数理解析研究所講究録
1513巻 2006年 152-187

方圓奇巧の解説

藤井康生 (Yasuo Fujii)

1 著者有馬頼徸 について

方圓奇巧の著者有馬頼徸は久留米藩の第七代藩主である. 有馬頼徸は正徳4年 (1714) に久留米城内に生まれ天明3年 (1783) 70歳で即世する. 久留米市梅林寺に葬られている.

著書は多く, 約37の著作が有る. その中で出版されたものは, 豊田文景の名で出版された『拾璣算法』(明和6年, 1769) だけである.

『拾璣算法』は点竄術をはじめ, 当時の和算全般にわたる最高水準の問題が体系的にまとめられている.

『拾璣算法』の内訳は

1巻 点竄9問 自約5問 増約5問 翦管4問

2巻 計子7問 交商8問 綴術5問 変数13問 容術9問

3巻 分果5問 趕趁5問 球題5問 逐策5問 変式4問

4巻 作式4問 極数9問 整数12問

5巻 堆積8問 招差10問 求積18問 補遺弧背密法3問

以上本文150問と補遺3問である.

補遺の弧背密法は円弧に関する問題で

1. 円の直径と矢が与えられた時, 背 (弧の長さ) を求める問題
   ($S = 2d\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}$ の級数展開)
2. 円の直径と背が与えられた時, 矢を求める問題
   ($c = \frac{d}{2}(1-\cos\frac{S}{d})$ の級数展開)
3. 円の直径と背が与えられた時, 弦を求める問題
   ($a = d\sin\frac{S}{d}$ の級数展開)

の3問である.

拾璣算法には書肆の異なる版がある. その中で初版と考えられているものの末尾には拾璣算法後編嗣出と載せられている. この拾璣算法後編はついに出版されることはなかった. 有馬頼徸の著書を見ると拾璣算法後編は『方圓奇巧』(明和3年, 1766) を中心にまとめたものであることが予想される. この『方圓奇巧』は松永良弼 (生年は不明, 没年は延享元年, 1744) の『方圓算経』(元文4年, 1739) を元にしたものである. 序文中にも「葆直齋良弼氏松永称安右衛門者所著方圓算経全備五巻而閲之其原路深奥蹇可謂妙術故眼其高妙秘蔵簾中尚矣今也取其

例以更施術文分技巧而成冊子名曰方圓奇巧」とある.

『方圓奇巧』の内訳は

上巻　方圓真術

円術　第一求円周冪　第二求円周

弧術　第三求弧背冪　第四求弧背　第五求弧矢　第六求弧弦　第七求弧積

中巻

累斜術　第八求弧中距斜矢 第九求弧中距斜弦

方術　第十求角中径冪　第十一求角中径　第十二求平中径冪仍求角積冪

第十三求平中径仍求角積　第十四求角面冪　第十五求角面

第十六求距面矢或設係面矢　第十七求距面斜或謂係面斜

角總平方術　山路主住述作

下巻　括術

其一求弧背　其二求弧矢　其三求弧弦　其四求弧積　其五求弧中距斜矢

其六求弧中距斜弦　其七求角中径　其八求平中径　其九求角積　其十求角面

其十一求距面矢　其十二求距面斜謂係有角中径係面面斜数求其距斜

巻中採用真数皆数末位而用之故不等位数

附巻　術路

原術定矩之図乗数者用右傍書除数者用差傍書

括術求差法之図傍書同于前

以上である.方圓奇巧は現代風に言うと三角関数，逆三角関数の級数展開を述べている.これらの級数の中でも累斜術や方術で述べられている式は複雑であるが，どのようにして導きだされたものであるか，その方法は載せられていない.後世の和算家にとっても困難であったようである.求角面の式（正多角形の一辺を求める式）を石黒信由は『諸角綴術之解』（文化4年，1807）において，白石長忠は『諸角通術捷法解』（文政6年，1823）において導いている.石黒や白石は求角面の式を導くために，膨大な計算をしたようである.本稿では微分法や冪級数を用いて解説する.

2　方圓奇巧　上巻 方圓真術

2.1　円術

円周の二乗および円周を表わす級数を述べている.

2.1.1　第一求円周冪

直径が与えられた時，円周の2乗を表わす級数を求める.円周を S，直径を d とする.

$$A_0=(3d)^2,\ A_1=\frac{1}{12}A_0,\ A_2=\frac{4}{30}A_1\ ,\ A_3=\frac{9}{56}A_2,\ A_4=\frac{16}{90}A_3,\ldots$$

とし

$$
\begin{aligned}
S^2 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots \\
&= (3d)^2\left\{1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\frac{4}{30} + \frac{1}{12}\frac{4}{30}\frac{9}{56} + \frac{1}{12}\frac{4}{30}\frac{9}{56}\frac{19}{90} + \cdots\right\} \\
&= (3d)^2\left\{1 + \frac{1^2}{3\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\right. \\
&\left. + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

これは第三求弧背冪の特別な場合である.

本文では A_0 を原数, A_1 を一差, 係数 $\frac{1}{12}$ の分子 1 を一差乗率, 分母を 12 を一差除率, A_2 を二差, 係数 $\frac{4}{30}$ の分子 4 を二差乗率, 分母 30 を二差除率, ..., 以下同様に呼んでいる. 以後同様に用いているが省略する.

2.1.2 第二求円周

直径が与えられた時, 円周を表わす級数を求める. 円周を S, 直径を d とする.

$$
A_0 = 3d,\ A_1 = \frac{1}{24}A_0,\ A_2 = \frac{9}{80}A_1,\ A_3 = \frac{25}{168}A_2,\ A_4 = \frac{49}{288}A_3, \ldots
$$

とし

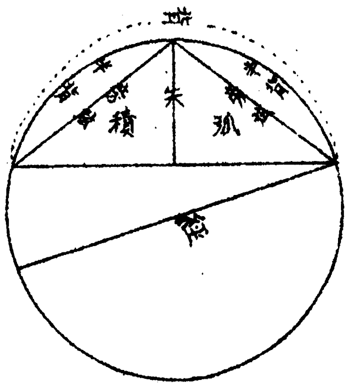
$$
\begin{aligned}
S &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots \\
&= 3d\left\{1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\frac{9}{80} + \frac{1}{24}\frac{9}{80}\frac{25}{168} + \frac{1}{24}\frac{9}{80}\frac{25}{168}\frac{49}{288} + \cdots\right\} \\
&= 3d\left\{1 + \frac{1^2}{4\cdot 2\cdot 3} + \frac{1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\right. \\
&\left. + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4^4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

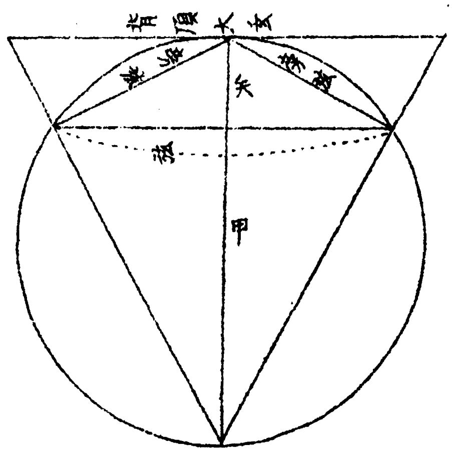
これは第四求弧背 (1) の特別な場合である.

円周法 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751 微強 , を載せている.

この値を上記級数によって求めたとすると, 77 差〜78 差まで求めた事になる.

2.2 弧術





2.2.1 第三求弧背冪

直径と矢が与えられている時，弧の２乗を表わす級数を求める． 円弧を S，直径を d，矢を c とする．

$$A_0 = 4cd,\ A_1 = \frac{2}{6}\frac{c}{d}A_0,\ A_2 = \frac{8}{15}\frac{c}{d}A_1,\ A_3 = \frac{18}{28}A_2,\ A_4 = \frac{32}{45}\frac{c}{d}A_3, \dots$$

とし

$$S^2 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

$$= 4cd\Big\{1 + \frac{2}{6}\frac{c}{d} + \frac{2}{6}\frac{8}{15}(\frac{c}{d})^2 + \frac{2}{6}\frac{8}{15}\frac{18}{28}(\frac{c}{d})^3 + \frac{2}{6}\frac{8}{15}\frac{18}{28}\frac{32}{45}(\frac{c}{d})^4 + \cdots\Big\}$$

$$S = d\theta\ ,\ c = \frac{d}{2}(1-\cos\theta) = d\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{c}{d}},$$

$$S^2 = (d\theta)^2 = \Big(2d\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}\Big)^2 = 4d^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2(n-1)}(n-1)!^2}{n(2n-1)!}(\frac{c}{d})^n$$

第一求円周冪は上式において $c = \frac{1}{4}d$ とした場合である．このとき $\theta = 60^0$ である．この事は正六角形を考えていることに成る．

2.2.2 第四求弧背

(1) 有径矢求背　直径と矢が与えられている時，弧を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c とする．

$$A_0 = \sqrt{4cd},\ A_1 = \frac{1}{6}\frac{c}{d}A_0,\ A_2 = \frac{9}{20}\frac{c}{d}A_1,\ A_3 = \frac{25}{42}\frac{c}{d}A_2,\ A_4 = \frac{49}{72}\frac{c}{d}A_3, \dots$$

とし

$$S = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$
$$= \sqrt{4cd}\left\{1 + \frac{1}{6}\frac{c}{d} + \frac{1}{6}\frac{9}{20}\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{9}{20}\frac{25}{42}\left(\frac{c}{d}\right)^3 + \frac{1}{6}\frac{9}{20}\frac{25}{42}\frac{49}{72}\left(\frac{c}{d}\right)^4 + \cdots\right\}$$
$$= \sqrt{4cd}\left\{1 + \frac{1^2}{2\cdot 3}\frac{c}{d} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{c}{d}\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{c}{d}\right)^3 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\left(\frac{c}{d}\right)^4 + \cdots\right\}$$
$$S = d\theta = 2d\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}} = 2\sqrt{cd}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

第一求円周冪と同様，第二求円周は上式において $c = \frac{1}{4}d$ とした場合である．

(2) 有矢弦求背　矢と弦が与えられている時，弧を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a とする．$d = \frac{a^2+4c^2}{4c}$ より，

$$A_0 = \frac{a^2+4c^2}{a},\ A_1 = \frac{1}{3}\frac{c}{d}A_0,\ A_2 = \frac{2}{5}\frac{c}{d}A_1,\ A_3 = \frac{4}{7}\frac{c}{d}A_2,\ A_4 = \frac{6}{9}\frac{c}{d}A_3, \ldots$$

