

## 数論と関数論—オイラーからヒルベルトへ—

九州大学大学院数理学研究院 高瀬正仁(Masahito Takase)

Graduate School of Mathematics

Kyushu University

### 【要約】

数学史研究のきっかけ／多変数関数論研究において岡潔とアンリ・カルタンを回想する／不定域イデアルと層係数コホモロジーの対比／多変数関数論の古典研究から出発して、数論と関数論を二本の柱とする数学史叙述の構想をたてる／具体的な研究計画／オイラーの世界とガウスの世界／数学の普遍性について／共鳴の広がり小さな普遍性

### 1. 数学史への道

数論と関数論を中心に据えて近代数学史の通史を著すことは20年来の念願であった。通史叙述を念頭に置きながら、これまでオイラーやガウス、アーベル、リーマンなど古典の解説を続けてきたが、3年ほど前からあれこれの勉強がようやくひと続きにつながる気配を見せ始め、通史執筆の気運が急速に醸成された。昨年(2004年)秋11月には出版を引き受けてくれる出版社も決まり、話はいよいよ具体的に確定し、原稿が揃う日を俟つばかりになった。そこでしばらく通史叙述をテーマに掲げ、機会が与えられるたびに講演とその記録の執筆を重ね、完成度を高める方途を探りながら第一着手の訪れを俟つことにしたいと思う。

数学の世界全体において、数学史研究はどのような意味合いをもちうるのであろうか。近代数学史の山脈を形成する一群の古典を読む決意し、まずはじめにガウスの作品『整数論』を読み始めてからすでに四半世紀になるが、数学と数学史の関係を明晰判明に諒解するのはむずかしく、当初より複雑な思索を強いられた。往時を回想すると、ガウスの読解に取りかかる前、多変数関数論の勉強と研究に専念した一時期があった。もし当時の多変数関数論研究の状況に不満がなく、歩を先に進めようとする意欲のみが働くという事態だったのであれば、過去を顧みるべき積極的な理由はどこにも見あたらず、歴史的関心が刺激されることもなかったであろう。だが、岡潔の論文集を読むに及んで心境は一変した。数学史研究への決意を具体的に引き起こしたのは、9篇の論文を集めた岡潔の小さな論文集なのであった。

岡潔による多変数関数論への寄与は普通、「三大問題の解決」と言われるが、中核をなすのは「ハルトークスの逆問題」と呼ばれる問題であり、第6番目の論文と第9番目の論文がこの問題の解決にあてられている。第6論文では二個の複素変数の空間内の単葉領域を対象にし、第9論文では任意個数の複素数の空間上の分岐点をもたない有限被覆領域を対象にして、ハルトークスの逆問題の解決の道筋が叙述された。だが、第9論文は終着点ではなく、第7番目と第8番目の論文を見ると、岡潔の多変数関数論研究の真のねらいは内分岐領域においてハルトークスの逆問題を解くことであったことが諒解される。

遺されている大量の研究記録などを参照すると、岡潔の数学的関心は昭和17年(1942年)ころから内分岐領域の理論に向かい始めた様子が見て取れる。この理論の建設のために作られたのが不定域イデアルの理論であり、第7論文では基礎理論が叙述され、第8論文では「基本的な補助的命題」(内分岐領域における上空移行の原理)が確立された。だが、この研究構想は成就しなかった。内分岐領域ではハルトークスの逆問題は解くことができなかったのである。

岡潔本人の意図とは別に、アンリ・カルタンなどフランスの数学者たちの手を経て不定域イデアルの理論は層係数コホモロジーの理論へと変容し、解析空間の概念が提示されて、いわば「幾何学化された多変数関数論」が現れた。これが1950年代の出来事であり、この趨勢のまま今日に及んでいるが、この一連の経緯を観察して深い印象を受けたのは次に挙げる二つの出来事であった。ひとつは、不定域イデア

ルの理論の形成をうながした岡潔の元来の数学的意図，すなわち内分岐領域におけるハルトークスの逆問題の解決という構想は拋棄され，継承されなかったという事実であり，もうひとつは，それにもかかわらず，不定域イデアルの理論それ自体は新たな意匠をまもって生き続けたという事実である．創始者個人の構想の根源にあった数学的思索は継承されず，作られた理論の論理的構造のみが，異質の数学的構想のもとで新たな役割を割り振られて展開する．それなら，ぼくらはどこに，数学史の成立の可能性を認識することができるのであろうか．

