数理解析研究所講究録
1515巻 2006年 63-71

Genericな曲線の極限構造について

東海大学理学部数学科 米田郁生 (Ikuo Yoneda)
Department of mathematics, Tokai University

1 Introduction

1999年のPoizat達の結果JSL2002(67)：係数が独立の次数dである平面曲線を2項述語$C_d(x,y)$で解釈する構造(k,C_d)について、次数dを上げて得られる(k,C_d)の極限構造が「Genericな構成法で与えられる事（4節)」とその構造の特性（5節)を解説する。Genericな構成法は、通常、有限グラフを部品とし、特定の方法で張り合せ、可算無限グラフ・Generic構造を作るが、ここで作る極限構造は有限超越次元の体を部品として貼り合わせて出来る体になっている。

2 Generic curves

$k, K, \ldots$は体を表し、$a, b, c, \ldots$は体の元を表す。$\bar{k}$はkの代数閉包をあらわす。$\mathbb{F}$で素体とする。体の標数は固定する。

Definition 2.1 平面曲線Cが$\deg(C)=d$のgeneric curveであるとは

$$\sum_{i+j\leq d} \alpha_{ij} X^i Y^j$$

で定義され、$(d+1)+d+(d-1)+\cdots+1 = (d+1)(d+2)/2$個の係数$\{\alpha_{ij} : i+j \leq d\}$が代数的独立であるとき。

Remark 2.2 1. $\deg > 2$のgeneric curveはirreducible.

2. $\sum_{i+j\leq d} \beta_{ij} X^i Y^j, \beta_{00} = 1$で定義される曲線上の点$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$に対し$\dfrac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 \geq n$ならば、

$$\mathrm{trdeg}(\bar{\beta}/\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - (n+1)$$

3. $\deg(C) = d$ の generic curve C 上の相異なる点 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \in C$ に対し $\dfrac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 \geq n$ ならば $\mathrm{trdeg}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) \geq n$ が成立。

Proof. 1 : $P(X,Y) = \sum_{i+j\leq d} \alpha_{ij} X^i Y^j = P_1(X,Y)P_2(X,Y)$ と分解されたとする。$\deg(P) = d, \deg(P_1) = d_1, \deg(P_2) = d_2$ とおくと $d = d_1 + d_2$ で $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq d-1$ としてよい。$P = P_1P_2$ の係数の次元を考えると

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} \leq \frac{(d_1+1)(d_1+2)}{2} + \frac{(d_2+1)(d_2+2)}{2}$$

一方

$$\begin{aligned}
\frac{(d+1)(d+2)}{2} &= \frac{((d_2+1)+d_1)((d_2+2)+d_1)}{2} \\
&= \frac{(d_2+1)(d_2+2)}{2} + \frac{d_1}{2}((d_2+1)+(d_2+2)+d_1) \\
&\geq \frac{(d_2+1)(d_2+2)}{2} + \frac{3d_1}{2}(d_1+1) \\
&= \frac{(d_1+1)(d_1+2)}{2} + \frac{(d_2+1)(d_2+2)}{2} + d_1^2 - 1
\end{aligned}$$

$d_1 < d_2$ のときは上の $\geq$ が $>$ より矛盾。$d_1 = d_2$ のときは $d = 1+1$ となる。
2 : $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ を通る曲線の係数 $\bar{\beta}$ は次の連立線形方程式を満たす。

$$\sum_{i+j\leq d} x_{ij} a_{k0}^i a_{k1}^j = 0 (k = 1, \ldots, n)$$

を満たす。$\left(n, \dfrac{(d+1)(d+2)}{2}\right)$-行列 $\begin{pmatrix} 1 & a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{10}^i a_{11}^j & a_{11}^d \\ 1 & a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{20}^i a_{21}^j & a_{21}^d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n0}^i a_{n1}^j & a_{n1}^d \end{pmatrix}$ の階数は n より $\overline{\mathbb{F}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)}$ 上の解 $(x_{ij})_{i+j\leq d}$ の次元は $\dfrac{(d+1)(d+2)}{2} - n$ になる。
Generic curve の定数項を 1 として標準化してあるから $\mathrm{trdeg}(\bar{\beta}/\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \dfrac{(d+1)(d+2)}{2} - (n+1)$ となる。
3 : $\bar{\alpha}$ を C を定める代数的に独立な係数とする。2 より $\mathrm{trdeg}(\bar{\alpha}/\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \dfrac{(d+1)(d+2)}{2} - (n+1)$