とし

$$S = A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - \cdots$$
$$= \frac{a^2+4c^2}{a}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{c}{d} - \frac{1}{3}\frac{2}{5}\left(\frac{c}{d}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{2}{5}\frac{4}{7}\left(\frac{c}{d}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{2}{5}\frac{4}{7}\frac{6}{9}\left(\frac{c}{d}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$A'B' : AB = d : (d-c)\ ,\ A'B' = \frac{ad}{d-c}\ ,\ a^2 + 4c^2 = 4cd \quad \text{より} \quad a^2 = 4c(d-c),$$

$$A'B' = \frac{a^2 d}{a(d-c)} = \frac{4c(d-c)d}{a(d-c)} = \frac{4cd}{a} = \frac{a^2+4c^2}{a} = A_0,$$

より

$$A_0 = 2d\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2d\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

となる．$x = \sqrt{\frac{c}{d}}$，とし $\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ の級数展開，

$$\sqrt{1-x^2}\arcsin x = x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},$$

を用いて，

$$\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}x^{2n}\right\}$$

を考えたものに対応している．

(3) 有徑弦求背　直径と弦が与えられている時，弧を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a とする．$c=\frac{d-\sqrt{d^2-a^2}}{2}$ より，

$$A_0=a,\ A_1=\frac{2ac}{3d}=\frac{2}{3}\frac{c}{d}A_0,\ A_2=\frac{4}{5}\frac{c}{d}A_1,\ A_3=\frac{6}{7}\frac{c}{d}A_2,\ A_4=\frac{8}{9}\frac{c}{d}A_3,\dots$$

として

$$S=A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots$$
$$=a\Big\{1+\frac{2}{3}\frac{c}{d}+\frac{2}{3}\frac{4}{5}(\frac{c}{d})^2+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}(\frac{c}{d})^3+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}(\frac{c}{d})^4+\cdots\Big\}$$

これは

$$A_0=a=AB=d\sin\theta=2d\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2d\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

によって，$x=\sqrt{\frac{c}{d}}$　として，$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ の級数展開，

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

を用いて，

$$\arcsin x=\sqrt{1-x^2}\,x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n}$$

を考えたものに対応している．
次に

$$B_0=a,\ B_1=\frac{2ac}{3d}=\frac{2}{3}\frac{c}{d}B_0,\ B_2=(B_1-\frac{a^2}{6d^2}B_0)\frac{4}{5},\ B_3=(B_2-\frac{2a^2}{10d^2}B_1)\frac{6}{7},\cdots$$

としている，ここで $A_n=B_n$ である事を示す．
$B_0=A_0,\ B_1=A_1$　であるので　$B_k=A_k$ とすると，

$$A_k=\frac{2k}{2k+1}A_{k-1}(\frac{c}{d}),\ A_{k+1}=\frac{2(k+1)}{2k+3}A_k(\frac{c}{d})$$

$$B_{k+1}=\Big\{B_k-B_{k-1}\frac{k}{2(2k+1)}\frac{a^2}{d^2}\Big\}\frac{2(k+1)}{2k+3}$$

$$=\frac{2(k+1)}{2k+3}\Big\{A_k-A_{k-1}\frac{k}{2(2k+1)}(\frac{a^2}{d^2})\Big\}$$

$$=\frac{2(k+1)}{2k+3}\frac{A_{k-1}}{2k+1}\Big[(2k)\frac{c}{d}-\frac{k}{2}4\Big\{\frac{c}{d}-(\frac{c}{d})^2\Big\}\Big]$$

$$=\frac{2(k+1)}{2k+3}\frac{2k}{2k+1}A_{k-1}(\frac{c}{d})^2=A_{k+1}$$

これによって $B_{k+1}=A_{k+1}$ が成り立つ，よって $B_n=A_n$ が示せた．

(4) 有徑弦求背　直径と弦が与えられている時，弧を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，弦を a とする．

$$A_0 = a,\ A_1 = \frac{1}{6}\frac{a^2}{d^2}A_0,\ A_2 = \frac{9}{20}\frac{a^2}{d^2}A_1,\ A_3 = \frac{25}{42}\frac{a^2}{d^2}A_2,\ A_4 = \frac{49}{72}\frac{a^2}{d^2}A_3, \dots$$

として

$$\begin{aligned} S &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots \\ &= a\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{3^2}{20}\left(\frac{a}{d}\right)^4 + \frac{1}{6}\frac{3^2}{20}\frac{5^2}{42}\left(\frac{a}{d}\right)^6 + \frac{1}{6}\frac{3^2}{20}\frac{5^2}{42}\frac{7^2}{72}\left(\frac{a}{d}\right)^8 + \cdots\right\} \end{aligned}$$

これは

$$S = d\theta = d\arcsin\frac{a}{d} \quad ,\ \sin\theta = \frac{a}{d} \quad , \qquad x = \frac{a}{d},$$

とし

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

と考えたものに対応している．

(5) 有徑矢弦求背之新術　直径，矢と弦が与えられている時，弧を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a とする．

$$A_0 = c^2,\ A_1 = \frac{1}{5}\frac{c}{d}A_0,\ A_2 = \frac{4}{7}\frac{c}{d}A_1,\ A_3 = \frac{6}{9}\frac{c}{d}A_2,\ A_4 = \frac{8}{11}\frac{c}{d}A_3, \dots$$

として

$$S = a + \frac{8}{3a}\left\{A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - \cdots\right\}$$

これは

$$\begin{aligned} &a + \frac{8c^2}{3a} = \frac{a^2}{a} + \frac{8c^2}{3a} \\ &= \frac{4cd - 4c^2}{a} + \frac{8c^2}{3a} = \frac{4cd}{a} - \frac{4c^2}{3a} \\ &= \frac{4cd}{a}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{c}{d}\right) \\ &\frac{8}{3a}\frac{c^3}{5d} = \frac{4cd}{a}\frac{1}{3}\frac{2}{5}\left(\frac{c}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

よって (2) 式と同じものになる．

2.2.3 第五求弧矢

円弧と直径が与えられた時，矢を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c とする．

$$A_0 = \frac{S^2}{4d},\ A_1 = \frac{1}{12}\frac{S^2}{d^2}A_0,\ A_2 = \frac{1}{30}\frac{S^2}{d^2}A_1,\ A_3 = \frac{1}{56}\frac{S^2}{d^2}A_2,\ A_4 = \frac{1}{90}\frac{S^2}{d^2}A_3, \ldots$$

として

$$\begin{aligned} c &= A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 \cdots \\ &= \frac{S^2}{4d}\left\{1 - \frac{1}{12}\frac{S^2}{d^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{30}\left(\frac{S^2}{d^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{1}{30}\frac{1}{56}\left(\frac{S^2}{d^2}\right)^3 + \frac{1}{12}\frac{1}{30}\frac{1}{56}\frac{1}{90}\left(\frac{S^2}{d^2}\right)^4 \cdots\right\} \end{aligned}$$

これは

$$S = d\theta\ ,\ c = \frac{d}{2}(1-\cos\theta) = \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{S}{d}\right)\ ,\ x = \frac{S}{d},$$

とし

$$1 - \cos x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

と考えたものに対応している．

2.2.4 第六求弧弦

円弧と直径が与えられた時，弦を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，弦を a とする．

$$A_0 = S,\ A_1 = \frac{1}{6}\frac{S^2}{d^2}A_0,\ A_2 = \frac{1}{20}\frac{S^2}{d^2}A_1,\ A_3 = \frac{1}{42}\frac{S^2}{d^2}A_2,\ A_4 = \frac{1}{72}\frac{S^2}{d^2}A_3, \ldots$$

として

$$\begin{aligned} a &= A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 + \cdots \\ &= S\left\{1 - \frac{1}{6}\frac{S^2}{d^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{20}\left(\frac{S^2}{d^2}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{1}{20}\frac{1}{42}\left(\frac{S^2}{d^2}\right)^3 + \frac{1}{6}\frac{1}{20}\frac{1}{42}\frac{1}{72}\left(\frac{S^2}{d^2}\right)^4 + \cdots\right\} \end{aligned}$$

これは

$$S = d\theta\ ,\ a = d\sin\frac{S}{d}\ ,\ x = \frac{S}{d},$$

とし

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

を考えたものに対応している．

2.2.5 第七求弧積

直径と矢が与えられた時，弧積を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a，弧積（弓形の面積）を A とする．$a=\sqrt{4c(d-c)}$ より，

$$A_0=\frac{2ac}{3},\ A_1=\frac{1}{5}\frac{c}{d}A_0,\ A_2=\frac{6}{7}\frac{c}{d}A_1,\ A_3=\frac{8}{9}\frac{c}{d}A_2,\ A_4=\frac{10}{11}\frac{c}{d}A_3,\dots$$

として

$$\begin{aligned}A&=A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots\\&=\frac{2ac}{3}\left\{1+\frac{1}{5}\frac{c}{d}+\frac{1}{5}\frac{6}{7}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{1}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\frac{1}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\frac{10}{11}\left(\frac{c}{d}\right)^4+\cdots\right\}\end{aligned}$$

この式は，

$$A=\frac{1}{4}dS-\frac{1}{2}a\left(\frac{d}{2}-c\right)=\frac{1}{4}d(S-a)+\frac{1}{2}ac$$

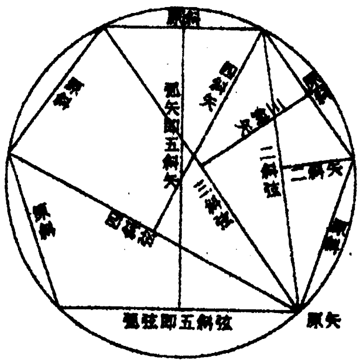
であるので，第４求弧背（３）式より求められる．

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}ac+\frac{da}{4}\left\{\frac{2}{3}\frac{c}{d}+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\left(\frac{c}{d}\right)^4+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{2}ac+\frac{ac}{4}\frac{2}{3}\left\{1+\frac{4}{5}\frac{c}{d}+\frac{4}{5}\frac{6}{7}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots\right\}\\&=\frac{2}{3}ac\left\{1+\frac{1}{5}\frac{c}{d}+\frac{1}{5}\frac{6}{7}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{1}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots\right\}\end{aligned}$$