数学史を数学を創った人々の数学的思索のつながりという観点から見れば，歴史は断絶することがある．この場合，数学史はひとすじの流れとは言えず，かえって幾本もの断続した流れの集合体のようにぼくらの目に映じることになる．だが，数学という学問を「人」とは無縁の場所に成立する抽象的で論理的な学問と見ることにするならば，そのとき数学の普遍性という観念に大きな説得力が附与されて，数学史の流れは一筋になる．この場合，数学は絶え間なく進歩する学問であることになり，同時に数学と数学史の内的関連も稀薄化する．前に進むのに歴史の回顧は必要とは言えず，「現代数学の系譜」への関心は二義的な意味合いしかもちえないことになるからである．はじめに，数学研究の現状に批判がなければ，数学史研究に積極的な意義は生れないと述べたのは，このような意味である．

数学と数学史を結ぶ有機的関連を回復し，数学史研究に不可欠の意義を附与するのは数学研究の現状に寄せる批判もしくは懐疑する心である．そこで目はおのずと岡潔の数学論文集以前の多変数関数論の研究過程に向かうようになり，古典研究に向かう第一番目の契機が発生した．ここに開かれたのは関数論の古典への道筋である．それともうひとつ，ヒルベルトの第12問題（解析関数の特殊値による類体の構成問題）に見られるヒルベルトの言葉にも刺激的な響きがあった．この問題の表明の中でヒルベルトは多変数関数論に言及し，この問題の究明を通じて多変数関数論は本質的に進歩するであろうという主旨の展望を語ったのである．まだ多変数関数論は萌芽的状态で，理論形成の可能性も定かではない時期のことであった．これが古典研究への第二の契機であり，数論との出会いである．すなわち，はじめに遭遇した数論は虚数乗法論なのであった．

数論と関数論という数学史研究の二本の柱がこうして確定した．

## 2. 数学史研究の具体的なプロセス

岡潔の第一論文が公表されたのは1936年（昭和11年）と記録されているが、この論文を基点としてそれ以前の多変数関数論の諸文献を遡行していくと、カルタンとトウルレン、ジュリア、E.E.レビ、ハルトークス、クザン、ポアンカレとたどってヴァイエルシュトラスに到達する。そのヴァイエルシュトラスは、リーマンとともにヤコビの逆問題の解決に大きく寄与した数学者である。ヤコビの逆問題は問題が提示された時点ですでに「二個の複素変数の、四重周期性をもつ二価解析関数」の出現を前提にしていたが、ヴァイエルシュトラスはこの問題を一般的な形で解決しようとする最後の詰めの段階で多変数関数論の一般理論の建設を迫られて、「多変数の有理型関数の有理型領域は任意である」という言葉を書き留めた。このような高い一般性を備えた言明が具体的な契機として作用して、多変数関数論形成の気運が生れたのである。

ヤコビの逆問題はアーベル関数の理論の主問題であり、アーベル関数論はこの問題の解決の試みと歩みをもとにして形成された。そこでヴァイエルシュトラスとリーマンを越えてさらに数学史を遡行すると、ローゼンハインとゲーペルを経て、ヤコビの逆問題を提出した当の本人のヤコビと、ヤコビに深い影響を及ぼしてヤコビの逆問題の提示をうながしたアーベルの代数関数論に出会う。ところが、アーベルの代数関数論は楕円関数論研究の延長線上に現れたのであり、その楕円関数論はたとえば、ガウスの作品『整数論』の第7章に記述された円周等分論に鋭い示唆を受けて成立したのである。こうして「始点をガウスに定める」というアイデアが生れた。ガウスの『整数論』の解明から出発し、アーベル、ヤコビ、それにアイゼンシュタインも加えて楕円関数論の初期の姿を概観し、ヤコビ、ローゼンハイン、ゲーペル、リーマン、ヴァイエルシュトラスと続くヤコビの逆問題の解決の道筋を追うというふうに進んでいけば、おのずと多変数関数論の前夜の情景が浮かび上がるであろうと思われた。

ガウスの『整数論』は同時に近代整数論の起源のひとつでもあった（近代整数論には二つの大きな起源が存在する。ガウスの『整数論』と並ぶもうひとつの起源はフェルマの「欄外ノート」である）。十代の終わりがけに平方剰余相互法則を発見