従って

$$\begin{aligned}\mathrm{trdeg}(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n) &= \mathrm{trdeg}(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n,\bar{\alpha}) - \mathrm{trdeg}(\bar{\alpha}/\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n) \\ &= \mathrm{trdeg}(\bar{\alpha}) + \mathrm{trdeg}(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n/\bar{\alpha}) - \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - (n+1)\right) \\ &\geq \mathrm{trdeg}(\bar{\alpha}) - \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - (n+1)\right) = n.\end{aligned}$$

□

Definition 2.3 言語 $L = \{+,\cdot,0,1,C(x,y)\}$ とし、K を代数閉体とする。$C_{\bar{a},d}$ を係数 $\bar{a} \in K$、次数 d の generic curve とする。K における $C(x,y)$ の解釈を $C_{\bar{a},d}(K)$ とし L-完全理論 $T_d = \mathrm{Th}(K,C)$ と定める。$\mathrm{Th}(K,C(x,y))$ は係数 $\bar{a}$ と代数閉体のとり方によらない。

ここから、T_d の極限理論が Generic な構成法で得られる事を解説する。

3 部品となる構造 $(K, C(x,y))$

K は大きな代数閉体とし、この体の中でしばらく考える。

Setting 3.1 $C(x,y)$ は (K の平面曲線を解釈する為の) 2 項述語記号。扱う構造 $(K,C(x,y)) \in \mathcal{K}$ は次の条件を満たす。

1. $K \models \bigwedge_{i=1}^{n} C(a_i,b_i) \wedge \bigwedge_{1\leq i\neq j\leq n}(a_i,b_i) \neq (a_j,b_j)$ ならば $\mathrm{trdeg}(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) \geq n$.
2. 「$k \subset K, \mathrm{trdeg}(k) < \omega$ ならば $\mathrm{trdeg}(k) \geq |C(k)|$」は 1 と同値。

Proof. 上から下: $\mathrm{trdeg}(k) = n < \omega$ とするとき、もし $|C(k)| \geq n+1$ ならば 1 より $n+1 \leq |C(k)| \leq \mathrm{trdeg}(C(k)) \leq \mathrm{trdeg}(k) = n$ となり矛盾。
下から上: $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in C$ に対し $k = \mathbb{F}(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$ とすると $|C(k)| < \omega$ で $\mathrm{trdeg}(k) \geq |C(k)| \geq n$.

□

Definition 3.2 k,k',k'' を $K \in \mathcal{K}$ の有限超越次元の部分代数閉体とする。

1. $\delta(k) := \mathrm{trdeg}(k) - |C(k)| (\in \mathbb{N})$ と定める。

2. $k \subseteq k'$ に対し $\delta(k'/k) := \delta(k') - \delta(k) = \mathrm{trdeg}(k'/k) - |C(k') - C(k)|$. と定める。

3. $k \subseteq k'$ に対し $k \leq k' \Leftrightarrow$ 「$k \subseteq k'' \subseteq k'$ ならば $\delta(k''/k) \geq 0$」と定義する。これは「$X \subset_\omega C(k') - C(k) \subset k'^2$ ならば $\mathrm{trdeg}(X/k) \geq |X|$」と同値。

4. $k \subset K$ に対し
$k \leq K \Leftrightarrow$ 「$k \subseteq k' \subset K$ ならば $k \leq k'$」と定義する。特に $\mathbb{F} \leq K$.

Lemma 3.3 $K \in \mathcal{K}$ の有限超越次元の部分代数閉体 $k, k_1, k_2, \ldots$ を考える。

1. $k \subseteq k' \leq K$ となる K の有限超越次元の部分代数閉体 k' が存在する。

2. $k \leq k_1, k_1 \leq K$ ならば $k \leq K$.

3. $k_1, k_2 \leq K$ ならば $k_1 \cap k_2 \leq K$.

4. k に対し $k \subseteq k' \leq K$ となる k' で最小のもの *(K 内での k の Closure)* がある。$k' = \mathrm{cl}_K(k)$ と書く。

5. $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_i \leq \ldots$ ならば $k_i \leq \bigcup_{i<\omega} k_i$.