3 方圓奇巧中巻

3.1 累斜術

平円闕（弓形）が与えられており，この弧を n 等分し（容斜数 n），その m 斜弦，m 斜矢を容れた物が有る．弧中五斜之図



3.1.1 第八求弧中距斜矢

直径と矢が与えられた時，距斜矢を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，距斜数を m，容斜数を n，距斜矢を c_m とする．

$$A_0 = \frac{cm^2}{n^2},\ A_1 = \frac{2n^2-2m^2}{6n^2}\frac{c}{d}A_0,\ A_2 = \frac{8n^2-2m^2}{15n^2}\frac{c}{d}A_1,$$

$$A_3 = \frac{18n^2-2m^2}{28n^2}\frac{c}{d}A_2,\ A_4 = \frac{32n^2-2m^2}{45n^2}\frac{c}{d}A_3,\ldots$$

として

$$c_m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

$$= \frac{cm^2}{n^2}\Big\{1 + \frac{2n^2-2m^2}{6n^2}\frac{c}{d} + \frac{2n^2-2m^2}{6n^2}\frac{8n^2-2m^2}{15n^2}(\frac{c}{d})^2$$

$$+\frac{2n^2-2m^2}{6n^2}\frac{8n^2-2m^2}{15n^2}\frac{18n^2-2m^2}{28n^2}(\frac{c}{d})^3$$

$$+\frac{2n^2-2m^2}{6n^2}\frac{8n^2-2m^2}{15n^2}\frac{18n^2-2m^2}{28n^2}\frac{32n^2-2m^2}{45n^2}(\frac{c}{d})^4\cdots\Big\}$$

これは

$$S = d\theta,\ \ c = \frac{d}{2}(1-\cos\theta),\ \ \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{c}{d}},$$

より

$$\theta = 2\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}},$$

$\dfrac{\theta}{n} = \phi$, $\dfrac{S}{n} = d\phi$, と置いて，$c_m = \dfrac{d}{2}(1-\cos m\phi)$,

$$\phi = \frac{\theta}{n} = \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}}{n},\ \ c_m = \frac{d}{2}\Big\{1-\cos(\frac{2m}{n}\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}})\Big\},$$

$x = \sqrt{\dfrac{c}{d}}$, として

$$f(x) = \cos(\frac{2m\arcsin x}{n}),\ \ \phi = \frac{2m\arcsin x}{n},\ \ f(0) = 1,$$

とする．

$f(x) = \cos\phi$ を展開する．

$$f'(x) = \frac{2m}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\sin\phi)$$

$$\sqrt{1-x^2}f'(x) = -\frac{2m}{n}\sin\phi,\qquad f'(0) = 0$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=-(\frac{2m}{n})^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos\phi$$

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=-(\frac{2m}{n})^2f(x),\quad f''(0)=-\frac{4m^2}{n^2}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$$

と置き，

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+\frac{4m^2}{n^2}f(x)=0$$

に代入する．

$$A_2=-\frac{2m^2}{n^2},\quad A_3=0,$$

$$A_{k+2}=\frac{k^2-4m^2}{(k+2)(k+1)n^2}A_k,$$

k を $2l$ に置きかえる，

$$A_{2l+2}=\frac{2(l^2n^2-m^2)}{(l+1)(2l+1)n^2}A_{2l},$$

以上により成り立つことが示せた．

$n=5$ とし $m=2,3$ の場合について載せている．

$$c_2=\frac{4}{25}c\Big\{1+\frac{2\cdot5^2-8}{6\cdot5^2}\frac{c}{d}+\frac{2\cdot5^2-8}{6\cdot5^2}\frac{8\cdot5^2-8}{15\cdot5^2}(\frac{c}{d})^2$$

$$+\frac{2\cdot5^2-8}{6\cdot5^2}\frac{8\cdot5^2-8}{15\cdot5^2}\frac{18\cdot5^2-8}{28\cdot5^2}(\frac{c}{d})^3+\cdots\Big\}$$

$$=\frac{4}{25}c\Big\{1+\frac{7}{25}\frac{c}{d}+\frac{7}{25}\frac{64}{125}(\frac{c}{d})^2+\frac{7}{25}\frac{64}{125}\frac{221}{350}(\frac{c}{d})^3+\cdots\Big\}$$

$$c_3=\frac{9}{25}c\Big\{1+\frac{2\cdot5^2-18}{6\cdot5^2}\frac{c}{d}+\frac{2\cdot5^2-18}{6\cdot5^2}\frac{8\cdot5^2-18}{15\cdot5^2}(\frac{c}{d})^2$$

$$+\frac{2\cdot5^2-18}{6\cdot5^2}\frac{8\cdot5^2-18}{15\cdot5^2}\frac{18\cdot5^2-18}{28\cdot5^2}(\frac{c}{d})^3+\cdots\Big\}$$

$$=\frac{9}{25}c\Big\{1+\frac{16}{75}\frac{c}{d}+\frac{16}{75}\frac{182}{375}(\frac{c}{d})^2+\frac{16}{75}\frac{182}{375}\frac{108}{175}(\frac{c}{d})^3+\cdots\Big\}$$

3.1.2 第九求弧中距斜弦

直径，矢と弦が与えられた時，距斜弦を表わす級数を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a，距斜数を m，容斜数を n，距斜弦を a_m とする．

$$A_0 = \frac{am}{n},\ A_1 = \frac{2n^2-2m^2}{3n^2}\frac{c}{d}A_0,\ A_2 = \frac{8n^2-2m^2}{10n^2}\frac{c}{d}A_1,$$

$$A_3 = \frac{18n^2-2m^2}{21n^2}\frac{c}{d}A_2,\ A_4 = \frac{32n^2-2m^2}{36n^2}\frac{c}{d}A_3, \ldots$$

として

$$a_m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

$$= \frac{am}{n}\Big\{1 + \frac{2n^2-2m^2}{3n^2}\frac{c}{d} + \frac{2n^2-2m^2}{3n^2}\frac{8n^2-2m^2}{10n^2}(\frac{c}{d})^2$$

$$+\frac{2n^2-2m^2}{3n^2}\frac{8n^2-2m^2}{10n^2}\frac{18n^2-2m^2}{21n^2}(\frac{c}{d})^3$$

$$+\frac{2n^2-2m^2}{3n^2}\frac{8n^2-2m^2}{10n^2}\frac{18n^2-2m^2}{21n^2}\frac{32n^2-2m^2}{36n^2}(\frac{c}{d})^4 + \cdots\Big\}$$

これは

$$S = d\theta,\ a = \sqrt{4cd(1-\frac{c}{d})},\ c = \frac{d}{2}(1-\cos\theta),\ \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{c}{d}},$$

$$\theta = 2\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}},$$

$$\frac{\theta}{n} = \phi,\ \frac{S}{n} = d\phi,\ a_m = d\sin m\phi,$$

$$\phi = \frac{\theta}{n} = \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}}{n},\ a_m = d\sin(\frac{2m}{n}\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}),$$

$$\frac{a_m}{a} = \frac{d}{\sqrt{4cd(1-\frac{c}{d})}}\sin(\frac{2m\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}}{n}),$$

$x = \sqrt{\frac{c}{d}}$ として，

$$f(x) = \frac{\sin(\frac{2m\arcsin x}{n})}{\sqrt{1-x^2}},\ \phi = \frac{2m\arcsin x}{n},\ f(0) = 0,$$

$$f(x) = \frac{\sin\phi}{\sqrt{1-x^2}},\ \sqrt{1-x^2}f(x) = \sin\phi,$$

を展開する．

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x) + \sqrt{1-x^2}f'(x) = \frac{2m}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\cos\phi)$$

$$-xf(x)+(1-x^2)f'(x)=-\frac{2m}{n}\cos\phi,\ \ f'(0)=\frac{2m}{n}$$

$$-f(x)-xf'(x)-2xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=-\frac{4m^2}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin\phi$$

$$(1-x^2)f''(x)-3xf'(x)-f(x)=-\frac{4m^2}{n^2}f(x),\ \ f''(0)=0$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$$

と置き，

$$(1-x^2)f''(x)-3xf'(x)+(\frac{4m^2}{n^2}-1)f(x)=0$$

に代入する．

$$A_2=0,\ \ A_3=\frac{2n^2-2m^2}{3},$$

$$A_{k+2}=\frac{(k+1)^2n^2-4m^2}{(k+2)(k+1)n^2}A_k,$$

k を $2l-1$ に置きかえる，

$$A_{2l+1}=\frac{2l^2n^2-2m^2}{l(2l+1)n^2}A_{2l-1}$$

以上により成り立つことが示せた．

$n=5$ とし $m=3$ の場合について載せている．

$$a_3=\frac{3}{5}a\Big\{1+\frac{2\cdot5^2-18}{3\cdot5^2}\frac{c}{d}+\frac{2\cdot5^2-18}{3\cdot5^2}\frac{8\cdot5^2-18}{10\cdot5^2}(\frac{c}{d})^2$$

$$+\frac{2\cdot5^2-18}{3\cdot5^2}\frac{8\cdot5^2-18}{10\cdot5^2}\frac{18\cdot5^2-18}{21\cdot5^2}(\frac{c}{d})^3+\cdots\Big\}$$

$$=\frac{3}{5}a\Big\{1+\frac{32}{75}\frac{c}{d}+\frac{32}{75}\frac{91}{125}(\frac{c}{d})^2+\frac{32}{75}\frac{91}{125}\frac{144}{175}(\frac{c}{d})^3+\cdots\Big\}$$

3.2 方術

正多角形について辺と角中径（正多角形の外接円の半径），平中径（正多角形の内接円の半径）のあいだの関係を調べる．

3.2.1 第十求角中径冪

正多角形の一辺が与えられた時，角中径冪を表わす級数を求める．正多角形の角数 n，一辺 a，角中径を R とする．

$$A_0 = \frac{n^2a^2}{36},\ a_1 = n^2 - 36,\ b_1 = 12n^2,\ a_2 = 4n^2 - 36,\ b_2 = 30n^2,$$

$$a_3 = 9n^2 - 36\ ,\ b_3 = 56n^2\ ,\ a_4 = 16n^2 - 36,\ b_4 = 90n^2, \ldots$$

と置き，

$$A_1 = A_0\frac{a_1}{b_1} = \frac{n^2a^2}{36}\frac{n^2-36}{12n^2},\ A_2 = (A_0\frac{a_2}{b_2} - A_1)\frac{a_1}{b_1},$$

$$A_3 = \left\{(A_0\frac{a_3}{b_3} - A_1)\frac{a_2}{b_2} - A_2\right\}\frac{a_1}{b_1}, \ldots$$

