比較すると同様の現象が起きている。この観察から、大雑把に言えばこの Tree を「無限に」広げたときに穴が生じないことが容易に証明される。詳しくは [2] を参照。この補題は簡単な観察であるが、結果は重大である。すなわち $[0,\theta(p/q)]$ の任意の実数は、

$$.a_{-1}a_{-2}\cdots = \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p}\frac{q}{p} + \frac{a_{-3}}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots$$

という表示を持つのである。正の実数 x に対し $(p/q)^{-m}x \in [0,\theta(p/q)]$ となる整数 m が存在するから 10 進表示同様に任意の実数は

$$x = a_m a_{m-1} \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$$

という表示をもち x に任意の prefix は $L(p/q)$ に属する。さらに、この表示が一意的でないような実数は可算個であることも同じような技術により証明できるのである。可視的な言い方をすれば、図 1 を右に無限に広げ、適宜大きさを標準化していけば実数の表示を得る。これは二分木で二進小数[2]を作るのと同様である。この表示は、補題 4.3 により決して循環しない。すなわち任意の正の実数が非周期的無限小数に表示されるという著しい特徴をもっている。ただし、実数の p/q 数系表示と、前節で述べた自然数の p/q 数系表示は compatible でないことには注意しなければならない。この程度の犠牲を払っても実数の表示を考えることは生産的であることが次節で明らかになる。

6 $(p/q)^n$ の小数部分の分布と Mahler の問題

x の小数部分を $\langle x\rangle$ と書く。Koksma の古典的な結果 (c.f. [6]) により、一次元 Lebesgue 測度の意味でほとんど全ての $\alpha > 1$ の実数に対して $\langle \alpha^n\rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$ は $[0, 1)$ に一様に分布する。しかし具体的な α でこの性質を持つものは知られていない。例えば、$(3/2)^n$, e^n, π^n などについて数値実験では一様に分布するのではないかと予想されているが、実際にどのような分布をするのか知られていることはとても少ないといってよい。たとえば e^n π^n については 2 つ (!) の集積点を持つことも示されていない。有理数の冪については少し状況は良い。Vijayaraghavan [11] は $\langle (p/q)^n\rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$ は $[0, 1)$ に無限個の集積点を持つことを示した。少し問題を易しくして、まず $p/q > 1$ を固定し実数 ξ に対して $\langle \xi(\frac{p}{q})^n\rangle$ $(n = 1, 2, \dots)$ の分布を論ずることもできる。この場合にも Koksma はほとんど全ての実数 ξ の実数に対して一様分布することを示しているが、具体的な ξ に関する結果はほとんどない。逆に偏った分布をもつ ξ の集合を考えよう。I を $[0, 1)$ の部分半開区間の有限個の合併で I と一致しないものとする。

$$Z_{p/q}(I) = \left\{ \xi > 0 \;\middle|\; \text{十分大きな自然数 } n \text{ について } \left\langle \xi \left(\frac{p}{q}\right)^n \right\rangle \in I \right\}$$

[2]この場合、表示が一意でないのは有限小数の場合に $1 = .11\dots$ のようなことが生ずるからで、そのような二重点の集合もやはり可算である。

と定義する。Mahler [7] は、ある日本人の友人[3]から聞いた問題として $Z_{3/2}([0,1/2))$ は空ではないかという問題を考察した。彼は部分的な回答として $Z_{3/2}([0,1/2))$ が可算であること。また、そのような仮想的な数が存在するとすれば極めて特殊な算術的振る舞いをすることを示した。この問いはいまだに未解決である。Mahler はこのような空想的な数から出発し背理法に立脚して論を展開しているが、3/2 をベースとする展開を考える点などは我々の論文と [2] と類似している。まだはっきりしないが、我々の論文はもしかすると Mahler の論文の内容に構成的な見方を与えているものなのかもしれない。

μ を一次元 Lebesgue 測度とする。$Z_{p/q}(I)$ が空となるような、なるだけ $\mu(I)$ の大な I を見つけること。それと双対的に、$Z_{p/q}(I)$ が非空となるできるだけ $\mu(I)$ の小な I を見つけることが問題となる。それに付随し、もし $Z_{p/q}(I)$ が非空ならば可算なのか非可算なのか、また位相的な性質について何がいえるのかなども興味深い。Mahler の論文以降のこの方向への発展として大きなものを挙げよう。Pollington [9] は $Z_{3/2}([4/65,61/65)) \neq \emptyset$ の証明をスケッチした。Flatto-Lagarias-Pollington [5] は $Z_{p/q}([s,s+1/p)) = \emptyset$ となる s は $[0,1-1/p]$ で稠密であることを示した。さらに Bugeaud [3] は $Z_{p/q}([s,s+1/p)) \neq \emptyset$ となる s の集合の測度 0 であることを示し、$Z_{p/q}([s,s+1/p)) = \emptyset$ となる具体的な s の値を多く与えた。Dubickas の最近の一連の結果 (c.f [4]) は有理数に限らず代数的数にこれらの結果を拡張するもので大変優れている。

