数理解析研究所講究録
1517 巻 2006 年 120-134

ハイパートーラスグラフとその同変コホモロジー

大阪市立大学数学研究所　黒木　慎太郎 (Shintarô Kuroki)
Osaka City university Advanced Mathematical Institute

阿部考順先生の還暦に捧げます。

ABSTRACT. この論説は、ハイパートーラスグラフの定義とその同変コホモロジー環の記述を与える事を目的とする。ハイパートーラスグラフは、トーリック多様体（もっと一般に Symplectic 多様体）に対する GKM グラフ ([GZ99])、トーラス多様体に対するトーラスグラフ ([MMP05]) のように toric hyperKähler 多様体に対するそれらの類似物として定義する。それらとの大きな違いは「足」（一つの頂点から延びる半直線）を持っても良いグラフになっていることである。n 価の GKM グラフやトーラスグラフの各頂点に n 本の足をつけることで簡単にハイパートーラスグラフが定義できる。よってハイパートーラスグラフは GKM グラフやトーラスグラフのベクトルバンドルに当たるものであると言うことができる。

1. 序

1.1. 背景. 1974 年、T. Chang と T. Skjelbret は [CS74] の中で、W.Y.Hsiang の予想を解決するために以下の補題を準備した。

Lemma . トーラス T^n が作用する空間 M^{2m} ($n \leq m$) が *equivariantly formal* ならば埋め込み $i : M^T \to M$ から誘導される $i^* : H_T^*(M) \to H_T^*(M^T)$ は単射で、その像は、余次元一の部分トーラス H と埋め込み $i_H : M^T \to M^H$ によって次のように記述できる。

$$\mathrm{Im}\, i^* = \cap_H i_H^* H_T(M^H)$$

ここでトーラス T^n が作用する空間 M^{2m} ($n \leq m$) が **equivariantly formal** とは、ファイバー束 $BT \to ET \times_T M \to M$ のスペクトル系列が自明になる (collapse) 時を言う。24 年後の 1998 年、M. Goresky、R. Kottwitz、R. Macpherson が [GKM98] の中でこの補題を再発見した。更に [GKM98] で、1スケルトンの軌道空間の次元が一次元になる場合（つまり1スケルトンが S^2 を不動点でつなぎ合わせた baloon art のような形になる場合）1スケルトンの同変コホモロジー環がグラフと群作用の接空間への表現の情報から定義できる環と同型になることを示した。それらの研究を受けて、V. Guillemin、C. Zara は 1999 年から続く一連の論文の中で GKM グラフを定義し、その組み合わせ的な性質を研究した ([GZ99][GZ00] [GZ01-1][GZ01-2][GZ02][GZ03][GHZ06])。GKM グラフとは、1スケルトンとトーラス作用の情報を入れた n 価グラフである。彼らは一

この研究は大阪市立大学数学研究所 (OCAMI) と財団法人風樹会の援助の下に行われている。また、この論説は２００６年５月の数理解析研究所短期共同研究集会「変換群の手法」で行った講演に基づくものである。.

連の研究の中で、幾何的な情報を、GKM グラフ上の組み合わせ的な言葉に翻訳した。それらの研究の中で、最も基礎となる翻訳は『同変コホモロジー $H_T^*(M)$』の『グラフの同変コホモロジー $H_T^*(\Gamma)$』への翻訳であろう（この翻訳は [GKM98] の中でもなされている)。組み合わせ的な翻訳をしたことで、「幾何的な定理がより一般的に成り立つ」事や、その定理に「組み合わせ論的なアイデアを用いた明快な証明」をつけることができるようになる事、等が大きな成果であると言える。また、変換群論と組み合わせ論との橋渡しになる可能性も大いに期待できる。実際、彼らは組み合わせ論への応用も一連の研究の中で行っている。

1.2. 問題. しがし、GKM グラフの解決すべき問題はまだたくさん残っている。例えば、彼らの研究からはグラフの同変コホモロジー $H_T^*(\Gamma)$ の $H^*(BT)$-algebra としての構造はわかるが、環構造はわからない。この答えは部分的に、2005 年に H. Maeda、M. Masuda、T. Panov によって部分的に一般化された GKM グラフ（トーラスグラフ）について解決された（[MMP05])。また、Guillemin と Zara は Symplectic 幾何からの翻訳を中心に行い、証明のアイデアもそこから得ているがより広い幾何に対して翻訳ができるはずである。実際 [MMP05] の研究では torus 多様体からの翻訳をしている。最後にこれが GKM グラフに関する研究の目標とすべきことの一つであるが、組み合わせ論への応用がある。Guillemin と Zara もその辺に関して仕事をしているが、もっと大きな応用があって然るべきであるが、まだないように思われる。

1.3. 主定理と本稿の構成. 以上の研究と問題を動機に本稿では、問題の前半部分にある、[GZ99] や [MMP05] 等の研究とは異なる幾何的な概念のグラフへの翻訳と、そのグラフの同変コホモロジー環構造の決定を目標にする。幾何的なものとして toric hyperKähler 多様体を焦点に定め、その上のトーラス作用のある種の性質を抽象化してグラフを定義する（**ハイパートーラスグラフ**)。そして、そのグラフの同変コホモロジー環構造をある場合に組み合わせ的に決定する。次の結果が本稿の主定理である。

Main Theorem . ハイパートーラスグラフ $\Gamma = (\mathcal{G}, \alpha, \theta)$ が次の二つの性質を満たすとする。

(1) 任意の余次元 2 のハイパートーラス部分グラフ $L \subset \mathcal{G}$ に対して $\partial H = \partial \bar{H} = L$ なる、ちょうど二つのハイパーファセット $H, \bar{H}$ が存在する（但し $\bar{H}$ は H の反対側)。
(2) 余次元 2 のハイパートーラス部分グラフの共通部分が空集合か連結。

その時、次の同型が成立する。

$$H_T^*(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}[H, \bar{H}, x \mid H, \bar{H} \in \mathcal{H}]/\mathcal{I}$$

但し $\mathcal{H}$ はハイパーファセット全体の集合、$\mathcal{I}$ は $H + \bar{H} - x$ と $\prod_{H \in \mathcal{H}'} H$（$\mathcal{H}'$ は共通部分が空集合になるハイパーファセットの集合）で生成されるイデアル。

本稿は [Kur] の前半の主な部分の解説になるように構成してある。2 章で toric hyperKähler 多様体の簡単な復習を行い、3 章でハイパートーラスグラフの定義と上の主定理の中に出てくる概念の厳密な定義をする。主定理の厳密な証明は [Kur] の後半部分にある。