とする．

$$R^2 = A_0 - (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots)$$

上式を求めるのに，第 14 求角面冪を用いる．

$$a_n^2 = \frac{36R^2}{n^2}\left\{1 + \frac{n^2-36}{12n^2} + \frac{n^2-36}{12n^2}\frac{4n^2-36}{30n^2} + \frac{n^2-36}{12n^2}\frac{4n^2-36}{30n^2}\frac{9n^2-36}{56n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{n^2-36}{12n^2}\frac{4n^2-36}{30n^2}\frac{9n^2-36}{56n^2}\frac{16n^2-36}{90n^2} + \cdots\right\}$$

上記の a_k, b_k を用いて表わすと，

$$a_n^2 = \frac{36R^2}{n^2}\left\{1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}\frac{a_4}{b_4} + \cdots\right\}$$

この式より，

$$R^2 = \frac{n^2a^2}{36}\frac{1}{\{1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}\frac{a_4}{b_4} + \cdots\}}$$

と考えられる，$R^2 = A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots$ と置く，

$$\frac{n^2a^2}{36} = (A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots)(1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}$$

$$+ \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}\frac{a_4}{b_4} + \cdots)$$

より

$$A_0 = \frac{n^2a^2}{36}, -A_1 + A_0\frac{a_1}{b_1} = 0,\ A_1 = A_0\frac{a_1}{b_1}, -A_2 -_1 \frac{a_1}{b_1} + A_0\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2},\ A_2 = (A_0\frac{a_2}{b_2} - A_1)\frac{a_1}{b_1}, \ldots$$

$$-A_n - A_{n-1}\frac{a_1}{b_1} - A_{n-2}\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} - \cdots - A_1\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + A_0\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$A_n = (\cdots((A_0\frac{a_n}{b_n} - A_1)\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - A_2)\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\cdots)\frac{a_1}{b_1}$$

角中径冪の式が成り立つことが示せた．

$n=10, a=3$ と $n=3, a=5$ の場合について載せている．

$n=10, a=3$ のとき，

$$A_0 = 25, a_1 = 64, a_2 = 364, a_3 = 864, b_1 = 1200, b_2 = 3000, b_3 = 5600, \ldots$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{75}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{91}{750}, \frac{a_3}{b_3} = \frac{27}{175}, \cdots$$

$$A_1 = A_0\frac{4}{75}, A_2 = (A_0\frac{91}{750} - A_1)\frac{4}{75}, A_3 = \left\{(A_0\frac{27}{175} - A_1)\frac{91}{750} - A_2\right\}\frac{4}{75}, \ldots$$

$n=3, a=5$ のとき，

$$A_0 = \frac{25}{4}, a_1 = -27, a_2 = 0, b_1 = 108, \frac{a_1}{b_1} = -\frac{1}{4}$$

$$A_1 = -\frac{1}{4}, A_0, A_2 = -A_1\frac{1}{4} = -(\frac{1}{4})^2A_0, A_3 = -A_2\frac{1}{4} = -(\frac{1}{4})^3A_0, \ldots$$

$$R^2 = A_0\left\{1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \cdots\right\} = \frac{25}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{25}{3}$$

3.2.2 第十一求角中径

正多角形の一辺が与えられた時，角中径を表わす級数を求める．正多角形の角数 n，一辺 a，角中径を R とする．

$$A_0 = \frac{na}{6}, a_1 = n^2 - 36, b_1 = 24n^2, a_2 = 9n^2 - 36, b_2 = 80n^2, a_3 = 25n^2 - 36,$$

$$b_3 = 168n^2, a_4 = 49n^2 - 36, b_4 = 288n^2, \ldots$$

と置き，

$$A_1 = A_0\frac{a_1}{b_1} = \frac{na}{6}\frac{n^2-36}{24n^2}, A_2 = (A_0\frac{a_2}{b_2} - A_1)\frac{a_1}{b_1}, A_3 = \left\{(A_0\frac{a_3}{b_3} - A_1)\frac{a_2}{b_2} - A_2\right\}\frac{a_1}{b_1}, \ldots$$

とする．

$$R = A_0 - (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots)$$

上式を求めるのに，第 15 求角面を用いる．

$$a_n = \frac{6R}{n}\left\{1 + \frac{n^2-36}{24n^2} + \frac{n^2-36}{24n^2}\frac{9n^2-36}{80n^2} + \frac{n^2-36}{24n^2}\frac{9n^2-36}{80n^2}\frac{25n^2-36}{168n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{n^2-36}{24n^2}\frac{9n^2-36}{80n^2}\frac{25n^2-36}{168n^2}\frac{49n^2-36}{288n^2} + \cdots\right\}$$

上記の a_k, b_k を用いて表わすと,

$$a_n = \frac{6R}{n}\left\{1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}\frac{a_4}{b_4} + \cdots\right\}$$

この式より,

$$R = \frac{na}{6}\frac{1}{\{1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}\frac{a_4}{b_4} + \cdots\}}$$

と考えられる. $R = A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots$ と置く,

$$\frac{na}{6} = (A_0 - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots)(1 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3} + \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3}{b_3}\frac{a_4}{b_4} + \cdots)$$

$$A_0 = \frac{na}{6}, -A_1 + A_0\frac{a_1}{b_1} = 0, A_1 = A_0\frac{a_1}{b_1}, -A_2 -_1 \frac{a_1}{b_1} + A_0\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}, A_2 = (A_0\frac{a_2}{b_2} - A_1)\frac{a_1}{b_1},$$

$$-A_n - A_{n-1}\frac{a_1}{b_1} - A_{n-2}\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} - \cdots - A_1\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + A_0\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$A_n = (\cdots((A_0\frac{a_n}{b_n} - A_1)\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - A_2)\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\cdots)\frac{a_1}{b_1}$$

角中径の式が成り立つことが示せた.

$n = 10, a = 3$ の場合について載せている,

$$A_0 = 5, a_1 = 64, a_2 = 864, a_3 = 2464, b_1 = 2400, b_2 = 8000, b_3 = 16800, \ldots$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{75}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{27}{250}\frac{a_3}{b_3} = \frac{11}{75}, \cdots$$

$$A_1 = A_0\frac{2}{75}, A_2 = (A_0\frac{27}{250} - A_1)\frac{2}{75}, A_3 = \left\{(A_0\frac{11}{75} - A_1)\frac{27}{250} - A_2\right\}\frac{2}{75}, \cdots$$

3.2.3 第十二求平中径冪仍求角積冪

正多角形の一辺が与えられた時, 平中径冪と正多角形の面積の2乗を求める. 正多角形の角数を n, 一辺を a, 平中径を r とする. 角中径冪より,

$$r^2 = R^2 - (\frac{a}{2})^2$$

によって求められる.

面積をAとすると,

$$A^2 = (\frac{ar}{2}n)^2 = r^2n^2(\frac{a}{2})^2$$

$n = 10, a = 3$ の場合について, 第十角中径冪の例を用いて平中径冪を求めることを載せている.

3.2.4 第十三求平中径仍求角積

正多角形の一辺が与えられた時，平中径と正多角形の面積を求める．正多角形の角数 n，一辺 a，平中径を r とする．

$$A_0=\frac{9R}{2n^2},\ A_1=\frac{n^2-9}{12n^2}A_0,\ A_2=\frac{4n^2-9}{30n^2}A_1,\ A_3=\frac{9n^2-9}{56n^2}A_2,\ A_4=\frac{16n^2-9}{90n^2}A_3,\dots$$

として

$$\begin{aligned}r&=R-(A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots)\\&=R-\frac{9R}{2n^2}\Big\{1+\frac{n^2-9}{12n^2}+\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2}+\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2}\frac{9n^2-9}{56n^2}\\&+\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2}\frac{9n^2-9}{56n^2}\frac{16n^2-9}{90n^2}+\cdots\Big\}\end{aligned}$$

r は R と c_m の式より導かれる．$c=\frac{d}{4}$ とする．これは正六角形の時を考ええていることになる．

$$r=R\cos\frac{\pi}{n}=R\cos\frac{6\arcsin\frac{1}{2}}{n},$$

$$\pi=6\arcsin\frac{1}{2}.$$

第八求弧中距斜矢と同様にして成り立つことがわかる．
$n=3$，の場合について載せている．

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{3}},\ A_0=\frac{R}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

面積を A とすると，$A=rn\frac{a}{2}$．

3.2.5 第十四求角面冪

正多角形の角中径が与えられた時，一辺の 2 乗を表わす級数を求める．正多角形の角数 n，一辺 a_n，角中径を R_n とする．

$$A_0=\frac{36R^2}{n^2},\ A_1=\frac{n^2-36}{12n^2}A_0,\ A_2=\frac{4n^2-36}{30n^2}A_1,\ A_3=\frac{9n^2-36}{56n^2}A_2,\ A_4=\frac{16n^2-36}{90n^2}A_3,\dots$$

として

$$\begin{aligned}a_n^2&=A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots\\&=\frac{36R^2}{n^2}\Big\{1+\frac{n^2-36}{12n^2}+\frac{n^2-36}{12n^2}\frac{4n^2-36}{30n^2}+\frac{n^2-36}{12n^2}\frac{4n^2-36}{30n^2}\frac{9n^2-36}{56n^2}\\&+\frac{n^2-36}{12n^2}\frac{4n^2-36}{30n^2}\frac{9n^2-36}{56n^2}\frac{16n^2-36}{90n^2}+\cdots\Big\}\end{aligned}$$

a^2 は c_m の式より導かれる，第十三求平中径と同様に $c=\frac{d}{4}$ とする．これは正六角形の時を考ええていることになる．

$$a_6=2R\sin\theta,\ \theta=\frac{\pi}{6},\quad \sin\theta=\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2},$$

$$\pi=6\arcsin\frac{1}{2},\ a_n=2R\sin\frac{\pi}{n}=2R\sin(\frac{6\arcsin\frac{1}{2}}{n}),$$

$$a_n^2=4R^2\sin^2(\frac{6\arcsin\frac{1}{2}}{n}),$$

$f(x)=\sin^2\phi$，の級数展開をする.$\phi=(\dfrac{2m\arcsin x}{n})$

ここで　$x=\dfrac{1}{2}$　である．　$f(0)=0$

$$f'(x)=2\sin\phi\cos\phi\frac{2m}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=\frac{2m}{n}\sin 2\phi,\ f'(0)=0$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=\frac{4m^2}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}2\cos 2\phi$$

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=\frac{8m^2}{n^2}\cos 2\phi=\frac{8m^2}{n^2}(1-2\sin^2\phi)=\frac{8m^2}{n^2}-\frac{16m^2}{n^2}f(x)$$

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+\frac{16m^2}{n^2}f(x)=\frac{8m^2}{n^2}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$$