6. $K_1, K_2 \in \mathbb{K}, k \leq K_1$ ならば $K_2 \leq K_1 \oplus_k K_2 \in \mathbb{K}$.
ここで $K_1 \oplus_k K_2 = (\overline{K_1 \otimes_k K_2}, C(K_1) \cup C(K_2))$ で $K_1 \otimes_k K_2$ は K_1, K_2 を k 上線形独立にして K_1, K_2 を合成した体。

Lemmma 3.3 より、超越次元可算無限の Generic な代数閉体 $K \in \mathcal{K}$ が存在する。

Definition 3.4 $K \in \mathcal{K}$ が $(\mathcal{K}, \leq)$-generic とは「$k \leq K, k \leq k_1$ ならば $k_1 \cong_k k_1' \leq K$」が成立するとき。

Remark 3.5 $K, K' \in \mathcal{K}$ が共に generic ならば $K \equiv K'$.

Proposition 3.6 *$(\mathcal{K}, \leq)$-generic の $(+, \cdot, 0, 1, C(x, y))$-理論 T は次のように公理化される。*

- 公理系 *1*：代数閉体の理論

- 公理系 *2*　*($\mathcal{K}$ の公理化)*：各 $n < \omega$ と $P \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]$ に対し

$$\forall x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{n0}, x_{n1}(\bigwedge_{i=1}^n C(x_{i0}, x_{i1}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq n}(x_{i0}, x_{i1}) \neq (x_{j0}, x_{j1})$$
$$\rightarrow \bigvee_{\sigma \in 2^n} P(x_{1\sigma(1)}, \ldots, x_{n\sigma(n)}) \neq 0)$$

- $\varphi(x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{n0}, x_{n1}, \bar{z})$ を連立 $\mathbb{F}$-多項式と、$\sigma \in 2^n$ に対し

$$\mathrm{trdeg}(\exists x_{1\sigma(1)}, \ldots, x_{n\sigma(n)}(\varphi(\bar{x}, \bar{z}))/\mathbb{F}(\bar{z})) = n$$

を表現する $\mathbb{F}$ 上の論理式を $\psi_{\varphi,\sigma}(\bar{z})$ とする。

公理系 *3*: 任意の連立 $\mathbb{F}$-多項式 φ に対し

$$\forall \bar{z} \exists \bar{x} (\bigvee_{\sigma \in 2^n} \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{z}) \to (\bigwedge_{i=1}^{n} C(x_{i0}, x_{i1}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{z}))).$$

次のようなステップで証明される。

Claim 1 K が $\mathcal{K}$-*generic* ならば K は公理系 *1,2,3* を満たす。

Proof. $K \models \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{d})$ とし、$K \models \varphi(\bar{a}, \bar{d})$、$\mathrm{trdeg}(a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}/\bar{d}) = n$. となる $\bar{a}$ が存在する。ここで $k = \mathrm{cl}_K(\bar{d}), k' = \overline{k(\bar{a})}$ とし、$C(k') = C(k) \cup \{(a_{10}, a_{11}), \ldots, (a_{n0}, a_{n1})\}$ と定めれば $k \leq k' \in \mathbb{K}$ が成立する。この k' の k 上の K への埋め込みは $C(x, y)$ を保存するので $K \models \exists \bar{x}(\bigwedge_{i=1}^{n} C(x_{i0}, x_{i1}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{d}))$ が成立する。

□

Claim 2 公理系 *1,2,3* の ω-飽和なモデル M は $\mathcal{K}$-*generic.*

Proof. $k \leq M, k \leq K$ とする。$k \leq K$ を長さ極大の $\leq$-鎖に分解し次の 3 つに場合分け出来る。
Case 1 : $\delta(K/k) = 0$ で $k \subset k' \subset K$ に対し $\delta(K/k') < 0$
$\mathrm{trdeg}(K/k) = n$ とすると $\delta(K/k) = 0$ より $C(K) - C(k) = \{(a_{i0}, a_{i1}) : i = 1, \ldots, n\}$. よって或る $\sigma \in 2^n$ と或る $\varphi(\bar{x}, \bar{d}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}/k), \bar{d} \in k$ に対し

$$\mathrm{trdeg}(\exists x_{1\sigma(1)} \ldots, x_{n\sigma(n)} \varphi(\bar{x}, \bar{d})/\bar{d}) = n.$$