2. TORIC HYPERKÄHLER 多様体

この章ではハイパートーラスグラフを定義する為の、モデルとなる幾何学（toric hyperKähler 多様体）についての簡単な復習を行う。

2.1. 研究の歴史. Toric hyperKähler 多様体とは $4n$ 次元の非コンパクトな多様体であって n 次元のトーラス作用を持つものである。1987 年に [HKLR87] で N. Hitchin 等により導入されたハイパーケーラー商を $\mathbb{H}^N$ 上のトーラス $K(\subset T^N)$ 作用に対して行う事で定義される[1]。一般には manifold ではなく orbifold になる[2]。ハイパーケーラー商は、それ自身研究する価値のあるものである。特にハイパーケーラー商に対しても、ケーラー商のように、Kirwin 写像 $H_G^*(\mathbb{H}^N) \to H^*(M)$ が定義できる。そこでもケーラー幾何の場合のように Kiriwin 写像の全射性が予想できる。しかし、その全射性は今だ解決されていない大きな問題である（[Kon04]）。

Toric hyperKähler 多様体の研究は 2000 年の R. Bielowski と A. Dancer によってトーリック多様体をハイパーケーラー幾何の立場で類似することで始められた（[BD00]）。面白い性質としてはトーリック多様体が凸多面体に対応するのに対して、toric hyperKähler 多様体は超平面配置に対応する。その研究に引き続いて、H. Konno が toric hyperKähler 多様体に対する Kirwin 写像の全射性を示し、コホモロジー環や同変コホモロジー環のより詳しい構造の研究を行った（[Kon00][Kon03]）。それらは、超平面配置の組み合わせ構造から定義される環と同型になる。

Toric hyperKähler 多様体はトーリック多様体をハイパーケーラーの立場で類似することで得られるものであるので、GKM グラフを用いた研究ができることが期待できる。ところが自然に定義される n 次元（多様体の $\frac{1}{4}$ 次元）のトーラス作用からは、GKM グラフを得ることはできない（トーラス作用の接空間への表現について pairwise linearly independent 性が成立していないので）。しかし、M. Harada、T. S. Holm、N. Proudfoot の研究で $\mathbb{H}^N$ 上の j 成分方向へ拡張された S^1 作用から誘導される作用と T^n 作用によって、GKM グラフが定義できることがわかった（[HP04][HH05]）。彼女達は超平面配置から定義される半空間の言葉でその拡張作用の同変コホモロジー環を記述した。また環の生成元と GKM グラフの部分グラフとの対応も研究された。

2.2. $\mathbb{H}^N$ 上の幾何構造. 厳密な定義に入る前に $\mathbb{H}^N$ 上の幾何構造について復習しておく。

$\mathbb{H}$ の標準基底を $\{1, i, j, k\}$ とする。基底の演算は

$$ijk = i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

で定義される。$\mathbb{H}$ は非可換であることに注意して $\mathbb{H}^N$ 上の $\mathbb{H}$ スカラー倍は右から掛けるとする。

---

[1] この定義は M. Masuda のトーリック多様体に対するトーラス多様体（[Mas99][HM03][MP03]）のようにもっと位相的に一般化された概念があるはずだと思っている。

[2] variety の訳を多様体としている

今、$T\mathbb{H}^N = \mathbb{H}^N \times (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N)$ 上の三つの複素構造を次のように定義する。

$$\begin{aligned} I_1(h, (z,w)) &= (h, (\sqrt{-1}z, \sqrt{-1}w)), \\ I_2(h, (z,w)) &= (h, (-\bar{w}, \bar{z}), \\ I_3(h, (z,w)) &= (h, (-\sqrt{-1}\bar{w}, \sqrt{-1}\bar{z})) \end{aligned}$$

ここで $(z,w) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N (= T_h\mathbb{H}^N)$, $h \in \mathbb{H}^N$。これら三つの複素構造は対応する四元数の基底の演算を満たしていることがすぐわかる。実際 $\mathbb{H}^N$ と $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ を $z + wj \mapsto (z,w)$ で同一視（二番目の $\mathbb{C}^N$ のスカラー倍は共役して掛ける）したときの $\mathbb{H}^N$ 上の i, j, k の右からの掛け算（これは $\mathbb{H}$ 上のスカラーが左からなので $\mathbb{H}$ 線形である）に対応するものになっている。今後 $\mathbb{H}^N$ と $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ をこの対応で同一視する。各 I_a $(a = 1, 2, 3)$ は $\mathbb{H}^N$ 上の複素構造になることもわかる。

次に、$\mathbb{H}^N$ 上の標準的なリーマン計量を $\mathbb{H}^N$ 上のベクトル束 $S^2(T^*\mathbb{H}^N) = \cup_{h\in\mathbb{H}^N} S^2(T_h^*\mathbb{H}^N)$ の切断 $g : \mathbb{H}^N \to S^2(T^*\mathbb{H}^N)$ で与える[3]。(g, I_a) $(a = 1, 2, 3)$ は $\mathbb{H}^N$ 上のケーラー構造になることがわかる。また、三つの複素構造 I_1, I_2, I_3 が四元数の基底の演算を満たしていたので (g, I_1, I_2, I_3) は $\mathbb{H}^N$ 上のハイパーケーラー構造になる[4]。

従って、ケーラー幾何の場合と同じように $\omega_a(h)(u,v) = g(h)(I_a(u), v)$ $(a = 1, 2, 3)$ として $\mathbb{H}^N$ 上の三つの Symplectic 構造が定義できる（$h \in \mathbb{H}^N$, $u, v \in T_h(\mathbb{H}^N)$）。また、Symplectic 形式 $\omega_a : \mathbb{H}^N \to \Lambda^2(T^*\mathbb{H}^N) = \cup_{h\in\mathbb{H}^N} \Lambda^2(T_h^*\mathbb{H}^N) (\in \Omega^2(\mathbb{H}^N))$ [5]を具体的に $\Omega^2(\mathbb{H}^N)$ の元として書き下せば次のようになる。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(dz \wedge d\bar{z} - dw \wedge d\bar{w}), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(dz \wedge d\bar{w} + d\bar{z} \wedge dw), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(dz \wedge dw + d\bar{z} \wedge d\bar{w}) \end{aligned}$$

2.3. ハイパーケーラー運動量写像. Toric hyperKähler 多様体を定義するために必要となる写像を定義する。

N 次元トーラス T^N の $\mathbb{H}^N$ への作用を以下のように定義する。

$$T^N \times \mathbb{H}^N \ni (t, z + wj) \mapsto zt + wt^{-1}j \in \mathbb{H}^N$$

$t \in T^N$、$z, w \in \mathbb{C}^N$ とする。明らかにこの作用は三つの複素構造を不変にしている。更に、T^N 作用は $\mathbb{H}^N$ 上のハイパーケーラー構造を保存している。この作用を通して任意の部分群 $K \subset T^N$ は $\mathbb{H}^N$ にハイパーケーラー構造を保存して作用する。

この作用を不変にする次の同変写像（**ハイパーケーラー運動量写像**）を定義する。

$$\mu_{HK} = \mu_1 \oplus (\mu_2 + \sqrt{-1}\mu_3) : \mathbb{H}^N = \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \xrightarrow{\mu \oplus \mu_{\mathbb{C}}} \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\iota^* \oplus \iota^*_{\mathbb{C}}} \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$$