と置き上式に代入する，

$$A_2=\frac{4m^2}{n^2},\ A_3=0,$$

$$A_{k+2}=\frac{k^2n^2-16m^2}{(k+2)(k+1)n^2}A_k,$$

k を $2l$ に置きかえる，

$$A_{2l+2}=\frac{2(l^2n^2-4m^2)}{(l+1)(2l+1)n^2}A_{2l}$$

以上により成り立つことが示せた．

$n=5$ とし $R=6$ の場合について載せている．

$$a_5^2=\frac{1296}{25}\left\{1-\frac{11}{300}-\frac{11}{300}\frac{32}{375}-\frac{11}{300}\frac{32}{375}\frac{27}{200}\cdots\right\}$$

3.2.6 第十五求角面

正多角形の角中径が与えられた時，一辺を表わす級数を求める．正多角形の角数 n，一辺 a $_n$，角中径を R とする．

$$A_0=\frac{6R}{n},\ A_1=\frac{n^2-36}{24n^2}A_0,\ A_2=\frac{9n^2-36}{80n^2}A_1,\ A_3=\frac{25n^2-36}{168n^2}A_2,\ A_4=\frac{49n^2-36}{288n^2}A_3,\ldots$$

として

$$\begin{aligned}
a_n &= A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots\\
&=\frac{6R}{n}\Big\{1+\frac{n^2-36}{24n^2}+\frac{n^2-36}{24n^2}\frac{9n^2-36}{80n^2}+\frac{n^2-36}{24n^2}\frac{9n^2-36}{80n^2}\frac{25n^2-36}{168n^2}\\
&\quad+\frac{n^2-36}{24n^2}\frac{9n^2-36}{80n^2}\frac{25n^2-36}{168n^2}\frac{49n^2-36}{288n^2}+\cdots\Big\}
\end{aligned}$$

a は第十七求距面斜 a_m の式において $m=1$ の時になる．ここでは，第十四求角面冪と同様に考え，級数展開により示す．$c=\frac{d}{4}$ として，

$$a_6=2R\sin\theta,\ \ \theta=\frac{\pi}{6},\ \ \sin\theta=\frac{1}{2},\ \ \frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2},$$

$$\pi=6\arcsin\frac{1}{2},\ \ a_n=2R\sin\frac{\pi}{n}=2R\sin(\frac{6\arcsin\frac{1}{2}}{n}),$$

$f(x)=\sin\phi$，の級数展開をする．$\phi=\dfrac{2m\arcsin x}{n}$

ここで $x=\dfrac{1}{2}$，である． $f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{2m}{n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos\phi$$

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=\frac{2m}{n}\cos\phi,\ \ f'(0)=\frac{2m}{n}$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=-\frac{4m^2}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin\phi$$

$$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=\frac{4m^2}{n^2}f(x)$$

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+\frac{4m^2}{n^2}f(x)=0$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$$

と置き，上式に代入する，

$$A_2=0,\ \ A_3=\frac{n^2-4m^2}{6n^2},$$

$$A_{k+2} = \frac{k^2n^2 - 4m^2}{(k+2)(k+1)n^2}A_k,$$

k を $2l-1$ に置きかえる,

$$A_{2l+1} = \frac{(2l-1)^2n^2 - 4m^2}{2l(2l+1)n^2}A_{2l-1}$$

以上により成り立つことが示せた. $n=8$ とし $R=6$ の場合について載せている.

$$a_8 = \frac{9}{2}\left\{1 + \frac{7}{384} + \frac{7}{384}\frac{27}{256} + \frac{7}{384}\frac{27}{256}\frac{391}{2688}\cdots\right\}$$

3.2.7 第十六求距面矢或設係面矢

正多角形の角中径が与えられた時, 距面矢を表わす級数を求める. 正多角形の角数を n, 角中径を R, 距面数を m, 距面矢を c_m とする.

$$a_1 = n^2 - 9m^2, b_1 = 12n^2, a_2 = 4n^2 - 9m^2, b_2 = 30n^2, a_3 = 9n^2 - 9m^2, b_3 = 56n^2,$$

$$a_4 = 16n^2 - 9m^2, b_4 = 90n^2, \ldots$$

と置き, $(n \geq 3)m$ が奇数の時,

$$A_0 = \frac{9R(m^2-1)}{2n^2}, B_1 = 9A_0, A_1 = \frac{A_0a_1 - B1}{b_1}, B_2 = \frac{n^2-9}{b_1}B_1, A_2 = \frac{A_1a_2 - B_2}{b_2},$$

$$B_3 = \frac{4n^2-9}{b_2}B_2, A_3 = \frac{A_2a_3 - B_3}{b_3}, B_4 = \frac{9n^2-9}{b_3}B_3, A_4 = \frac{A_3a_4 - B_4}{b_4}, \ldots$$

として

$$c_m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

$(n \geq 4)m$ が偶数の時,

$$A_0 = \frac{9Rm^2}{n^2}, A_1 = A_0\frac{a_1}{b_1}, A_2 = A_1\frac{a_2}{b_2}, A_3 = A_2\frac{a_3}{b_3}, A_4 = A_3\frac{a_4}{b_4}, \ldots$$

として

$$c_m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

第八求弧中距斜矢によって m が偶数の時,

$$c_m = \frac{d}{2}(1 - \cos m\theta), \ \theta = \frac{\pi}{n} = \frac{6 \arcsin \frac{1}{2}}{n}, \ m\theta = m\frac{\pi}{n} = \frac{6m \arcsin \frac{1}{2}}{n}$$

$$c_m = \frac{9Rm^2}{2n^2}\left\{1 + \frac{n^2-9m^2}{12n^2} + \frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2} + \frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2}\frac{9n^2-9m^2}{56n^2}\right.$$

$$\left. + \frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2}\frac{9n^2-9m^2}{56n^2}\frac{16n^2-9m^2}{90n^2} + \cdots\right\}$$

より求められる．

m が奇数の時，

$$c_m = \frac{d}{2}(1-\cos m\theta) - \frac{d}{2}(1-\cos\theta)$$

$$c_m = (\frac{9Rm^2}{2n^2} - \frac{9R}{2n^2}) + (\frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{n^2-9m^2}{12n^2} - \frac{9R}{2n^2}\frac{n^2-9}{12n^2})$$

$$+(\frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2} - \frac{9R}{2n^2}\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2})$$

$$+(\frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2}\frac{9n^2-9m^2}{56n^2} - \frac{9R}{2n^2}\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2}\frac{9n^2-9}{56n^2})$$

$$+(\frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2}\frac{9n^2-9m^2}{56n^2}\frac{16n^2-9m^2}{90n^2}$$

$$-\frac{9R}{2n^2}\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2}\frac{9n^2-9}{56n^2}\frac{16n^2-9}{90n^2}) + \cdots$$

$$A_0 = \frac{9R(m^2-1)}{2n^2}$$

$$A_1 = (\frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{n^2-9m^2}{12n^2} - \frac{9R}{2n^2}\frac{n^2-9}{12n^2}) = \frac{9R}{2n^2}\frac{1}{12n^2}\{(m^2-1)(n^2-9m^2) - 9(m^2-1)\}$$

$$= \frac{\frac{9R(m^2-1)}{2n^2}(a_1-9)}{b_1} = \frac{A_0a_1 - 9A_0}{b_1} = \frac{A_0a_1 - B_1}{b_1}$$

$$A_2 = \frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{n^2-9m^2}{12n^2}\frac{4n^2-9m^2}{30n^2} - \frac{9R}{2n^2}\frac{n^2-9}{12n^2}\frac{4n^2-9}{30n^2}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1b_2}\{m^2(n^2-9m^2)(4n^2-9m^2) - (n^2-9)(4n^2-9)\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1b_2}\{(m^2-1)(n^2-9m^2)(4n^2-9m^2) + (n^2-9m^2)(4n^2-9m^2) - (n^2-9)(4n^2-9)\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1b_2}[(m^2-1)a_1a_2 + \{(n^2-9m^2) - (n^2-9)\}(4n^2-9m^2)$$

$$+(n^2-9)(4n^2-9m^2) - (n^2-9)(4n^2-9)]$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1b_2}[(m^2-1)a_1a_2 - 9(m^2-1)a_2 + (n^2-9)\{(4n^2-9m^2) - (4n^2-9)\}]$$

$$= \frac{9R(m^2-1)}{2n^2b_1b_2}\{a_1a_2 - 9a_1 - 9(n^2-9)\} = \frac{A_0a_1a_2 - 9A_0a_2 - 9A_0(n^2-9)}{b_1b_2}$$

$$= \frac{\frac{A_0a_1-9A_0}{b_1}a_2 - B_1\frac{n^2-9}{b_1}}{b_2} = \frac{A_1a_2 - B_2}{b_2}$$

$$a_k = k^2n^2 - 9m^2,\ b_k = (2k+1)(2k+2)n^2,\ c_k = k^2n^2 - 9,$$

$$A'_1 = a_1 - 9,\ A'_k = A'_{k-1}a_k - c_1 \cdots c_{k-1}$$

とする，

$$A_k = \frac{9Rm^2}{2n^2}\frac{a_1\cdots a_k}{b_1\cdots b_k} - \frac{9R}{2n^2}\frac{c_1\cdots c_k}{b_1\cdots b_k} = \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}(m^2a_1\cdots a_k - c_1\cdots c_k)$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}\{(m^2-1)a_1\cdots a_k + a_1\cdots a_k - c_1\cdots c_k\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}\{(m^2-1)a_1\cdots a_k - 9(m^2-1)a_2\cdots a_k + c_1a_2\cdots a_k - c_1\cdots c_k\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}\{(m^2-1)(a_1-9)a_2\cdots a_k - 9(m^2-1)c_1a_3\cdots a_k + c_1c_2a_3\cdots a_k - c_1\cdots c_k\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}\{(m^2-1)(A'_1a_2 - 9c_1)a_3\cdots a_k - 9(m^2-1)c_1c_2a_4\cdots a_k + c_1c_2c_3a_4\cdots a_k - c_1\cdots c_k\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}\{(m^2-1)(A'_2a_3 - 9c_1c_2)a_4\cdots a_k - 9(m^2-1)c_1c_2c_3a_5\cdots a_k + c_1c_2c_3c_4a_5\cdots a_k - c_1\cdots c_k\}$$

$$\cdots$$

$$\frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_k}\{(m^2-1)(A'_{k-1}a_k - 9c_1\cdots c_{k-1})\}$$

k の時成り立つと仮定すると $k+1$ の時，

$$A_{k+1} = \frac{9rm^2}{2n^2}\frac{a_1\cdots a_ka_{k+1}}{b_1\cdots b_kb_{k+1}} - \frac{9R}{2n^2}\frac{c_1\cdots c_kc_{k+1}}{b_1\cdots b_kb_{k+1}}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_{k+1}}\{(m^2a_1\cdots a_k - c_1\cdots c_k)a_{k+1} + c_1\cdots c_ka_{k+1} - c_1\cdots c_kc_{k+1}\}$$

$$= \frac{9R}{2n^2b_1\cdots b_{k+1}}\{(m^2-1)(A'_ka_{k+1} - 9c_1\cdots c_k)\}$$

A_{k+1} の時も成り立つ，よって A_n が示せた．

3.2.8 第十七求距面斜或謂係面斜

有角中径距面数求距面斜 正多角形の角中径が与えられた時，距面斜（正多角形の対角線）を表わす級数を求める．正多角形の角数を n，角中径を R，距面数を m，距面斜を a_m とする．

$$A_0 = \frac{6R}{n},\ A_1 = \frac{n^2-36m^2}{24n^2}A_0,\ A_2 = \frac{9n^2-36m^2}{80n^2}A_1,$$

$$A_3 = \frac{25n^2-36m^2}{168n^2}A_2,\ A_4 = \frac{49n^2-36m^2}{288n^2}A_3, \ldots$$