我々の p/q 数系がこの方向の結果を出すことに役に立つ。その直接の理由は簡単である。正実数 x の p/q 数系表示: $x = .a_{-1}a_{-2}\ldots$ を考えると、p/q を掛けることが左シフトであるから $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m x = a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}.a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots$$

が成り立つのは明らかである。ところが $a_{-1}\ldots a_{-m} \in L(p/q)$ であるのでこの p/q 数系による「整数部分」は本当に整数なのである。言い換えると。

$$\left\langle \left(\frac{p}{q}\right)^m x \right\rangle = \langle .a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots\rangle$$

となるので小数部分を調べるには正実数 x の p/q 数系表示を観れば十分である。この性質は、非整数ベースの数系としてよく研究されているベータ展開 (c.f [10], [8]) にはない特性である。ベータ展開の「整数部」は実際には整数を与えない。なお p/q 数系の「小数部分」$.a_{-m-1}a_{-m-2}\ldots$ は $[0,\frac{p-1}{p-q})$ に属するが 1 より大きいこともある。

p/q 数系に対して次の半開区間の合併 $Y(p/q)$ を考える。

$$Y(p/q) = \bigcup_{c=0}^{q-1}\left[\frac{k_c}{p}, \frac{k_c+1}{p}\right)$$

[3]事情をご存知のかたは、お知らせいただけましたら大変幸いです。

ここで $k_c \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ は $qk_c \equiv c \pmod p$ によって一意的にさだまる自然数である。このとき、次の結果を導くことができる。

Theorem 6.1. $p \geq 2q-1$ と仮定する。このとき正の実数 ξ が $Z_{p/q}(Y(p/q))$ に属するための必要十分条件は ξ が二つの異なる p/q 数系表示を持つことである。特に、$Z_{p/q}(Y(p/q))$ は非空であるばかりでなく可算無限集合である。

p/q 数系の実数表示では、二つ以上の異なる表示を持つ実数は可算個であることは述べたが、一般には三つ以上の表示を持つ数があるかも知れない。我々はそのような数はないと予想しているが、このことは $p \geq 2q-1$ の仮定の下でのみ証明できていることに注意する。この定理 6.1 から次も従う。

Corollary 6.1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある半開区間の合併 I で $\mu(I) < \varepsilon$ かつ $Z_{p/q}(I)$ が可算無限集合となるものが存在する。

歴史的な興味で 3/2 を別に書くと

Corollary 6.2. 正の実数 ξ で $\langle \xi \left(\frac{3}{2}\right)^n \rangle$ $n = 1,2,\ldots$ が常に $[0,1/3)$ または $[2/3,1)$ に入るものが可算無限個存在する。

も導ける。$Z_{p/q}(I)$ の定義の「十分大きい自然数」という条件はこの系の形の主張では不要である。

この定理 6.1 の証明は少々厄介で、p/q 数系表示の実際の計算を行うオートマトンを構成し、二重点の場合のオートマトンの語の特徴づけを行うことで得られる。さらに [1] では [2] の精密化を行っている。たとえば

Theorem 6.2. $p > q^2$ とすると正の実数 ξ で $\langle \xi \left(\frac{3}{2}\right)^n \rangle$ $n = 1,2,\ldots$ が常にある *Cantor* 集合に入るものが可算無限個存在し、これが p/q 数系の二重点に対応する。

逆に $Z_{p/q}(I) = \emptyset$ となる様々な具体的な I を与える結果も導くことができる。

参考文献

[1] S. Akiyama, *Mahler's Z-number and* 3/2 *number system*, preprint.

[2] S. Akiyama, Ch. Frougny, and J. Sakarovitch, *On number representation in a rational base*, submitted.

[3] Y. Bugeaud, *Linear mod one transformations and the distribution of fractional parts* $\{\xi(\frac{p}{q})^n\}$, Acta Arith. **114** (2004), 301–311.

[4] A. Dubickas, *Arithmetical properties of powers of algebraic numbers*, Bull. London Math. Soc. (to appear).

[5] L. Flatto, J.C. Lagarias, and A.D. Pollington, *On the range of fractional parts* $\{\xi(\frac{p}{q})^n\}$, Acta Arith. **70** (1995), 125–147.

[6] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, New York, 1974.

[7] K. Mahler, *An unsolved problem on the powers of* $3/2$, J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 313–321.

[8] W. Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416.

[9] A.D. Pollington, *Progressions arithmétiques généralisées et le problème des* $(3/2)^n$, C. R. Acad. Sc. Paris série I **292** (1981), 383–384.

[10] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 477–493.

[11] T. Vijayaraghavan, *On the fractional parts of the powers of a number, I*, J. London Math. Soc. **15** (1940), 159–160.

秋山茂樹
Shigeki AKIYAMA

新潟大学理学部数学教室
新潟市五十嵐2の町8050
e-mail: akiyama@math.sc.niigata-u.ac.jp