---

[3] $S^2(T_h^*\mathbb{H}^N)$ は対称双線形写像 $T_h\mathbb{H}^N \times T_h\mathbb{H}^N \to \mathbb{R}$ 全体。

[4] 三つの複素構造 I_1, I_2, I_3 が四元数の基底の演算を満たし、リーマン計量 g が三つの複素構造のいずれに関してもケーラーである場合に (g, I_1, I_2, I_3) をハイパーケーラー構造と呼ぶ

[5] $\Lambda^2(T_h^*\mathbb{H}^N)$ は歪双線形写像 $T_h\mathbb{H}^N \times T_h\mathbb{H}^N \to \mathbb{R}$ 全体。

ここで、$\mathfrak{t}$、$\mathfrak{k}$ はそれぞれ T^N、K のリー環、$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$、$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ はそれらの複素化（$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$、$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$）で、$\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$ にはそれぞれ T^N と K が自明に作用している。また ι^* と $\iota^*_{\mathbb{C}}$ はそれぞれ埋め込み準同型写像 $\iota : \mathfrak{k} \to \mathfrak{t}$ と $\iota_{\mathbb{C}} : \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ から誘導される全射準同型写像とし、$\mu \oplus \mu_{\mathbb{C}}$ を

$$\begin{aligned} \mu(z, w) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(|z_i|^2 - |w_i|^2)\, u_i \in \mathfrak{t}^* \\ \mu_{\mathbb{C}}(z, w) &= \sum_{j=1}^{N}(z_j w_j)\, u_j \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

で定義する（$\{u_i \mid i = 1, \cdots, N\}$ は $\mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^N$ の双対基底）。μ_a（$a = 1, 2, 3$）はそれぞれ Symplectic 構造 ω_a（$a = 1, 2, 3$）に対する運動量写像になっている。

2.4. Toric hyperKähler 多様体. 厳密な定義に入ろう。

ハイパーケーラー運動量写像の正則値 $\nu \in \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}}$ を取る。[BD00] から $\nu = (\alpha, 0)$（$\alpha \neq 0$）としても良いことがわかる。

この時 ν に対するハイパーケーラー商は次の性質を持つ。

Proposition 2.1. ハイパーケーラー商 $\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ は $(4N - 4\dim K =)4d$ 次元の *orbifold* となり、d 次元トーラス $T^d = T^N/K$ の作用を持つ。

Proof. ν は正則値なので、引き戻した空間 $\mu_{HK}^{-1}(\nu)$ は実次元が $4N - \dim \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{k}^*_{\mathbb{C}} = 4N - 3\dim K$ の多様体になる。μ_{HK} は同変写像で $\mathfrak{k}^*$ への K の作用は自明であったので、$\mu_{HK}^{-1}(\nu)$ には K が作用している。更に ν が正則値であることから、その作用は almost free になる。ここで almost free とは、全てのイソトロピー群 K_x が有限集合になることを言う。従って K で割った空間 $\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ は $(4N - 4\dim K)$ 次元の orbifold になる。

また $\mu_{HK}^{-1}(\nu)$ には T^N も作用しているので、$\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ は T^N/K の作用を持ち、その次元がちょうど $\frac{1}{4}$ 次元になっていることもわかる。 □

この空間 $\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ のことを **toric hyperKähler 多様体**と言う。

Remark. $\mu_{HK}^{-1}(\nu)$ に K が free に作用しているなら $\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ は manifold。$\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ が manifold になるための必要十分条件が [Kon03] に載っている。今後、toric hyperKähler 多様体と言ったら、manifold を意味する。また $\mu_{HK}^{-1}(\nu)/K$ は正則値 ν の取り方に依らずに微分同相になる（[BD00][Kon03]）。

Example. $\mathbb{H}^{N+1}$ 上の $K = \{(t, \cdots, t) \mid t \in T^1\} \subset T^{N+1}$ 作用によるハイパーケーラー商は $T^*\mathbb{C}P(N)$ と微分同相になる。複素射影空間の余接バンドル $T^*\mathbb{C}P(N)$ は toric hyperKähler 多様体の基本的な例。

次に toric hyperKähler 多様体の性質をいくつか紹介する。

(1) I_1 を複素構造に持つ正則 Symplectic 多様体になる。これは一般のハイパーケーラー多様体に関しても言える（[HP04]）。
(2) $M^{4n}/T^n \cong \mathbb{R}^{3n}$。特に toric hyperKähler 多様体は非コンパクトになる（[BD00]）。

(3) トーリック多様体の余接バンドルで toric hyperKähler 多様体になるものは複素射影空間の直積のみ。トーリック多様体の余接バンドルは開多様体としてその中に埋め込まれる（[BD00]）。
(4) T^d 作用から誘導される不動点 p 上の接空間 T_pM への T^d 表現は、

$$T_pM \simeq V(\alpha_1) \oplus \cdots V(\alpha_d) \oplus V(-\alpha_1) \oplus \cdots V(-\alpha_d)$$

に isotoropy weight 分解する（[HH05]）。
(5) 自然に $T^d \times S^1$ 作用に拡張し、その作用は GKM になる（[HH05]）。

ここで性質 (4) の α_i は T^d 表現の weight で $V(\pm\alpha_i) \simeq \mathbb{C}$。性質 (5) の $T^d \times S^1$ 作用への拡張はハイパーケーラー商を取る前に S^1 を $\{0\} \times \mathbb{C}^N$ へ標準的に作用させることから得られる。作用が **GKM** とは $T^d \times S^1$ 作用の不動点集合が有限個で、1 スケルトン[6]の軌道空間が一次元になることを言う。

Remark. 不動点集合が有限集合で、各不動点 $p \in M^T$ の接空間 T_pM 上のトーラス表現の isotropy weight が pairwise linearly independent[7]であることと、T 作用は GKM になることは同値である。よって、toric hyperKähler 多様体は性質 (4) から T^d 作用では GKM にならない。

2.5. 超平面配置との関係. Toric hyperKähler 多様体は超平面配置と対応する。その対応について述べよう。

まず始めに、次のトーラス群の完全系列を考える。

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} T^N \xrightarrow{p} T^d \longrightarrow 0$$

i は自然な埋め込み準同型写像、p は $T^d = T^N/T^k$ とみなすことにより定義される全射準同型写像とする。この完全系列に対して、各単位元上の接空間の間の微分を取ることによって以下のリー環の完全系列が定義できる。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{t} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{t}^d \longrightarrow 0$$

$d_e i = \iota$、$d_e p = \rho$ とした。更に、この完全系列の双対を考えることによって次の $\mathbb{R}$ 加群の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{t}^d)^* \xrightarrow{\rho^*} \mathfrak{t}^* \xrightarrow{\iota^*} \mathfrak{k}^* \longrightarrow 0$$

ここで完全性から $\mathrm{Ker}\,\iota^* \simeq (\mathfrak{t}^d)^*$、$\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{t}^*/(\mathfrak{t}^d)^*$ となっていることがわかる。