従って $M \models \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{d})$ となり公理系 3 より $M \models \varphi(\bar{\alpha}, \bar{d}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} C(\alpha_{i0}, \alpha_{i1})$. このとき $\overline{k(\bar{a})} = K \cong_k \overline{k(\bar{\alpha})}$ で $\delta(\overline{k(\bar{\alpha})}/k) = 0$ より $\overline{k(\bar{\alpha})} \leq M$ が成立。
Case 2: $\delta(K/k) = 1, \mathrm{trdeg}(K/k) = 1, C(K) = C(k)$
$K = \overline{k(a)}$ とし、$K \models \varphi(a_{10}, a_{11}, \bar{d})$ で $\mathrm{trdeg}(\varphi(x_{10}, x_{11}, \bar{d})/\bar{d}) = 1$. とする。$\exists x_1 x_2 (x_{10} = x_1^{\frac{1}{n}} \wedge x_{11} = x_2^{\frac{1}{n}} \wedge \varphi(x_{10}, x_{11}, \bar{z}))$ に関する公理系 3 より $K \cong_{(k,+,\cdots,0,1)}$

$K_n = \overline{k(\alpha_{01}, \alpha_{11})} \subset M$ で $C(K_n) - C(k) = \{(\alpha_{10}^{\frac{1}{n}}, \alpha_{11}^{\frac{1}{n}})\}$ が成立。特に $K_n \leq M$.
$\Psi_n(x_{10}, x_{11}) = \{\neg\exists u \exists v (C(u,v) \wedge f(x_{10}, x_{11}, u) = 0 \wedge g(x_{10}, x_{11}, v) = 0 \wedge h(u) \neq 0 \wedge p(v) \neq 0) : f(X,Y,Z), g(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z], \deg_Z(f), \deg_Z(g) < n, h(X), p(X) \in k[X]\} \cup \{\overline{k(x_{01}, x_{11})} \leq M\}$ は K_n で実現される。($\{\overline{k(x_{01}, x_{11})} \leq M\}$ は unary predicate を使って書き下す) k は超越次元有限より parameter は有限。M の ω-飽和性より $\bigcup_{n<\omega} \Psi_n$ の解 $(\beta_{10}, \beta_{11}) \in M^2$ が取れる。$K' = \overline{k(\beta_{10}, \beta_{11})}$ とすると $C(K') - C(k) = \emptyset$ となり $K \cong_k K' \leq M$ が成立する。

□

4 $T = \lim_{d \to \infty} T_d$

「T = 公理系 1+ 公理系 2+ 公理系 3」の各有限部分が充分大きい d の T_d に含まれることを示す。
公理系 1 は OK. 公理系 2 は Remark 2.2 より OK.

Proposition 4.1 $\varphi(x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{n0}, x_{n1}, \bar{z})$ を連立 $\mathbb{F}$-多項式とし、$\sigma \in 2^n$ に対し

$$\mathrm{trdeg}(\exists x_{1\sigma(1)}, \ldots, x_{n\sigma(n)}(\varphi(\bar{x}, \bar{z}))/\mathbb{F}(\bar{z})) = n$$

を表現する $\mathbb{F}$ 上の論理式を $\psi_{\varphi,\sigma}(\bar{z})$ とする。
この φ, ψ に対し十分大きく $d \in \mathbb{N}$ を取れば

$$T_d \models \forall \bar{z} \exists \bar{x} (\bigvee_{\sigma \in 2^n} \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{z}) \to (\bigwedge_{i=1}^{n} C(x_{i0}, x_{i1}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{z})))$$

が成立する。

Proof. C_d を $\deg = d$ の generic curve とする。定義する多項式の定数項を 1、係数を $\bar{\alpha}$ とするとき $\mathrm{trdeg}(\bar{\alpha}) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 =: N$

Claim 3 $K \models \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{e})$ とする。ψ の性質から $K \models \varphi(\bar{a}, \bar{e})$ で $n = \mathrm{trdeg}(a_{1*}, \ldots, a_{n*}/\bar{e})$ となる $\bar{a} = (a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{n0}, a_{n1}) \in K$ が取れる。
Remark 2.2 の議論より $N \geq n$ ならば $(a_{10}, a_{11}), \ldots, (a_{n0}, a_{n1})$ を通る

$$\sum_{i+j \leq d} \beta_{ij} X^i Y^j$$

によって定義される $\deg = d$ の平面曲線 $C_{\bar\beta}$ があるが、さらに d を十分大きくとると

$$\mathrm{trdeg}(\bar\alpha/\bar d) = \mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar e)$$

が成立。$\mathrm{tp}_K(\bar\alpha/\bar d) = \mathrm{tp}_K(\bar\beta/\bar e)$ より $C_{\bar\beta}$ が *generic curve* になり結論を得る。