したガウスは、厳密な証明を与えることにも成功し、まずはじめに『整数論』の中で二通りの証明を叙述した（数学的帰納法による証明と二次形式の種の理論に基づく証明）。その後、ガウスは同じ平方剰余相互法則に対していくつもの別証明を試みるとともに、三次剰余と四次剰余の相互法則、一般に高次冪剰余相互法則の存在を予測し、実際に四次剰余相互法則を発見して公表した。このガウスの数学的思索が継承されて、類体論のアイデアへと続く代数的整数論の大きな流れが成立したのである。担い手を回想すると、ヤコビ、ディリクレ、アイゼンシュタイン、クンマー、クロネッカー、そしてヒルベルトなどの名前が次々と浮かぶ。そこでこれらの数学者の書き残したものを読み重ね、代数的整数論の形成史を紡いでいくことが、数学史研究の大きな課題として課せられることになった。

代数的整数論だけではまだ（一変数または多変数の）複素変数関数論との間に橋は架からないが、ガウスの『整数論』にはもうひとつ、代数方程式論の新たな萌芽が現れていた。それはアーベル方程式の理論である。ガウスは『整数論』第7章において円周等分方程式を論じ、一般に高次の代数方程式を代数的に解くことは必ずしも可能ではないという認識を示し、それにもかかわらず円周等分方程式は次数がどれほど高くなろうともつねに代数的に可解であることを証明した。これを受けて、アーベルとガロアは別個の数学的思索に基づいて、「次数が5よりも高い代数方程式には根の公式は存在しない」（アーベルの定理と呼ばれる）という数学的事実を確認した。これに加え、アーベルは円周等分方程式の延長線上にアーベル方程式の概念を提案し、「アーベル方程式はつねに代数的に可解である」ことを証明した。

アーベルの代数方程式論、わけてもアーベル方程式の理論が楕円関数論と密接不可分の関係で結ばれていることも注目に値する。ガウスの円周等分方程式論にならって楕円関数の等分方程式論を考察すると、代数的に解ける方程式と代数的には解けない方程式に出会う。アーベルは、代数的に解ける方程式はみなアーベル方程式であることを確認するとともに、代数的に解けない方程式が現れる場合にはそのわけを追求し、この現象の根源が虚数乗法の有無という楕円関数の特性に根ざしていることを洞察した。クロネッカーはこのようなアーベルの思索の中から（それにガロアの代数方程式論にも深く学んで）アーベル方程式の構成理論のアイデアを汲んだ。これが虚数乗法論の起源である。

もうひとつ注目に値するのはアイゼンシュタインの研究である。アイゼンシュタインもまたガウスに学んだ人で、楕円関数の等分方程式の性質を基礎にして、ガウスが提示した四次剰余相互法則に証明を与えることに成功した。これで、アーベルとクロネッカーの虚数乗法論が整数論においてもちうる意味合いが明らかになり、ガウスの『整数論』に端を発する五本の流れ、すなわち

剰余の理論における相互法則

楕円関数論

代数方程式論（代数的可解性に関する理論とアーベル方程式の理論）

虚数乗法論

多変数関数論

が融合する可能性が開かれた。多変数関数論の淵源をガウスに求めるところにはいくぶん飛躍が感じられるが、アーベルの楕円関数論がガウスの『整数論』の影響下で成立しえたこと、アーベルは楕円関数論の道筋を延長して代数関数の世界に分け入り、特に完全に一般のアーベル積分を対象にした加法定理（これもアーベルの定理と呼ばれる）を発見したこと、そのアーベルの加法定理こそ、ヤコビの逆問題の根源であったこと、ヤコビの逆問題の解決は当初より多複素変数の解析関数論の確立を想定していたことを思い合わせれば、ガウスの『整数論』こそ、多変数関数論の数学思想上の起源と見るのに真に相応しいと思う。

ガウスを源流と見て数学の五筋の流れを下っていくと、たちまち膨大な量の文献に遭遇するが、もし全容の概観に成功したなら、大きなまとまりのあるひとつの数学史が描かれるであろう。だが、近代数学史はガウス以前にも存在し、ガウスその人に深い影響を及ぼした数学者も存在する。それはレオンハルト・オイラーである。