Toric hyperKähler 多様体を $M^{4d} = \mu_{HK}^{-1}(\alpha, 0)/K$ と書こう。$\iota^* : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{k}^*$ の全射性と $(0 \neq)\alpha \in \mathfrak{k}^*$ に注意すると、$\nu \in \mathfrak{t}^*$ で $\iota^*(\nu) = \alpha$ なる元が存在していることがわかる。ここで $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^N$ の基底を $\{e_1, \cdots, e_N\}$ とする時、次のように $(\mathfrak{t}^d)^*$ の中に toric hyperKähler 多様体 M^{4d} と ν から定まる N 個の超平面 $E_1, \cdots, E_N$ とそれに対応する半空間が定義で

[6]不動点と一次元軌道の全体のこと。
[7]$\{u_1, \cdots, u_m\}$ が **pairwise linearly independent** とは任意の $\{u_i, u_j\}$ が線形独立の時を言う。

きる。

$$\begin{aligned} E_i &= \{r \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle \rho^*(r) + \nu,\ e_i \rangle = 0\} \\ F_i &= \{r \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle \rho^*(r) + \nu,\ e_i \rangle \geq 0\} \\ G_i &= \{r \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle \rho^*(r) + \nu,\ e_i \rangle \leq 0\} \end{aligned}$$

ここで、$\langle \chi,\ x \rangle = \chi(x)$ $(\chi \in \mathfrak{t}^*,\ x \in \mathfrak{t})$ である。$\langle \rho^*(r) + \nu,\ e_i \rangle = 0$ を書き換えれば $\langle r,\ \rho(e_i) \rangle = \langle -\nu,\ e_i \rangle$ なので、$\rho(e_i)$ が E_i の法ベクトルを指定し、$\nu \in \mathfrak{t}^*$ $(\iota^*(\nu) = \alpha)$ の取り方で平行移動の分の違いしか生じないことがわかる。

逆に $(\mathfrak{t}^d)^*$ の中に余次元一の N 個 $(d < N)$ の異なる超平面 $\{E_1, \cdots, E_N\}$ で長さ 1 の法ベクトル $n_1, \cdots, n_N \in \mathfrak{t}^d$ が $\mathfrak{t}^d$ を生成しているものを与える。その時、ある $\beta_i \in \mathbb{R}$ で $E_i = \{r \in (\mathfrak{t}^d)^* \mid \langle r,\ n_i \rangle = \beta_i\}$ と書ける。$\mathbb{R}^N \simeq \mathfrak{t}$ の標準基底 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ に対して $\rho : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}^d$ を $\rho(e_i) = n_i$ なるように定義する。すると、超平面の仮定からこの写像は全射になり、$\mathrm{Ker}\,\rho$ で $\mathfrak{k}$ が定まる。その埋め込み写像を $\iota : \mathfrak{k} \to \mathfrak{t}$ と書く。exp 写像でリー環 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$ からリー群 K, T^N が定まることもわかる。また $\nu \in (\mathbb{R}^N)^* \simeq \mathfrak{t}^*$ として $\langle -\nu,\ e_i \rangle = \beta_i$ で $\iota^*(\nu) \neq 0$ なる元を取ってくる。$\iota^*(\nu) = \alpha$ とすると、ハイパーケーラー運動量写像から多様体 $\mu_{HK}^{-1}(\alpha,\ 0)$ が取れる。exp 写像でリー環 $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$ からリー群 K, T^N が定まるので、toric hyperKähler 多様体が超平面配置から定義できることがわかった。

Remark. Toric hyperKähler manifold から定まる超平面配置は単純（simple）である。つまり、m 個の超平面の共通部分は余次元 m になる。逆に単純な超平面配置からは toric hyperKähler manifold が定まる（[HH05]）。

Example. $T^*\mathbb{C}P(2)$ から定まる超平面配置を見てみよう。$T^*\mathbb{C}P(2)$ は $K = \{(t,t,t) \in T^3\}$ のハイパーケーラー商から定義される。$K \subset T^3$ から部分リー環として $\mathfrak{k} = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \subset \langle e_1,\ e_2,\ e_3 \rangle = \mathfrak{t}$ となっていることがわかる。$\rho : \mathfrak{t}^3 \to \mathfrak{t}^2$ に対して、$\mathrm{Ker}\,\rho = \mathfrak{k}$ だったので、$\mathfrak{t}^2 = \langle x',\ y' \rangle$ とすれば、

$$\rho(e_1) = x',\ \rho(e_2) = y',\ \rho(e_3) = -x' - y'$$

とできる。双対基底を $(\mathfrak{t}^2)^* = \langle x,\ y \rangle$, $\mathfrak{t}^* = \langle u_1,\ u_2,\ u_3 \rangle$ とすれば、$\rho^* : (\mathfrak{t}^2)^* \to \mathfrak{t}^*$ は $x(x') = x(\rho(e_1)) = \rho^*(x)(e_1) = 1$, $x(y') = 0$, $x(\rho(e_3)) = -1$ から、$\rho^*(x) = u_1 - u_3$。同様に $\rho^*(y) = u_2 - u_3$ がわかる。従って、$\mathrm{Ker}\,\iota^* = \langle u_1 - u_3,\ u_2 - u_3 \rangle$ だから、

$$\iota^*(u_1) = \iota^*(u_2) = \iota^*(u_3) = 1 \in \mathfrak{k}^* \simeq \mathbb{R}$$

としても良いこともわかる。

Toric hyperKähler 多様体の位相型はハイパーケーラー運動量写像の正則値 ν の選び方には依らないので、$\nu = (1,\ 0) \in \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^* \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ としても良い。また $\iota^*(\nu) = 1 \in \mathfrak{k}^*$ なる ν の取り方にも依らないので、上の議論から $\nu = u_1 \in \mathfrak{t}^*$ とできる。よって、超平面は以下のようになる。

$$\begin{aligned} E_1 &= \{r \in (\mathfrak{t}^2)^* \mid \langle \rho^*(r) + u_1,\ e_1 \rangle = \langle r,\ x' \rangle + 1 = 0\} \\ E_2 &= \{r \in (\mathfrak{t}^2)^* \mid \langle \rho^*(r) + u_1,\ e_2 \rangle = \langle r,\ y' \rangle = 0\} \\ E_3 &= \{r \in (\mathfrak{t}^2)^* \mid \langle \rho^*(r) + u_1,\ e_3 \rangle = \langle r,\ -x' - y' \rangle = 0\} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2 \simeq (\mathfrak{t}^2)^* = \langle x, y \rangle$ だから、基底を $\mathbb{R}^2$ の x 座標、y 座標とみなせば、超平面 E_1 は $x = -1$ なる直線、超平面 E_2 は $y = 0$ なる直線、超平面 E_3 は $y = -x$ なる直線になることがわかる。

2.6. コホモロジー環. 次に toric hyperKähler 多様体 M の 4 つのコホモロジー環構造を述べておく。M から定義される N 個の超平面の集合を $\mathbf{E} = \{E_1, \cdots, E_N\}$ とし、$S \subset \{1, \cdots, N\}$ と置く。

