数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 142-150

U-convexity of direct sums of Banach spaces

新潟大自然科学　三谷 健一　(Ken-ichi Mitani)

1　序文

最近, absolute ノルムをもつ $\mathbb{C}^n$ 上において, そのノルムの性質や幾何学的性質に関する結果が得られている. 斎藤-加藤-高橋 [10] は, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm における von Neumann-Jordan 定数を計算した. また, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm をある凸関数で特徴づけた ([11]). また, それに関連して ℓ_p 直和空間を一般化した空間として ψ 直和空間が導入され, 加藤-斎藤 [9], 加藤-斎藤-田村 [4], 三谷-斎藤-鈴木 [8] などによって, その空間での狭義凸性や一様凸性, 一様 non-square 性, Smooth 性, 一様 smooth 性などの特徴づけに関する研究が行われている.

本講演では, ψ-直和バナッハ空間の U-convexity の特徴付けをすることを目的とする. Dhompongsa-Kaewkhao-Saejung [3] は $X \oplus_\psi Y$ の U-convexity を特徴付けたが, 本講演では n 個の ψ-直和についての U-convexity の特徴付けを述べる.

X をバナッハ空間とし, X の単位球面を $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とする. $x \neq 0$ なる X の元 x に対し, x の norming functional 全体を $D(X,x)$ とする. 即ち, $D(X,x) = \{f \in S_{X^*} : f(x) = \|x\|\}$.

Definition 1.1 ([5]) バナッハ空間 X が *U-space* であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, 次を満たすときを言う.

$$\forall x, y \in S_X, \quad \|x+y\| > 2(1-\delta) \Rightarrow f(y) > 1-\varepsilon, \quad \forall f \in D(X,x).$$

Definition 1.2 ([3]) バナッハ空間 X が *u-space* であるとは, $\|x+y\| = 2$ なる任意の $x, y \in S_X$ に対して $D(X,x) = D(X,y)$ を満たすときを言う.

2 Absolute norms and ψ-direct sums

$\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは

$$\|(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)\| = \|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\| \quad \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$$

が成立するときを言う. $\|\cdot\|$ が *normalized* とは

$$\|(1,0,\cdots,0)\| = \|(0,1,0,\cdots,0)\| = \cdots = \|(0,\cdots,0,1)\| = 1.$$

をいう. 例えば ℓ_p-norms $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である:

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1\le p<\infty, \\ \max(|x_1|,\cdots,|x_n|) & \text{if } p=\infty. \end{cases}$$

AN_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized norm 全体とする. $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm について, Bonsall-Duncan ([2]) の中で, 次のような記述が見られる. 任意の $\|\cdot\|\in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t,t)\| \qquad (0\le t\le 1).$$

とおく. このとき,ψ は $[0,1]$ 上の連続な凸関数で

$$\psi(0)=\psi(1)=1, \qquad \max\{1-t,t\}\le\psi(t)\le 1$$

を満たす. そこで, このような関数の全体を Ψ_2 とおくことにする.

Theorem 2.1 ([10]) *AN_2 と Ψ_2 は上記の対応で, 1 対 1 に対応する. 即ち, 任意の $\psi\in\Psi_2$ に対して ,*

$$\|(z,w)\|_\psi = \begin{cases} (|z|+|w|)\psi\left(\frac{|w|}{|z|+|w|}\right) & ((z,w)\ne(0,0)) \\ 0 & ((z,w)=(0,0)) \end{cases}$$

によって定義すると, $\|\cdot\|_\psi\in AN_2$ でかつ $\psi(t)=\|(1-t,t)\|_\psi$ $(0\le t\le 1)$ を満たす.

例えば,ℓ_p ノルムに対応する凸関数は $\psi_p(t)=\{(1-t)^p+t^p\}^{1/p}$ で与えられる. また, ℓ_p ノルム以外に多くの absolute normalized なノルムが沢山あることが分かる.