Claim の証明：ひたすら超越次元の計算をする。
$\mathrm{trdeg}(\bar\alpha\bar e) = \mathrm{trdeg}(\bar\alpha/\bar e) + \mathrm{trdeg}(\bar e) = \mathrm{trdeg}(\bar e/\bar\alpha) + \mathrm{trdeg}(\bar\alpha)$ より

$$\mathrm{trdeg}(\bar\alpha/\bar e) = N - \mathrm{trdeg}(\bar e) + \mathrm{trdeg}(\bar e/\bar\alpha) \geq N - \mathrm{trdeg}(\bar e).$$

$\mathrm{trdeg}(\bar a/\bar e) = n + m$ とする。このとき

$$\mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar e) \geq N - n + m$$

が成立する。(Remark 2.2 の 2 より $\mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar a) = N-n$ で $\bar\beta$ を $\bar a$ 上動かし $\bar e$ と独立にできるから $\mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar a\bar e) = N-n$. また $C_{\bar\beta}(a_{i0}, a_{i1})$ より $\mathrm{trdeg}(\bar a/\bar\beta\bar e) \leq n$. よって $\mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar e)+n \geq \mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar e)+\mathrm{trdeg}(\bar a/\bar\beta\bar e) = \mathrm{trdeg}(\bar a\bar\beta/\bar e) = \mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar a\bar e)+\mathrm{trdeg}(\bar a/\bar e) = N - n + n + m$ よりわかる。)
$A_2 \subseteq \{(a_{10}, a_{11}), \ldots, (a_{n0}, a_{n1})\}$ を $\mathrm{trdeg}(\bar a/\bar e\bar\beta) = \mathrm{trdeg}(A_2/\bar e\bar\beta)$ となるものとし、残りを A_1 とし、$n_1 = |A_1|, n_2 = |A_2|$ とする。$\mathrm{trdeg}(A_1/\bar e) \geq n_1$ と $\mathrm{trdeg}(A_1A_2/\bar e) = n_1 + n_2 + m$ より

$$\mathrm{trdeg}(A_2/\bar eA_1) \leq n_2 + m$$

が成立する。ここで $l = \mathrm{trdeg}(A_2/\bar e\bar\beta) = \mathrm{trdeg}(\bar a/\bar e\bar\beta)$ とする。

Subclaim 1 $d \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば $l \leq m$.

まず A_2 の $\left(1 + \left[\dfrac{d}{n_2}\right]\right)$ 個の $\bar e\bar\beta$-代数独立なコピーと A_1 の和集合を A とする。
$|A| = n_1 + n_2\left(1 + \left[\dfrac{d}{n_2}\right]\right) \geq d$ と Remark 2.2 の 2 より $\mathrm{trdeg}(\bar\beta/A) \leq N - d$ が成立。

$$\begin{aligned}
\mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar e) + l\left(1 + \left[\frac{d}{n_2}\right]\right) &\leq \mathrm{trdeg}(\bar\beta/\bar e) + \mathrm{trdeg}(A/\bar\beta\bar e)\\
&= \mathrm{trdeg}(\bar\beta A/\bar e)\\
&= \mathrm{trdeg}(A/\bar e) + \mathrm{trdeg}(\bar\beta/A\bar e)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \operatorname{trdeg}(A_1/\bar{e}) + \operatorname{trdeg}(A_2/A_1\bar{e})\left(1+\left[\frac{d}{n_2}\right]\right) + N - d \\
&\leq n + m + (n_2+m)\left(1+\left[\frac{d}{n_2}\right]\right) + N - d \\
&\leq n + m + n_2 + m + m\left[\frac{d}{n_2}\right] + d + N - d \\
&\leq n + 2m + n_2 + m\left[\frac{d}{n_2}\right] + N.
\end{aligned}
$$

よって

$$
N - n + m + l\left(1+\left[\frac{d}{n_2}\right]\right) \leq N + n + m + n_2 + m\left(1+\left[\frac{d}{n_2}\right]\right).
$$