まず最初の定理は標準的な T^d 作用に関する同変コホモロジー環についてである。

Theorem 2.2 ([Kon99]). $H^*_{T^d}(M) \simeq \mathbb{Z}[u_1, \cdots, u_N]/\langle \prod_{i \in S} u_i \mid \cap_{i \in S} E_i = \emptyset \rangle$

Remark. これは超平面配置 **E** によって定まる unoriented matroid の Stanley-Reisner ring である（[HS02]）。

$\iota^* : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{k}^*$ を思い出そう。$\langle u_1, \cdots, u_N \rangle = \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} = H^2_{T^d}(M)$ で同一視すると、コホモロジー環構造は次のように書ける。

Theorem 2.3 ([Kon00]). $H^*(M) \simeq H^*_{T^d}(M)/\langle \sum a_i u_i \in \mathrm{Ker}\, \iota^* \rangle$

Toric hyperKähler 多様体は $T^d \times S^1$ 作用に拡張するので（性質 (5)）、その同変コホモロジー環に関しての定理も述べよう。T^d 作用の同変コホモロジー環は超平面配置の組み合わせ構造で記述できたのに対して、$T^d \times S^1$ 作用の同変コホモロジー環は超平面から定義される半空間 $\{G_i \mid i = 1, \cdots, N\}$ と $\{F_i \mid i = 1, \cdots, N\}$ の組み合わせ構造によって記述できる。次の定理が成り立つ。

Theorem 2.4 ([HP04]). $\cap_{i \in S} E_i = \emptyset$ なる $S \subset \{1, \cdots, N\}$ に対して、$S = S_1 \cup S_2$ なる共通部分を持たない S_1 と S_2 を次のように定める。

$$(\cap_{i \in S_1} G_i) \cap (\cap_{i \in S_2} F_i) = \emptyset$$

その時、以下の同型が成立する。

$$H^*_{T^d \times S^1}(M) \simeq \mathbb{Z}[u_1, \cdots, u_N, x]/\langle \prod_{i \in S_1} u_i \times \prod_{i \in S_2} (u_i - x) \mid \cap_{i \in S} E_i = \emptyset \rangle$$

$T^d \times S^1$ 作用から制限 S^1 作用も定義できるわけだが、その同変コホモロジー環構造についても次の定理が成り立つ。

Theorem 2.5 ([HP04]). $H^*_{S^1}(M) \simeq H^*_{T^d \times S^1}(M)/\langle \sum a_i u_i \in \mathrm{Ker}\, \iota^* \rangle$

3. ハイパートーラスグラフ

Toric hyperKähler 多様体の性質 (4) と (5) からできるグラフの性質を抽象化することで、新しいグラフを定義する。まずグラフの言葉の復習から始める。

グラフ $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ を頂点集合 $V^{\mathcal{G}}$、集合 $E^{\mathcal{G}}$ は辺の集合 $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}$ と足の集合 $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ からなるグラフとする。ここで、**辺**とは二つの頂点を結ぶ区間、**足**とは一つの頂点から延びる半直線とする。また、各辺には pq と qp で二つの向きが定められている（pq と qp は $\mathcal{E}^{\mathcal{G}}$ の中の異なる元とみなす）ものとし、pq の p を始点、q を終点と呼ぶ。それに従うと、始点があって終点のないものを足と呼ぶことができる。$E^{\mathcal{G}}_p (\subset E^{\mathcal{G}})$ で $p \in V^{\mathcal{G}}$ を始点と

する辺と足の全体とする。m **価グラフ**とは各 $p \in V^{\mathcal{G}}$ に対して、$E^{\mathcal{G}}_p$ の数が m のものを言う。

3.1. ハイパートーラスグラフ. $\Gamma = (\mathcal{G}, \alpha, \theta)$ を一つずつ定義していく。

$\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ を 2d 価グラフとする。各頂点 $p \in V^{\mathcal{G}}$ に対して、

$$E^{\mathcal{G}}_p = \{h_1^+, \cdots, h_d^+, h_1^-, \cdots, h_d^-\}$$

で d 対 (h_i^+, h_i^-) $(i = 1, \cdots, d)$ を定める。

$H^2(B(T^d \times S^1)) = (t^d_{\mathbb{Z}})^* \oplus \mathbb{Z} = \langle u_1, \cdots, u_d \rangle \oplus \langle x \rangle$ で同一視する。写像 $\alpha : E^{\mathcal{G}} \to t^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}$ を各 $E^{\mathcal{G}}_p$ に対して、

(1) $\alpha(pq) = \alpha(qp)$ or $-\alpha(qp)$
(2) $\langle \alpha(h_1^+), \cdots, \alpha(h_d^+) \rangle = (t^d_{\mathbb{Z}})^*$
(3) $\alpha(h_i^+) + \alpha(h_i^-) = x$

が成立するものとする。そのような α を**ハイパートーラスグラフの axial function** と言う。各 $p \in V^{\mathcal{G}}$ に対して $\alpha(E^{\mathcal{G}}_p) \subset t^*_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}$ は three independet になることに注意[8]。

$\theta_{pq} : E^{\mathcal{G}}_p \to E^{\mathcal{G}}_q$ を、以下を満たすように定める。

(1) θ_{pq} は全単射。
(2) **congruence relation** $\alpha(h) - \alpha(\theta_{pq}(h)) \equiv 0 \pmod{\alpha(pq)}$ を満たす $(h \in E^{\mathcal{G}}_p)$。

このとき $\theta = \{\theta_{pq} \mid pq \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}\}$ を $\mathcal{G}$ の **connection** と言う。

Remark. $\alpha(E^{\mathcal{G}}_p)$ が各 $p \in V^{\mathcal{G}}$ で three independent なので、connection は $\mathcal{G}$ 上で唯一つになる。

以上の条件を満たす $\Gamma = (\mathcal{G}, \alpha, \theta)$ を**ハイパートーラスグラフ**と言う。

Example. $\langle \alpha, \beta \rangle = (t^2_{\mathbb{Z}})^*$ とする。次のページの二つ例（Figure 3.1 と Figure 3.2）はハイパートーラスグラフの典型例である。矢印の上の値は axial function を指す。それによって唯一つの connection が定まることも容易にわかる。

3.2. toric hyperKähler 多様体との関係. ハイパートーラスグラフは toric hyperKähler 多様体や toric 多様体の（余）接バンドルから定義できる。そのことについて簡単に述べよう。

今 toric hyperKähler 多様体の性質 (5) から $T = T^d \times S^1$ 作用は GKM であるので不動点が有限個である。一次元軌道の集合を $\mathfrak{S}$ と書く。すると、作用が GKM であることより、$(M^T \cup \mathfrak{S})/T = \mathcal{G}$ は不動点を頂点とみなしたグラフになる。