ガウスの「数学日記」などを参照しながらガウスの数学的思索が深まっていく様子を克明に観察すると、ぼくらの目にあざやかに映じるのは、整数論、楕円関数論、代数方程式論など、ガウスの数学的世界を構成する数学の諸分野のここかしこに射

しているオイラーの影である。整数論の領域では、ガウスの『整数論』に引用されたオイラーの諸論文を眺めれば、オイラーの影響の深いことは明瞭である。代数方程式論では、代数学の基本定理の成立の可能性や、代数的可解性に向けられたガウスの発言の中に、オイラーの思索の跡はくっきりと刻まれている。

楕円関数論の根源を観察するとオイラー積分に出会い、無限小解析の初期の姿に直接つながっていく。オイラー積分の考察が大きく展開して、楕円積分や超楕円積分を包摂する（一変数の）代数関数の積分の理論、すなわちアーベル積分の一般理論ができたのである。こうしてライプニッツ、ヨハン・ベルヌーイ、ヤコブ・ベルヌーイ、ロピタル、オイラー、ラグランジュ、ルジャンドルと続く微積分の系譜が浮上して、オイラー積分の理論の根柢が認識される。楕円関数論を考察するのに楕円関数の範疇に留まるのでは不十分で、オイラー積分の領域へと視野を広げていかなければならないが、そのオイラー積分というものの実体は、結局のところ、無限小解析の大きな流れの中で考えていかなければならない。数学史の一部分を切り取って研究するのは実際には不可能で、どれほど小さな領域であっても、数学史全体の中で占める位置に絶えず配慮して考えていかなければならないのである。無限小解析それ自体の整備という観点に立つと、いわゆる厳密化のプロセスが目にとまり、コーシー、ヴァイエルシュトラス、デデキントなどの名前とともに19世紀へとつながっていく。ただし、これはこれで一筋の数学の流れではあるが、数論と関数論の歴史叙述をテーマとする本稿とはあまり関係がない。

オイラーとガウスの関係が密接不可分であることはまちがいないが、この相互関連の姿形を「数学史は成立するか」という視点に立って観察すると、大きな論点が発生する。私見によれば、オイラーとガウスを結ぶ論理上の連鎖は確かに目につくが、数学的思索の上でのつながりは存在せず、オイラーとガウスがそれぞれ解明をめざしていた数学的自然の姿は異なっていたのではないかと思う。もしそうであれば、二つの異なる数学史が成立することになるであろう。

数学的世界を構成する素材や論理という面に限定して観察すれば、ガウスにあるものは何らかの形ですでにオイラーにもあることが多い。平方剰余相互法則の最初の発見者はオイラーである。円周等分方程式の理論展開を可能にしたのは「オイラーの定理」である。代数学の基本定理や代数方程式の代数的解法についてもオイラー

はすでに深い思索を表明していたし、二次形式の理論もまた「二次形式による数の表示理論」という形でオイラーは手にしていた（この二次形式の理論はオイラーがフェルマから汲んだもので、オイラーに続いてラグランジュが継承して大きな理論を作り上げた）。ガウスの楕円関数論がオイラー積分の理論を基盤にして、その上に成立しえたことは上述の通りである。多変数関数論の起源をオイラーに求めるのは無理と思うが、変化量の変域を複素数に拡大する試みはほとんど無限小解析のはじまりとともに現れていて、オイラーは複素変化量を導入したときに起こる諸現象をめぐってさまざまな思索を繰り広げた。

オイラーとガウスの関係はこんなふうに親密であり、オイラーが確立した定理を一般化したり、理論構成を再編成したり、予測だけして証明はしなかった事柄に証明を与えたりすれば、オイラーの世界はそのまま拡大されてガウスの世界が現れるように見えないこともない。だが、それにもかかわらず、オイラーおよびオイラーに象徴されるガウス以前の近代数学は、ガウスおよびガウスにはじまるガウス以降100年あまりの数学に比してあまりにも異質であり、両者を隔てる大きな断絶が感じられるのである。どこを見ても酷似しているが、ぼくらの思索に働きかけて、あくまでも非としなければならないという判断に誘う何ものかが確かに存在する。多変数関数論の場において感知された岡潔とカルタンの対比に似た「感じ」がある。そこで、諸文献を丹念に渉猟し、直観の力の働きで把握されたこの判断を実証することが、数学史研究の大きな目標として設定されることになった。