として

$$a_m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$
$$= \frac{6R}{n}\Big\{1 + \frac{n^2-36m^2}{24n^2} + \frac{n^2-36m^2}{24n^2}\frac{9n^2-36m^2}{80n^2} + \frac{n^2-36m^2}{24n^2}\frac{9n^2-36m^2}{80n^2}\frac{25n^2-36m^2}{168n^2}$$
$$+\frac{n^2-36m^2}{24n^2}\frac{9n^2-36m^2}{80n^2}\frac{25n^2-36m^2}{168n^2}\frac{49n^2-36m^2}{288n^2} + \cdots\Big\}$$

これは，

$$a_m = 2R\sin m\theta,\ \ a = 2R\sin\theta,\ \ \theta = \frac{\pi}{n} = \frac{6\arcsin\frac{1}{2}}{n}.$$

$n=5,\ R=6,\ m=2$ の場合 a_2 が載せられている．

$$A_0 = \frac{72}{5},\ A_1 = -\frac{119}{600}A_0,\ A_2 = \frac{81}{2000}A_1,\ A_3 = \frac{481}{4200}A_2,\ A_4 = \frac{1081}{7200}A_3, \cdots$$

有面距面数求距面斜　正多角形の角毎面（正多角形の一辺）が与えられた時，距面斜を表わす級数を求める．正多角径の角数を n，角毎面を a，距面数を m，距面斜を a_m とする．原数 $= ma$　とし，

汎乗原式	**定除原式**
$a_1 = -9$	$b_1 = n^2$
$a_2 = n^2 - 9$	$b_2 = 12n^2$
$a_3 = 4n^2 - 9$	$b_3 = 30n^2$
$a_4 = 16n^2 - 9$	$b_4 = 56n^2$
$a_5 = 25n^2 - 9$	$b_5 = 90n^2$

と置き，

汎乗法

$a_1 = -9$

$a_1a_2 = -9n^2 + 81$

$a_1a_2a_3 = -36n^4 + 405n^2 - 729$

$a_1a_2a_3a_4 = -324n^6 + 3969n^4 - 10206n^2 + 6561$

$a_1a_2a_3a_4a_5 = -5184n^8 + 66420n^6 - 199017n^4 + 196830n^2 - 59049$

定除法

$b_1 = n^2$

$b_1b_2 = 12n^4$

$b_1b_2b_3 = 360n^6$

$b_1b_2b_3b_4 = 20160n^8$

$b_1b_2b_3b_4b_5 = 1814400n^{10}$

とする．

距奇面数

	1面斜	3面斜	5面斜	7面斜
一差段数	0	4	20	56
二差段数	0	16	27	21568
三差段数	0	64	4160	50816
四差段数	0	256	65792	17451408
五差段数	0	1024	1049600	61515776

これは

$$(m-1)^{2k}+(m-3)^{2k}+\cdots+$$

より求められる．m が奇数の時，最後は 0, m が偶数の時，最後は 1 となる．

距偶面数

	2面斜	4面斜	6面斜
一差段数	1	10	35
二差段数	1	82	707
三差段数	1	730	16355
四差段数	1	6562	397187
五差段数	1	59050	3824675

$m=3$ のとき 4, 16, 64, 256, 1024 より，

定乗法

$A_1=-4\times 9$

$A_2=-4\times 9n^2+16\times 81$

$A_3=-4\times 36n^4+16\times 405n^2-64\times 729$

$A_4=-4\times 324n^6+16\times 3969n^4-64\times 10206n^2+256\times 6561$

$A_5=-4\times 5184n^8+16\times 66420n^6-64\times 199017n^4$
$\qquad +256\times 196830n^2-1024\times 59042$

$$a_3=a(3-\frac{4\cdot 9}{n^2}-\frac{4\cdot 9n^2-16\cdot 81}{3\cdot 4n^4}-\frac{4\cdot 36n^4-16\cdot 405n^2+64\cdot 729}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6n^6}-\cdots)$$

$$\frac{a_m}{a}=\frac{\sin m\theta}{\sin\theta},\ \theta=\frac{\pi}{n}=\frac{6\arcsin\frac{1}{2}}{n},$$

$$2\sin\theta\cos(m-1)\theta=\sin m\theta-\sin(m-2)\theta,\quad 2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta.$$

m が偶数の時，

$$\frac{a_m}{a}=2\{\cos(m-1)\theta+\cos(m-3)\theta+\cdots+\cos 3\theta+\cos\theta\}$$

m が奇数の時，

$$\frac{a_m}{a}=1+2\{\cos(m-1)\theta+\cos(m-3)\theta+\cdots+\cos 4\theta+\cos 2\theta\}$$

$$\cos(m-1)\theta = 1 - \frac{9(m-1)^2}{2n^2} - \frac{9(m-1)^2}{2n^2}\frac{n^2-9(m-1)^2}{12n^2}$$
$$-\frac{9(m-1)^2}{2n^2}\frac{n^2-9(m-1)^2}{12n^2}\frac{4n^2-9(m-1)^2}{30n^2} - \cdots$$

より導かれる.

3.3 角総平方術　山路主住述作

今有幾角等面若干問角径平径各幾何　正多角形の一辺が与えられた時，正多角形に外接する円の半径を求める公式を載せている.

$$R^2 = \frac{a^2(166374503856n^4 + 1004974720807n^6 + 1517621639810n^8)}{135529756473206n^2 + 59913200861841n^6 - 157432047580066n^4 - 35692069491815}$$

$$R^2 = \frac{a^2(107480n^2 + 62370n^4 + 83577)}{2462268n^2 - 3857400}$$

類術十二例　円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a，弧積（弓形）の面積を A とする.

3.3.1 有径求弦

直径と矢が与えられた時，弦を求める.

$$a = \sqrt{4c(d-c)}$$

3.3.2 有弦矢求径

弧と矢が与えられた時，直径を求める.

$$d = \frac{4c^2 + a^2}{4c}$$

3.3.3 有径弦求矢

直径と弦が与えられた時，矢を求める.

$$c = \frac{(d - \sqrt{d^2 - a^2})}{2}$$

3.3.4 有弦矢求離径

矢と弦が与えられた時，離径 a' を求める.

$$a' = \frac{a^2 - 4c^2}{4c},\ a' = d - 2c$$

3.3.5 有弦離径求径

弦と離径が与えられた時，径を求める．

$$d=\sqrt{a^2+a'^2}$$

3.3.6 有径矢求傍弦

矢と直径が与えられた時，旁斜弦を求める．

$$旁斜弦=\sqrt{cd}$$

3.3.7 有径矢背弦求弧積

直径，背，矢と弦が与えられた時，弧積を求める．

$$A=\frac{dS}{4}-\frac{a(d-2c)}{4}=\frac{dS-a(d-2c)}{4}$$

3.3.8 今有弧円径若干背位若干問矢

直径と背が与えられた時，矢を求める．背冪法を $\alpha=0.13419$ とする．

$$c=\frac{(\frac{S}{2})^2-\frac{(\frac{S}{2})^4}{3\{((\frac{S}{2})^2\alpha+d^2\}}}{d}=\frac{S^2-\frac{S^4}{3(S^2\alpha+4d^2)}}{4d}$$

$$c=\frac{S^2}{4d}\left\{1-\frac{1}{12}\frac{S^2}{d^2}+\frac{1}{30}(\frac{S^2}{d^2})^2-\cdots\right\}$$

$$dc=(\frac{S}{2})^2-\frac{1}{3}(\frac{S}{2})^4\frac{1}{d^2}-\frac{1}{3}(\frac{S}{2})^4\frac{1}{d^2}\{-\frac{4}{30}(\frac{S}{2})^2\frac{1}{d^2}\}+\cdots$$

ここで定式を公比 $-\frac{4}{30}(\frac{S}{2})^2\frac{1}{d^2}$ の等比級数と考え和を求める．

$$dc\approx(\frac{S}{2})^2-\frac{\frac{1}{3}(\frac{S}{2})^4\frac{1}{d^2}}{1+\frac{4}{30}(\frac{S}{2})^2\frac{1}{d^2}}$$

$$\approx(\frac{S}{2})^2-\frac{(\frac{S}{2})^4}{3\{d^2+\alpha'(\frac{S}{2})^2)\}}$$

ここで $\alpha'=\frac{4}{30}=0.1333\cdots$ より求めたものであると考えられる．

3.3.9 今有弧矢弦問背

矢と弦が与えられた時，背を求める．矢冪法（弧法を）$\beta=5.8696$ とする．

$$S=\sqrt{a^2+\beta c^2}$$

3.3.10 今有弧矢若干背若干弦

矢と背が与えられた時，弦を求める．

$$a = \sqrt{S^2 - \beta c^2}$$

3.3.11 今有弧弦若干背若干問矢

弦と背が与えられた時，矢を求める．

$$c = \sqrt{\frac{S^2 - a^2}{\beta}}$$

3.3.12 今有弧矢弦問弧積

矢と弦が与えられた時，弧積を求める．円闕法を $\gamma = 0.4$ とする．

$$A = \frac{\pi}{4}\{(2a + c)c\gamma\}$$

4 方圓奇巧下巻

4.1 括術

4.1.1 其一求弧背

2.2.2 第四求弧背（3）有径弦求背 に載せられている式と同じものである．ここでは，各差を小数であらわし，$\alpha = \frac{d}{c}$ を除法とし，級数を

$$S = a\left[1 + \frac{A_1 + \frac{A_2 + \frac{A_3 + \frac{A_4 + \frac{A_5}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha}\right]$$