実際、作用が GKM なら、二個の不動点 $\{p, q\}$ が一次元軌道の集合 $\mathfrak{S}(p, q)$ で（途中に不動点を挟まずに）繋げる場合 $\{p, q\} \cup \mathfrak{S}(p, q) \cong S^2$ となる。なぜなら、作用が GKM であることから $\{p, q\} \cup \mathfrak{S}(p, q)$ が二次元のコンパクトな向き付け可能多様体になることがわかり、二個の不動点を持つトーラス作用があることからそれが S^2 になるからである。よって $\mathcal{G}$ の中で p, q をつなぐ辺は、M の中の p, q を極に持つ $S^2 = \mathfrak{S}(p, q) \cup \{p, q\}$ に対応する。更に、一次元軌道の集合 $\mathfrak{S}$ から上のような $\mathfrak{S}(p, q)$ を全て除くと $\mathbb{C} - \{0\}$

[8] $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が **three independet** とは任意の三対 $\{u_i, u_j, u_k\}$ が線形独立の時を言う。

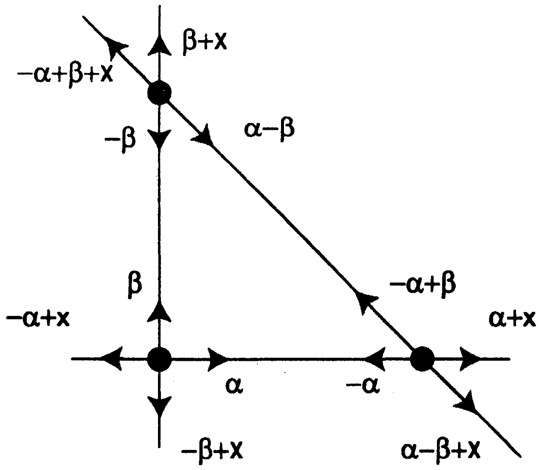

FIGURE 3.1. $T^*\mathbb{C}P(2)$ 上の $T^2 \times S^1$ 作用から定義されるハイパートーラスグラフ

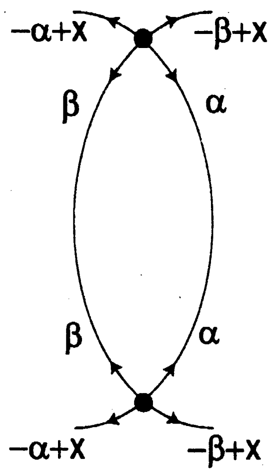

FIGURE 3.2. $S^4 \times \mathbb{C}^2$ 上の $T^2 \times S^1$ 作用から定義されるハイパートーラスグラフ

と同相な集合に分かれる。その中の一つの連結成分の閉包を取ればある不動点 p を原点とした $\mathbb{C}$ と同相な集合になることがわかる。それを $\mathfrak{S}(p)$ と書くことにすると、$\mathcal{G}$ の中で p を始点とする足は、M の中の p を原点とした $\mathbb{C} = \mathfrak{S}(p) \cup \{p\}$ に対応する。その対応から toric hyperKähler 多様体の次元が 4d なら 2d 価のグラフが定義できる。

また $\{p, q\} \cup \mathfrak{S}(p, q) = S^2$, $\{p\} \cup \mathfrak{S}(p) = \mathbb{C}$ 上の不動点の接空間への $T^d \times S^1$ 作用は表現 $T^d \times S^1 \to U(1)$ から誘導されるものである。M の不動点 p の接空間の $T^d \times S^1$ 表現による isotropy weight 分解は toric hyperKähler 多様体の性質 (4) と $T^d \times S^1$ 作用への拡張のしかたから

$$T_pM \simeq V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_d) \oplus V(-\alpha_1 + x) \oplus \cdots \oplus V(-\alpha_d + x)$$

になる。よって、その各成分 $V(w)$ は p の周りの S^2 or $\mathbb{C}$ の不動点上の接空間に対応することがわかる。従って、対応する S^2（辺） or $\mathbb{C}$（足）上に weight によってラベルを貼ることができる。それが axial function の条件を満たすことも、toric hyperKähler 多様体の性質 (4) からわかる。three independent だから connection も自動的に決まる。以上より toric hyperKähler 多様体からハイパートーラスグラフが定義できる。

同様にして toric 多様体の（余）接バンドル上の $T^d \times S^1$ 作用からもハイパートーラスグラフが定義できる。

Example. Figure3.1 にあるグラフは toric hyperKähler 多様体の一つ $T^*\mathbb{C}P(2)$ 上の $T^2 \times S^1$ 作用から、Figure3.2 にあるグラフは toric hyperKähler 多様体でも toric 多様体の（余）接バンドルでもない $S^4 \times \mathbb{C}^2$ 上の $T^2 \times S^1$ 作用から定義できるハイパートーラスグラフである。

Remark. S^4 には概複素構造がないので T^*S^4 や TS^4 上の T^2 作用は標準的な $T^2 \times S^1$ 作用（S^1 が各ファイバーにスカラー倍で作用する作用）には拡張しないことに注意せよ。ところが、S^4 は安定複素構造を持つので、[Lan74] から $S^4 \times \mathbb{C}^2$ には複素構造が入る。従って Figure3.2 にあるような axial function が定まる。

3.3. グラフの同変コホモロジー. 次にこの論文の目的にもなっているグラフの同変コホモロジーを定義しよう。$T = T^d \times S^1$ と置く。次の写像の集合よりなる環 $H_T^*(\Gamma)$ を**グラフの同変コホモロジー**と呼ぶ。

$$H_T^*(\Gamma) = \{f : V^{\mathcal{G}} \to H^*(BT) \mid f(p) - f(q) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \alpha(pq)) \text{ for } pq \in \mathcal{E}^{\mathcal{G}}\}$$

[CS74] と [GKM98] の結果を合わせれば、$\Gamma(M)$ を多様体 M^{4d}（例えば toric hyperKähler 多様体）とその上の $T(= T^d \times S^1)$ 作用から定義されたハイパートーラスグラフとする時、次のことがわかる。

$$H_T^*(M^{4d}) \simeq H_T^*(\Gamma(M))$$

ここで、左は同変コホモロジー環、右はグラフの同変コホモロジー環である。従って、$H_T^*(\Gamma)$ を調べることと、同変コホモロジー環を調べることは同値である。

具体的に $H_T^*(\Gamma)$ の元になる写像の例をあげよう。

Example. Figure 3.1 にあるグラフに対して、左下の頂点を p、右下の頂点を q、上の頂点を r と定めると次の写像 $f : V^{\mathcal{G}} \to H^2(BT)$ は $H_T^*(\Gamma)$ の元になる。

$$\begin{aligned} f(p) &= \alpha(2\alpha + \beta); \\ f(q) &= 2\alpha\beta; \\ f(r) &= 2\alpha^2 + \beta(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

定義に沿って $H_T^*(\Gamma)$ の元になることをチェックしてみよう。今 Figure 3.1 にあるグラフは三つの辺 pq, qr, rp を持っているのでそれにそった f の値の差を調べれば以下が成立する。