### 3. 数学の普遍性について

最後に数学の普遍性について所見を書き留めておきたいと思う。数学的自然を形成する諸理論の構築の手続きや、個々の定理の証明の正否の判定など、数学という学問の論理的・論証的性格に着目する限り、この学問の普遍性に疑いを挟む余地はない。だが、他方、数学には個人的色彩がたえず色濃くつきまとっていることもまたまちがいなく、その様相は岡潔とアンリ・カルタン、それにオイラーとガウスに範例を求めて略記した通りである。

1930年代、岡潔はハルトークスの逆問題を当時の多変数関数論の主問題と見たが、アンリ・カルタンにはこの問題に関心を寄せた形跡は見あたらない。オイラーは代数関数の積分の形を次々と一般化していったオイラー積分の世界の多彩さを明るみに出し、楕円積分の加法定理さえすでに発見していたが、楕円関数の等分方程式には興味をもたなかった。ところが、ガウスの関心事は当初から楕円関数の等分方程式なのであった。オイラーの数論はフェルマの「欄外ノート」（それに、フェルマの書簡などに見られる数論のいろいろな命題）が契機になり、フェルマが書き留めた数論の命題のいくつかに証明を与えようとする試みを通じて形成された。オイラー以降、オイラーの企図はラグランジュとルジャンドルに継承され、不定解析と呼ばれるひとつながりの数論の歴史が生れたが、ガウスはフェルマには無関心であり、平方剰余相互法則の確立から高次冪剰余の相互法則の究明へと続くもうひとつの数論の道を開いた。

等しく数学的自然に観察の目を向けながら、岡潔とカルタン、オイラーとガウスでは見ることを欲していた光景が異なっていた。論理や論証の場において認められる著しい普遍妥当性とは別に、数学の歴史には人と人とを結ぶ「共鳴の広がり」の場がいくつか出現し、それぞれの広場のみを支配する小さな普遍性もまた確かに存在するのである。

岡潔の遺稿の中に「研究ノ記録 其ノ六」というタイトルを記入されたノートがあり、そこに

**「定義が次第に変わって行くのは、それが研究の姿である」**

という言葉が書き留められている。不定域イデアルの研究のさなかにあった時期のメモで、「昭和20年12月27日」という日付が添えられている。不定域イデアルの概念の定義を書き下そうと試みて、心情にぴったり適う記述が手に入るまで、岡潔は書いたり消したりする行為を幾度も繰り返していたのである。

このような言葉に関連して想起されるのは、たとえば関数概念の変遷過程である。

関数という訳語があてられる"functio"という言葉の初出はライプニッツと言われるが、ライプニッツ以降、ヨハン・ベルヌーイ、オイラー、ラグランジュ、コーシー、ディリクレなど、みなそれぞれに関数概念を手にしていった。似てはいるが微妙に異なるかのような感じを与える諸概念の系列で、オイラーなどは三通りの関数概念をもっていたほどである。ディリクレが提案した「完全に任意の関数」に至ると、集合から集合への一価対応という今日の関数概念に近接しているが、いろいろな形で提案された関数概念がだんだん進歩して、今日の極端に抽象性の度合いの高い関数概念に到達したと見るのは観念的にすぎ、実情から乖離しているように思う。個々の関数概念が提示された状況を創造の現場に立ち会って観察すると、背景にはそのつど固有の数学的事象が控えていて、具体的な要請に見合う形の関数概念が提案されていることが諒解される。そうしてそれらの数学的事象は、それらに関心を寄せた「人」とともに立ち現れるのであるから、諸概念を「人」と切り離して理解するのはいかにもまずく、数学的自然の根柢にあって数学全体を支えている「何物か」の姿が見失われてしまうのではあるまいか。

歴史叙述はつねに抽象であり、個々の諸事実をどれほど丹念に配列しても、それだけでは歴史にはなりえない。だが、数学の諸理論と諸概念を何かしら天与の観念のように見る姿勢もまた抛擲しなければならない。数学的自然の舞台に起こった事柄のあれこれを、具体的な数学的諸事象と、それらに関心を寄せた個々の数学者の数学的意図との関連のもとで回想し、いわば「具象の充満する抽象性を備えた数学史」の叙述をめざしたいと思う。

【平成17年（2005年）11月30日】