従って

$$
l\frac{d}{n_2} \leq l\left(1+\left[\frac{d}{n_2}\right]\right) \leq 2n + n_2 + m\frac{d}{n_2}.
$$

$$
l \leq (2n+n_2)\frac{n_2}{d} + m.
$$

これより d が十分大きいとき $l \leq m$ が分る。Subclaim の証明終り。

$V = \operatorname{loc}(\bar{\alpha}/\bar{e}), W = \operatorname{loc}(\bar{\beta}/\bar{a}\bar{e})$ とする。このとき代数多様体の次元定理より $\operatorname{trdeg}(V \cap W) \geq \operatorname{trdeg}(W) + \operatorname{trdeg}(V) - N = N - n + \operatorname{trdeg}(V) - N = \operatorname{trdeg}(V) - n$ が成立する。d が十分大きいとき $\operatorname{trdeg}(V) \geq n$ より $n \leq \operatorname{trdeg}(V) \leq n + \operatorname{trdeg}(V \cap W)$. よって $V \cap W \neq \emptyset$.
$\operatorname{trdeg}(\bar{\beta}\bar{a}/\bar{e}) = \operatorname{trdeg}(\bar{a}/\bar{e}) + \operatorname{trdeg}(\bar{\beta}/\bar{a}\bar{e}) = n + m + \operatorname{trdeg}(V \cap W) \geq n + m + \operatorname{trdeg}(V) - n = \operatorname{trdeg}(\bar{\alpha}/\bar{e}) + m$. 一方、Subclaim より $\operatorname{trdeg}(\bar{\beta}\bar{a}/\bar{e}) = \operatorname{trdeg}(\bar{\beta}/\bar{e}) + \operatorname{trdeg}(\bar{a}/\bar{e}\bar{\beta}) \leq \operatorname{trdeg}(\bar{\beta}/\bar{e}) + m$. よって

$$
\operatorname{trdeg}(\bar{\alpha}/\bar{e}) \leq \operatorname{trdeg}(\bar{\beta}/\bar{e}).
$$

□

5 Genericな曲線構造の特性

次の事実は定める多項式の次数さえ抑えれば、$\bar{k}$-既約性を係数 a_{ij} に関する elementary な情報から k の内部で判定できる事を主張している。

Fact 5.1 *(Lou van den Dries の'84 の結果)*
$\bar{X} = X_1 \dots X_n, f_1(\bar{X}), \dots f_r(\bar{X}) \in k[\bar{X}]$ を次数 e 以下の多項式。
$M = M(n, e)$ を次数 e 以下の $\bar{X}$ の単項式の集合。
$f_i(\bar{X}) = \sum_{m \in M} a_{im} m$ と表し $V((a_{1m})_{m \in M}, \dots, (a_{rm})_{m \in M})$ を $f_1(\bar{X}), \dots f_r(\bar{X})$ で定まる k-*Zariski* 閉集合とする。このとき
$V((a_{1m})_{m \in M}, \dots, (a_{rm})_{m \in M})$ が絶対既約 $\Leftrightarrow k \models \varphi((a_{1m})_{m \in M}, \dots, (a_{rm})_{m \in M})$ となる体の言語の（パラメーターも量化記号もなし）論理式 $\varphi_{n,e,r}$ が存在する。

一方、Generic な曲線の極限構造は次のような性質を持つ。

Remark 5.2 $(K, C^K) \models T$ かつ $(a, b) \in C^K$ ならば $(K, C^K - (a, b)) \models T$.
T は完全より $(K, C^K) \equiv (K, C^K - (a, b))$.

Proof. $(K, C^K - (a, b))$ が公理系 1,2 を満たすのは明らか。
$(K, C^K - (a, b)) \models \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{d})$ ならば $(K, C^K) \models \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^n (C(x_{i0}, x_{i1}) \wedge (x_{i0}, x_{i1}) \neq (a, b)) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{z}))$ を示したい。

$$\varphi'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, a, b) \equiv \varphi(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} ((x_{i0} - a)y_{i0} - 1)((x_{i1} - b)y_{i1} - 1) = 0$$

とする。このとき

$$K \models \forall \bar{z}(\psi_{\varphi',\sigma}(\bar{z}, a, b) \leftrightarrow \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{z}))$$

より $(K, C^K - (a, b)) \models \psi_{\varphi,\sigma}(\bar{d})$ ならば $(K, C^k) \models \psi_{\varphi',\sigma}(\bar{d})$ より $(K, C^k) \models \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^n (C(x_{i0}, x_{i1}) \wedge (x_{i0}, x_{i1}) \neq (a, b)) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{z}))$.

□

従って、次数を抑えない限り、既約性や Zariski 閉集合か否かの elementary な判定法はない。

参考文献

[CHKP] O.Chapuis, E.Hrushovski, P.Koiran et B.Poizat, La limite des theorie de courbes generiques, JSL, 67, 2002, pp.24-34.

[P] B.Poizat, Le carre de l'egalite, JSL, 64, 1999, pp.1339-1355.