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= 2\alpha^2 - \alpha\beta \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \alpha), \\ f(q) - f(r) &= 2\alpha(\beta - \alpha) - \beta(\alpha - \beta) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \beta - \alpha), \\ f(r) - f(p) &= -\beta^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod} - \beta) \end{aligned}$$

従って、$f \in H_T^*(\Gamma)$ がわかる。

3.4. いくつかの概念と主定理. $H_T^*(\Gamma)$ の環構造を述べることが本稿の目的であった。主定理を述べる為に言葉を準備しよう。

ハイパートーラスグラフ $\Gamma = (\mathcal{G}, \alpha, \theta)$ に対して、$H = (V^H, E^H) \subset \mathcal{G}$ を部分グラフとする。今、$p \in V^H$ に対して、$|E_p^H| = 2d-1$ or $2d$ としよう。ここで $E_p^H = E_p^{\mathcal{G}} \cap E^H$ で $|E_p^H|$ は E_p^H の数を意味する。更にこの H が $\mathcal{G}$ の connection θ に対して以下の条件を満たす（connection θ で**閉じている**）としよう。

(1) もしも $|E_p^H| = |E_q^H|$ なら θ_{pq} の制限 $\theta_{pq}|_H : E_p^H \to E_q^H$ は全単射（つまり $\theta_{pq}|_H = \theta_{pq}$）。
(2) もしも $|E_p^H| = 2d-1 < 2d = |E_q^H|$ なら θ_{pq} の制限 $\theta_{pq}|_H : E_p^H \to E_q^H$ は単射でこの $\theta_{pq}|_H$ は次の二つの条件を満たす。

$$\alpha(e) - \alpha(\theta_{pq}(e)) = 0 \pmod{\alpha(pq)},$$
$$\alpha(h) - x = 0 \pmod{\alpha(pq)}$$

但し、$e \in E_p^H$ で $h \in E_q^{\mathcal{G}}$ は $h \notin \mathrm{Im}\,\theta_{pq}|_H$ なる元、$x \in \mathbb{Z}$ は S^1 のリー環の生成元。

以上の条件を満たす $(H, \alpha|_H, \theta|_H) \subset \Gamma$ を**前ハイパーファセット**（pre-hyperfacet）と呼ぶ。

次に前ハイパーファセットと対応するグラフの同変コホモロジー環の元を定義する（この対応が主定理の同型対応を定めることになる）。$(H, \alpha|_H, \theta|_H)$ を前ハイパーファセットとしよう。$\tau_H : V^\Gamma \to H^2(BT)$ が次の条件を満たす時、τ_H を前ハイパーファセットの**トムクラス**と呼ぶ。

$$\tau_H(p) = \begin{cases} 0 & p \notin V^H \\ x & |E_p^H| = 2d \\ \alpha(n_H(p)) & |E_p^H| = 2d-1, \end{cases}$$

ここで、$n_H(p)$ は点 $p \in V^H$ での H の法方向、つまり $n_H(p) \notin E_p^H$ なる辺（足）とする。次ページの図 Figure 3.3 にトムクラスの例が出ている。

Remark. τ_H は $H_T^*(\Gamma)$ の元である。

前ハイパーファセット H に対して H とは異なる前ハイパーファセット I が次の条件を満たしているとする。

- $H \cup I = \Gamma$;
- $\tau_H + \tau_I = x$,

このとき I を H の**反対側**にある前ハイパーファセットといい、$I = \bar{H}$ と書く。次ページの図 Figure 3.3 は反対側の例である。

H の反対側 $\bar{H}$ が連結になる前ハイパーファットのことを**ハイパーファセット**と言う。これが $H_T^*(\Gamma)$ の生成元にあたるものである。次ページの図 Figure 3.3 は前ハイパーファセットの例のみならずハイパーファセットの例になっている。

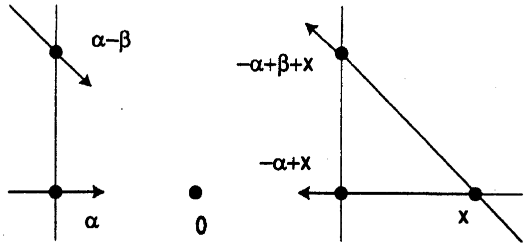

FIGURE 3.3. Figure 3.1 の例の（前）ハイパーファセットとその反対側のトムクラス

前ハイパーファセット H に対してその**境界**∂H を $H \cap \bar{H} = \partial H$ で定めると、これは $2d-2$ 価の部分グラフになっている。容易にわかる事であるが、ハイパーファセット H に対して ∂H は Γ の中の $2d-2$ 価の（連結な）ハイパートーラス部分グラフになっている（$2d-2$ 価の連結なハイパートーラス部分グラフを**余次元２のハイパートーラス部分グラフ**と言う)。

以上の概念を用いて主定理を述べることができる。

Main Theorem . ハイパートーラスグラフ $\Gamma = (\mathcal{G}, \alpha, \theta)$ が次の二つの性質を満たすとする。

(1) 任意の余次元２のハイパートーラス部分グラフ $L \subset \mathcal{G}$ に対して $\partial H = \partial \bar{H} = L$ なる、ちょうど二つのハイパーファセット $H, \bar{H}$ が存在する（但し $\bar{H}$ は H の反対側)。
(2) 余次元２のハイパートーラス部分グラフの共通部分が空集合か連結。

その時、次の同型が成立する。

$$H_T^*(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}[H, \bar{H}, x \mid H, \bar{H} \in \mathcal{H}]/\mathcal{I}$$

但し $\mathcal{H}$ はハイパーファセット全体の集合、$\mathcal{I}$ は $H + \bar{H} - x$ と $\prod_{H \in \mathcal{H}'} H$（$\mathcal{H}'$ は共通部分が空集合になるハイパーファセットの集合）で生成されるイデアル。

主定理の右辺を $\mathbb{Z}[\Gamma]$ と書き、対応 $\Psi : \mathbb{Z}[\Gamma] \to H_T^*(\Gamma)$ を $\Psi(H) = \tau_H$, $\Psi(x) = x$ で定義する。

Remark. Figure 3.1 にある例は上の条件を満たしている。Figure 3.2 にある例は条件 (2) を満たしていない[9]。

厳密な証明は [Kur] に書いてある。紙数の制限もあるのでここでは（言葉の定義を省略した）証明の概略のみを述べるにとどめるにする。

Proof. まずハイパーファセットの**近傍**と言う概念を定義しそれを用いて**最小ハイパートーラスグラフ**（minimal hypertorus graph）を定義する。最小ハイパートーラスグラフは一般のトーラスグラフ（[MMP05] 参照）の接ベクトルバンドルに当たるものと思って

[9]実際 Figure 3.2 の例では生成元がハイパーファセット以外にも出てくる。条件 (2) を除いた定理を探すのが今後の課題の一つである

も良い。まず始めに最小ハイパートーラスグラフに対して、定理が成立することを証明する。これはトーラスグラフに対するグラフの同変コホモロジー環の証明（[MMP05]）と同様にできる。