のように表している．以下同様に級数を表している．

4.1.2 其二求弧矢

2.2.3 第五求弧矢 に載せられている式と同じものである．

4.1.3 其三求弧弦

2.2.4 第六求弧弦 に載せられている式と同じものである．

4.1.4 其四求弧積

2.2.5 第七求弧積 に載せられている式と同じものである．

4.1.5 其五求弧中距斜矢

3.1.1 第八求弧中距斜矢 と同様に直径と矢が与えられた時，距斜矢を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，距斜数を m，容斜数を n，距斜矢を c_m とする．ここでは，2.2.1 第三求弧背冪 を用いて S^2 を求め，次に $\frac{S^2 \cdot m}{n} = S_m^2$ より c_m に対応する弧 S_m^2 を計算する．そして S_m^2 と d より c_m を 2.2.3 第五求弧矢 または 4.1.2 其二求弧矢によって求めている．この事は，3.1.1 第八求弧中距斜矢に載せられている式を，どのようにして導き出したかを示唆している．2.2.1 第三求弧背冪に載せられている式より，

$$S^2 = 4cd\left\{1 + \frac{2}{6}\frac{c}{d} + \frac{2}{6}\frac{8}{15}(\frac{c}{d})^2 + \frac{2}{6}\frac{8}{15}\frac{18}{28}(\frac{c}{d})^3 + \frac{2}{6}\frac{8}{15}\frac{18}{28}\frac{32}{45}(\frac{c}{d})^4 + \cdots\right\}$$

$$S_m^2 = 4cd\left\{1 + \frac{2}{6}\frac{c_m}{d} + \frac{2}{6}\frac{8}{15}(\frac{c_m}{d})^2 + \frac{2}{6}\frac{8}{15}\frac{18}{28}(\frac{c_m}{d})^3 + \frac{2}{6}\frac{8}{15}\frac{18}{28}\frac{32}{45}(\frac{c_m}{d})^4 + \cdots\right\}$$

$S = \frac{n}{m}S_m$ より $x = \frac{c}{d}$，$y = \frac{c_m}{d}$ とし，

$$a_1 = \frac{2}{6}, a_2 = \frac{8}{15}, a_3 = \frac{18}{28}, a_4 = \frac{32}{45}, \ldots$$

と置き，

$$S^2 = 4d^2\{x + a_1 \cdot x^2 + a_1a_2 \cdot x^3 + a_1a_2a_3 \cdot x^4 + a_1a_2a_3a_4 \cdot x^5 + \cdots\}$$

$$S^2 = (\frac{n}{m}S_m)^2 = 4d^2(\frac{n}{m})^2\{y + a_1 \cdot y^2 + a_1a_2 \cdot y^3 + a_1a_2a_3 \cdot y^4 + a_1a_2a_3a_4 \cdot y^5 + \cdots\}$$

$$y = b_0 \cdot x + b_0b_1 \cdot x^2 + b_0b_1b_2 \cdot x^3 + b_0b_1b_2b_3 \cdot x^4 + b_0b_2b_3b_4 \cdot x^5 + \cdots$$

とする．この3式より b_0, b_1, b_2, b_3, $\cdots$ を求めればよい．

$$b_0 = \frac{m^2}{n^2}, b_1 = a_1(1 - \frac{m^2}{n^2}), b_2 = a_2(1 - \frac{m^2}{4n^2}), \cdots$$

このようにして求めたと考えられる．

4.1.6 其六求弧中距斜弦

3.1.2 第九求弧中距斜弦 と同様に直径，矢と弦が与えられた時，距斜弦を求める．円弧を S，直径を d，矢を c，弦を a，距斜数を m，容斜数を n，距斜弦を a_m とする．ここでは，2.2.2 第四求弧背（3）有径弦求背 または 4.1.1 其一求弧背を用いて S を求め，次に $\frac{S \cdot m}{n} = S_m$ より a_m に対応する弧 S_m を計算する．そして S_m と d より a_m を 2.2.4 第六求弧弦 または 4.1.3 其三求弧弦によって求めている．

4.1.7 其七求角中径

正多角形の一辺が与えられた時，角中径を表わす級数を求める．正多角形の角数 n，一辺 a，角中径を R とする．

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

より

$$\frac{1}{2\sin\pi x}$$

の級数展開を載せている．

4.1.8 其八求平中径

正多角形の一辺が与えられた時，平中径．正多角形の角数 n，一辺 a，平中径を r とする．

$$r = \frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

より

$$\frac{1}{2}\cot\pi x$$

の級数展開を載せている．

4.1.9 其九求角積

正多角形の一辺が与えられた時，正多角形の面積を求める．正多角形の角数 n，一辺 a，平中径を r とする．4.1.8　其八求平中径　によって平中径 r を求め $S = \frac{nar}{2}$ より求める．

4.1.10 其十求角面

正多角形の角中径が与えられた時，一辺を表わす級数を求める．正多角形の角数 n，一辺 a_n，角中径を R とする．

$$a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

より

$$2\sin\pi x$$

の級数展開を載せている．

4.1.11 其十一求距面矢

3. 2. 7 第十六求距面矢或設係面矢 に載せられている式と同様正多角形の角中径が与えられた時，距面矢を表わす級数を求める．正多角形の角数を n，角中径を R，距面数を m，距面矢を c_m とする．
m が偶数の時，

$$c_m = \frac{d}{2}(1 - \cos\frac{m}{n}\pi)$$

m が奇数の時，

$$c_m = \frac{d}{2}(1 - \cos\frac{m}{n}\pi) - \frac{d}{2}(1 - \cos\frac{1}{n}\pi)$$

より，

$$1 - \cos\pi x$$

の級数展開を載せている．

4.1.12 其十二求距面斜謂係有角中径係面面斜数求其距斜

3.2.8 第十七求距面斜或謂係面斜 に載せられている式と同様，正多角形の角中径，または角毎面が与えられた時，距面斜を表わす級数を求める．正多角形の角数を n，角中径を R，角毎面を a，距面数を m，距面斜を a_m とする．
角中径が与えられた時，

$$a_m = 2R\sin\frac{m}{n}\pi$$

角毎面が与えられた時，

$$a_m = a\frac{\sin\frac{m}{n}\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

この時は，

$$\sigma_{2k} = (m-1)^{2k} + (m-3)^3 + \cdots$$

として，m が偶数の時 $m = 2k$，

$$\frac{\sin\frac{m}{n}\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sigma_{2k}}{n^{2k}}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}$$

m が奇数の時 $m = 2k+1$，

$$\frac{\sin\frac{m}{n}\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sigma_{2k}}{n^{2k}}\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}$$

となる．本文には，

$$2\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}$$

の値を載せている．

4.2 巻中採用真数皆数末位而用之故不等位数

中巻では円周率を用いない，級数展開の式を載せているのに対して，下巻では円周率を用いた級数展開の式を載せている．そのためには，円周率の冪が必要になる．それで π^n, $n = 1 \sim 22$ の値を載せている．その他，円の直径を 10 として，矢が 1, 2, 3, 4, 4.5 の時の背の値，背冪，背が 9 の時の矢，弦の値を載せている．

5 方圓奇巧附巻　術路

原術定矩之図乗数者用右傍書除数者用差傍書

括術求差法之図傍書同于前

附巻はこれまでに載せられている式について，例えば 第一條逐差の図 では，2.1.2 第一円周冪に載せられている式を，

$$背冪 = 原数 - 逐差$$

$$原数 = 矢 \times 円径$$

$$一差数 = \frac{一差乗率 \times 矢 \times 原数}{径 \times 一差除率}$$

$$二差数 = \frac{二差乗率 \times 矢 \times 一差}{径 \times 二差除率}$$

のようにまとめている．(本文は傍書法を用いて縦書きであるが，横書きになおした.) 上，中，下巻の本文は文章で書かれているが，式をあらわすために，本稿ではこのようなあらわし方を用いてきた．そのため省略する．

上，中，下巻に述べられていない内容としては，下巻で述べている括術に関して，其七 角中径求率，において

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

のベルヌーイ数を用いた級数展開を載せている．そのため，ベルヌーイ数を計算するための漸化式とベルヌーイ数の表を載せている．

$\frac{1}{\sin\theta}$ の展開とベルヌーイ数の関係については，藤井 [9][10] に詳しく述べているので，省略する．

6 方圓奇巧　上巻　序文

所謂方圓之術既録諸書然穫往畿内藤政樹 従四位下備後守采地七万石其頃奥州岩城城主後賜日向延岡之城今致仕落髪而号兼山 之臣葆直斎良弼 氏松永称安右衛門 者所著方圓算経全備五巻而閲之其原路深奥裏可謂妙術故服其高妙秘蔵篋中尚矣今也取其例以更施術文分技巧而成冊子名曰方圓奇巧豈據此術遂得其真数捷徑術也又適聞連具軒平主住 東都天文生仕 府朝 自發以

算顆平方術得角平兩中徑一般之通術而贈其稿不穀熟覽之合攷算経術則雖其技異而至推玄理即歸一源故文之掲丁尾條以示其渕源爲學者欲取便捷則旡如用此書云爾

維時明和三龍集柔兆閹茂大旋上澣肇採刧毫千筑南林花堂同歳南訛下浣逐斯而成矣

7　まとめと課題

『方圓奇巧』に載せられている級数について，どのようにして級数を求めたか，またどのような目的の為に級数が必要とされていたのか，は述べられていない．松永良弼の『方圓算經』をもとに解説したものであることが序文に述べられているだけである．問題解法の中で級数が用いられるようになるのは安島直圓にもみられるが，和田寧などずいぶん後の事である．どのようにして，どのような目的の為に級数を求めたかは，今後に残された，大きな課題である．
次に,『方圓奇巧』上，中巻に載せられている級数について，まとめておく．
級数における各項の係数によって分類する．

第１群

第一求円周冪，第三求弧背冪，第五求弧矢，第八求弧中距斜矢，第十三求平中径仍求角積，第十四求角面冪，第十六求距面矢或設係面矢，第十七求距面斜或謂係面斜（後半）

第２群

第二求円周，第四求弧背（1），(4)，第六求弧弦，第十五求角面，第十七求距面斜或謂係面斜（前半）

第３群

第四求弧背（2），(5)