次に最小でない場合に $V^{\mathcal{G}}$ の数に関する帰納法を用いる。頂点の数 $|V^{\mathcal{G}}|=1$ なら必ず最小になるので上の議論より成立していることがわかる。$|V^{\mathcal{G}}|<k$ までで成立しするとする。今、$|V^{\mathcal{G}}|=k$ かつ Γ が最小でないと仮定しよう。最小でないことから Γ は二つのハイパーファセット H, $\bar{H}$ の近傍 Γ_1, Γ_2（いずれもハイパートーラスグラフ）に分けることができて、$\Gamma_3=\Gamma_1\cap\Gamma_2$ で定義すると Γ_3 もハイパートーラスグラフになる。そして次の系列が存在している。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathbb{Z}[\Gamma] & \xrightarrow{\rho_1} & \mathbb{Z}[\Gamma_1]\oplus\mathbb{Z}[\Gamma_2] & \xrightarrow{\rho_2} & \mathbb{Z}[\Gamma_3] & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \Psi\downarrow & & \Psi_1\oplus\Psi_2\downarrow & & \Psi_3\downarrow & & \\ \{0\} & \longrightarrow & H_T^*(\Gamma) & \xrightarrow{\rho_1'} & H_T^*(\Gamma_1)\oplus H_T^*(\Gamma_2) & \xrightarrow{\rho_2'} & H_T^*(\Gamma_3) & & \end{array}$$

このとき $|V^{\mathcal{G}_i}|<k$ であるので各 $\Gamma_i=(\mathcal{G}_i,\ \alpha_i,\ \theta_i)$ に対して帰納法の仮定から Ψ_i は同型になる（$i=1, 2, 3$）。更に、この系列の上下の完全性が言えるので、蛇の補題から Ψ の全射性が言える。

残りは Ψ の単射性であるが、これは [HP04] の toric hyperKähler 多様体の時の証明のアイデアを使う。つまりまず始めに $\alpha=\alpha^T+\alpha^{S^1}$ で axail function$\alpha: E^{\mathcal{G}}\to t^*\oplus\mathbb{Z}$ を分けて α^T に制限して定義されるグラフ $\Gamma^T=(\mathcal{G},\ \alpha^T,\ \theta)$ の同変コホモロジー環の結果を導き出す。それを用いて次の可換図式を使って Ψ の単射性を導き出す（長いので詳細は省略する）。

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{I}\subset & \mathbb{Z}[x,\ H_1,\cdots,\ H_m] & \xrightarrow{\pi} & H_{T\times S^1}^*(\Gamma) \\ & (x\mapsto 0)\downarrow\mathcal{F}_x & & \downarrow\mathcal{F} \\ \mathcal{F}_x(\mathcal{I})\subset & \mathbb{Z}[L_1,\cdots,\ L_m] & \xrightarrow{\pi'} & H_T^*(\Gamma^T) \end{array}$$

ここで $L_i=\partial H_i$ である。 □

最後に、大阪市立大学の枡田幹也先生と McMaster 大学（元トロント大学）の原田芽ぐみ先生に心から感謝します。枡田先生は、この研究を行うにあたり有益な助言を下さり、著者の指導教官として博士課程の間励まして頂きました。原田先生には研究だけでなく、トロント滞在期間中に大変お世話になりました。

REFERENCES

[BD00] R. Bielowski, A. Dancer: *The geometry and topology of toric hyperKäler*, Com. Anal. Geom., Vol 8, No. 4 (2000), 727–759.

[CS74] T. Chang, T. Skjelbret: *The topological Schur lemma and related result*, Ann. Math., **100** (1974), 307–321.

[GZ99] V. Guillemin, C. Zara: *Equivariant de Rham theory and graphs*, Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century, Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76.

[GZ00] V. Guillemin, C. Zara: *Morse theory on graphs*, math.CO/0007161

[GZ01-1] V. Guillemin, C. Zara: *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J., **107** (2001), 283–349.

[GZ01-2] V. Guillemin, C. Zara: *G-actions on graphs*, Internat. Math. Res. Notices, 2001, no. 10, 519–542.

[GZ02] V. Guillemin, C. Zara: *Combinatorial formulas for products of Thom classes*, Geometry, mechanics, and dynamics, 363–405, Springer, New York, 2002.

[GZ03] V. Guillemin, C. Zara: *The existence of generating families for the cohomology ring of a graph*, Adv. Math., 174 (2003), no. 1, 115–153.

[GHZ06] V. Guillemin, T. S. Holm, C. Zara: *A GKM description of the equivariant cohomology ring of a homogeneous space*, J. Algebraic Combin., 23 (2006), no. 1, 21–41.

[GKM98] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson: *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math., **131** (1998), 25–83.

[HH05] M. Harada, T. S. Holm: *The equivariant cohomology of hypertoric varieties and their real loci*, Comm. Anal. Geom., **13** (2005), no. 3, 527–559.

[HP04] M. Harada, N. Proudfoot: *Properties of the residual circle action on a hypertoric variety*, Pacific J. Math., **214** (2004), no. 2, 263–284.

[HS02] T. Hausel, B. Strumfels: *Toric hyperkähler varieties*. math. AG/0203096.

[HM03] A. Hattori, M. Masuda: *Theory of Multi-fans*, Osaka. J. Math., **40** (2003), 1–68.

[HKLR87] N. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček: *Hyperkähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys., **108** (1987), 535–589.

[Kon00] H. Konno: *Cohomology rings of toric hyperKähler manifolds*, Int. J. of Math., **11**, no. 8 (2000), 1001–1026.

[Kon99] H. Konno: *Equivariant cohomology rings of toric hyperKähler manifolds*, Quaternionic structures in mathematics and physics (Rome, 1999), 231–240 (elecronic).

[Kon03] H. Konno: *Variation of toric hyperKähler manifolds*, Int. J. of Math., **14** (2003), 289–311.

[Kon04] 今野宏: ハイパーケーラー多様体とその周辺, 21 世紀の数学 幾何学の未踏峰, 日本評論社 (2004), 210–220.

[Kur] S. Kuroki: *Equivariant graph cohomology of hypertorus graph and* $(n+1)$*-dimensional torus action on* $4n$*-dimensional manifold*, preprint.

[Lan74] P. Landweber: *Complex structures on open manifolds*, Topology, **13**, (1974), 69–75.

[MMP05] H. Maeda, M. Masuda, T. Panov: *Torus graphs and simplicial posets*, arXiv: math. AT/0511582.

[Mas99] M. Masuda: *Unitary toric manifolds, Multi-fans and Equivariant index*, Tôhku. Math. J., **51** (1999), 237–265.

[MP03] M. Masuda, T. Panov: *On the cohomology of torus manifolds*, arXiv: math. AT/0306100.

Osaka City university Advanced Mathematical Institute (OCAMI), Sumiyosi-Ku, Osaka 558-8585, Japan

E-mail address: kuroki@sci.osaka-cu.ac.jp