第４群

第四求弧背（3），第七求弧積，第九求弧中距斜弦

第１群は，$\sin^2(k\arcsin x)$ の級数展開がもとになっている．

第２群は，$\sin(k\arcsin x)$ の級数展開がもとになっている．

第３群は，$\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ の級数展開である．

第４群は，$\frac{\sin(k\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ の級数展開がもとになっている．

8　補足　$(2n)!!, (2n-1)!!$ を含む有限級数について

前節で分類した４群の級数の関係について，和算家は，始めに弧の２乗 (S^2) を表わす級数（第１群）を導き，本節で述べる冪級数の計算と同様にして $n=1$ の時より順に計算していき，その結果から弧 (S) に関する級数の各項の関係等を求めたと言われている．本節で述べる，$(1-1)\ldots(4-2)$ 式を意識していたかどうかはわからないが，$(1-1)\ldots(3)$ 式が成り立つ事がわかれば弧 (S) に関する級数（第２群，第４群）が有限級数の和を求める事によって導かれた事になる．そこで，$(2n)!!, (2n-1)!!$ を含む有限級数の和に関する関係 $(1-1)\ldots(3)$ 式を逆三角関数の展開式を用いずに導く事ができるか，という事が問題になる．

$(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2,\ (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$． $(0!! = (-1)!! = 1)$

１．第三求弧背冪と第四求弧背（１）の関係より

$$\frac{(4m-2)!!}{(4m-1)!!2m} = 2\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!(2j+1)}\frac{(4m-2j-3)!!}{(4m-2j-2)!!(4m-2j-1)} \quad \cdots\cdots (1-1)$$

$$\frac{(4m)!!}{(4m+1)!!(2m+1)} = 2\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!(2j+1)}\frac{(4m-2j-1)!!}{(4m-2j)!!(4m-2j+1)} + \left\{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!(2m+1)}\right\}^2 \quad \cdots\cdots (1-2)$$

この式は，弧 (S)，矢 (c)，直径 (d) に関する級数，

$$S^2 = \left(2d\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 = 4cd\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n,\quad S = 2d\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}} = 2\sqrt{cd}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{c}{d}\right)^n$$

より導かれる．a_n と b_n の間には，次の関係が成り立つ．

$$a_0 = b_0 = 1,\quad a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)},\quad b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)},$$

として，

$n = 2m-1$ のとき，

$$a_{2m-1} = \sum_{j=0}^{m-1}2b_jb_{2m-1-j}$$

$n = 2m$ のとき，

$$a_{2m} = \sum_{j=0}^{m-1}2b_jb_{2m-j} + b_m^2$$

となる．これによって，$(1-1), (1-2)$ 式が導かれる．

２．第四求弧背（３）と第四求弧背（４）の関係より

$$\frac{(4m-2)!!}{(4m-1)!!} = \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j4^{2m-1-j}\frac{(4m-2j-3)!!}{(4m-2j-2)!!(4m-2j-1)}\binom{2m-1-j}{j} \quad \cdots\cdots (2-1)$$

$$\frac{(4m)!!}{(4m+1)!!} = \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j4^{2m-1-j}\frac{(4m-2j-1)!!}{(4m-2j)!!(4m-2j+1)}\binom{2m-j}{j} \quad \cdots\cdots (2-2)$$

この式は，弧 (S)，弦 (a)，矢 (c)，直径 (d) に関する級数，

$$S = a\frac{\arcsin\sqrt{\frac{c}{d}}}{\sqrt{4\frac{c}{d}-4(\frac{c}{d})^2}} = a\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{c}{d}\right)^n,\quad S = d\arcsin\frac{a}{d} = a\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{a}{d}\right)^{2n}$$

より導かれる．c_n と b_n の間には，$\left(\frac{a}{d}\right)^2 = 4\frac{c}{d} - 4\left(\frac{c}{d}\right)^2$ であるので，次の関係が成り立つ．

$$c_0 = b_0 = 1,\ c_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\ b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)},$$

として，

$n = 2m-1$ のとき，

$$c_{2m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j 4^{2m-1-j} b_{2m-1-j} \binom{2m-1-j}{j}$$

$n = 2m$ のとき，

$$c_{2m} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j 4^{2m-j} b_{2m-j} \binom{2m-j}{j}$$

となる．これによって，(2 − 1), (2 − 2) 式が導かれる．

3．第四求弧背（1）と第四求弧背（3）の関係より

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(2n-2j)!!}{(2n-2j+1)!!} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \qquad \cdots\cdots (3)$$

この式は，

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n = d_0 - \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$$

によって，2 と同様にして，

$$S = 2\sqrt{cd}\sqrt{1-\frac{c}{d}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{c}{d}\right)^n = 2\sqrt{cd}\left\{d_0 - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\frac{c}{d}\right)^n\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{c}{d}\right)^n\right\}$$

より導かれる．b_n と，c_n，d_n の間には次の関係が成り立つ．

$b_0 = c_0 = d_0 = 1,$

$$b_n = c_n d_0 - \sum_{j=1}^{n} c_{n-j} d_j$$

となる．これによって，(3) 式が導かれる．

4．$\sqrt{1-x}$ の展開より

$$\frac{(4m-3)!!}{(4m)!!} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \frac{(4m-2j-3)!!}{(4m-2j)!!} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(2m-3)!!}{(2m)!!}\right\}^2 \qquad \cdots\cdots (4-1)$$

（ただし，$m = 1$ の時，右辺の和の項は 0 とする.）

$$\frac{(4m-1)!!}{(4m+2)!!} = \sum_{j=1}^{m} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \frac{(4m-2j-1)!!}{(4m-2j+2)!!} \qquad \cdots\cdots (4-2)$$

この式は,

$$\sqrt{1-x}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n=d_0-\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^n$$

より導かれる.

$$1-x=\left(d_0-\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^n\right)^2$$

であるので,

$$d_0=1,\ d_1=\frac{1}{2}.$$

$n=2m$ のとき,

$$d_{2m}=\sum_{j=1}^{m-1}d_jd_{2m-j}+\frac{1}{2}d_m^2,\quad (\text{ただし}\quad d_2=\frac{1}{2}d_1^2\ \text{とする})$$

$n=2m+1$ のとき,

$$d_{2m+1}=\sum_{j=1}^{m}d_jd_{2m-1-j}$$

となる.

(4−1), (4−2) 式を, $\sqrt{1-x}$ の展開式を用いずに導く事を考える.
$D_0=1$, $D_1=\frac{1}{2}$, $D_n=\frac{2n-3}{n}D_1$, $(n\geq 2)$ と置く. $d_n=D_1D_2\cdots D_n$ である.
(4−1) 式の両辺を d_{2m-1} で割り, 成り立つ事を示す.

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= 1+\frac{D_2}{D_{2m-1}}+\cdots+\frac{D_2}{D_{2m-1}}\cdots\frac{D_{m-1}}{D_{m+2}}+\frac{1}{2}\frac{D_2}{D_{2m-1}}\cdots\frac{D_m}{D_{m+1}}\\ &= 1+\frac{D_2}{D_{2m-1}}(1+\frac{D_3}{D_{2m-2}}(1+\cdots+\frac{D_{m-1}}{D_{m+2}}(1+\frac{1}{2}\frac{D_m}{D_{m+1}})\cdots)\end{aligned}$$

ここで

$$A_{m-1}=1+\frac{1}{2}\frac{D_m}{D_{m+1}}=1+\frac{(2m-3)(m+1)}{m(2m-1)}=\frac{3(2m+1)(m-1)}{2m(2m-1)}$$

と置く,

$$A_{m-2}=1+A_{m-1}\frac{D_{m-1}}{D_{m+2}}=1+\frac{3(2m-5)(m+2)}{m(2m-1)}=\frac{5(2m+3)(m-2)}{2m(2m-1)}$$

一般に,

$$A_{m-j}=\frac{(2j+1)(2m-1+2j)(m-j)}{2m(2m-1)}$$

である. よって

$$\text{右辺}=A_1=\frac{4m-3}{2m}=\frac{D_{2m}}{D_1}=\text{左辺}$$

よって (4 − 1) 式が成り立つ事が示せた．次に，(4 − 2) 式を同様にして示す．

$$\begin{aligned}右辺 &= 1+\frac{D_2}{D_{2m}}+\cdots+\frac{D_2}{D_{2m}}\cdots\frac{D_m}{D_{m+2}}\\ &= 1+\frac{D_2}{D_{2m}}(1+\frac{D_3}{D_{2m-1}}(1+\cdots+\frac{D_{m-1}}{D_{m+3}}(1+\frac{D_m}{D_{m+2}})\cdots)\end{aligned}$$

ここで

$$B_{m-1}=1+\frac{D_m}{D_{m+1}}=1+\frac{(2m-3)(m+2)}{m(2m+1)}=\frac{2(2m+3)(m-1)}{m(2m+1)}$$

と置く，

$$B_{m-2}=1+B_{m-1}\frac{D_{m-1}}{D_{m+3}}=1+\frac{2(2m-5)(m+3)}{m(2m+1)}=\frac{3(2m+5)(m-2)}{m(2m+1)}$$

一般に，

$$B_{m-j}=\frac{(j+1)(2m+1+2j)(m-j)}{m(2m+1)}$$

である．

$$右辺=B_1=\frac{4m-1}{2m+1}=\frac{D_{2m+1}}{D_1}=左辺$$

よって，(4 − 2) 式が成り立つ事が示せた．
以上によって，(4 − 1), (4 − 2) 式が成り立つ事がわかる．またこの２式によって，逆に $\sqrt{1-x}$ の展開式が求められる．

参考文献

[1] 『方圓奇巧』澤村寫本堂　昭和９年

[2] 『方圓奇巧』日本学士院蔵 (0582)　遠藤利貞写本

[3] 石黒信由『諸角綴術之解』(文化４年，1807) 日本学士院蔵 (1844)

[4] 白石長忠『諸角通術捷法解』(文政６年，1823) 日本学士院蔵 (1841)

[5] 田崎中著『江戸時代の数学』総合科学出版　昭和 58 年

[6] 日本学士院編『明治前日本数学史』岩波書店　昭和 29 年～昭和 35 年

[7] 平山諦・内藤淳編『松永良弼』松永良弼刊行会　東京法令　昭和 62 年

[8] 米光丁・藤井康生著『拾璣算法』　平成 11 年

[9] 藤井康生著『江戸時代の数学の研究　垜積について』兵庫教育大学　平成１２年度　修士論文

[10] 藤井康生著「奇零方垜と $\frac{1}{\sin x}$ の展開について」 数学史研究 170 号　2001 年７月～９月