斎藤-加藤-高橋は [11] において $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm を次のように特徴付けた.

$$\Delta_n=\{(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}: s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}\le 1,\ s_i\ge 0\ (\forall i)\}.$$

とおく. 任意の $\|\cdot\|\in AN_n$ に対して,

$$\psi(s)=\|(1-s_1-s_2-\cdots-s_{n-1},s_1,\cdots,s_{n-1})\| \qquad (\forall s=(s_1,\cdots,s_{n-1})\in\Delta_n)$$

とすると, ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり, 次の条件を満たす.

$$\begin{array}{lrcl}
(A_0) & \psi(0,\cdots,0) & = & \psi(1,0,\cdots,0)=\cdots=\psi(0,\cdots,0,1)=1,\\
(A_1) & \psi(s_1,\cdots,s_{n-1}) & \ge & (s_1+\cdots+s_{n-1})\psi(\frac{s_1}{s_1+\cdots+s_{n-1}},\cdots,\frac{s_{n-1}}{s_1+\cdots+s_{n-1}}),\\
(A_2) & \psi(s_1,\cdots,s_{n-1}) & \ge & (1-s_1)\psi(0,\frac{s_2}{1-s_1},\cdots,\frac{s_{n-1}}{1-s_1}),\\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
(A_n) & \psi(s_1,\cdots,s_{n-1}) & \ge & (1-s_{n-1})\psi(\frac{s_1}{1-s_{n-1}},\cdots,\frac{s_{n-2}}{1-s_{n-1}},0).
\end{array}$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で $(A_0),(A_1),\cdots,(A_n)$ を満たすもの全体とする. ℓ_p-norm に対応する関数は次のものになる.

$$\psi_p(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1})=\begin{cases}((1-\sum_{i=1}^{n-1}s_i)^p+s_1^p+\cdots+s_{n-1}^p)^{1/p} & \text{if } 1\le p<\infty,\\ \max(1-\sum_{i=1}^{n-1}s_i,s_1,\cdots,s_{n-1}) & \text{if } p=\infty.\end{cases}$$

Theorem 2.2 ([11]) 任意の $\|\cdot\|\in AN_n$ に対して,

$$\psi(s)=\|(1-s_1-s_2-\cdots-s_{n-1},s_1,\cdots,s_{n-1})\| \qquad (\forall s=(s_1,\cdots,s_{n-1})\in\Delta_n) \tag{1}$$

と定義すると $\psi\in\Psi_n$ である. 逆に, 任意の $\|\cdot\|\in AN_n$ に対して,

$$\|(x_1,\cdots,x_n)\|_\psi=\begin{cases}(|x_1|+\cdots+|x_n|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+\cdots+|x_n|},\cdots,\frac{|x_n|}{|x_1|+\cdots+|x_n|}\right) & \\ \qquad\qquad \textit{if } (x_1,\cdots,x_n)\ne(0,\cdots,0),\\ 0 & \textit{if } (x_1,\cdots,x_n)=(0,\cdots,0).\end{cases}$$

によって定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_n$ であり, (1) を満たす. 従って, AN_n と Ψ_n は, 1対1対応に対応する.

さらに次のようにψ-直和空間が導入された. $\psi \in \Psi_n$ とおく. また $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をバナッハ空間とする. このとき $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ 上のノルムを

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_\psi = \quad \|(\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_n\|)\|_\psi \qquad (x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n).$$

$$= \begin{cases} (\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|)\psi\left(\frac{\|x_2\|}{\|x_1\|+\cdots+\|x_n\|}, \cdots, \frac{\|x_n\|}{\|x_1\|+\cdots+\|x_n\|}\right) \\ \qquad\qquad \text{if } (x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0), \\ 0 \qquad\qquad \text{if } (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0). \end{cases}$$

とする. このバナッハ空間を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の直和とよび $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ と表す.

Example 2.3 $1 \le p \le \infty$ とする. このとき $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_{\psi_p} = (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_p$.

Example 2.4 $1 \le q < p \le \infty$,$2^{1/p-1/q} < \lambda < 1$ とする. また,$\psi_{p,q,\lambda} = \max\{\psi_p, \lambda\psi_q\} \in \Psi$ とおく. このとき $X \oplus_{\psi_{p,q,\lambda}} Y$ のノルムは

$$\|(x, y)\|_{\psi_{p,q,\lambda}} = \max\{\|(x, y)\|_p, \lambda\|(x, y)\|_q\}$$

と与えられる.

Example 2.5 $1/2 \le \alpha \le 1$ とする.

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}t + 1 & \text{if } 0 \le t \le \alpha, \\ t & \text{if } \alpha \le t \le 1. \end{cases}$$

このとき $\psi_\alpha \in \Psi_2$ であり, $X \oplus_{\psi_\alpha} Y$ のノルムは

$$\|(x, y)\|_{\psi_\alpha} = \max\{\|x\| + (2 - \frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

と与えられる.

Theorem 2.6 **([4, 12])** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をバナッハ空間とし, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき,

(i) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が狭義凸であることと $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が狭義凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.

(ii)$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が一様凸であることと $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が一様凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.

各 $\psi \in \Psi_n$ に対して, $\mathbb{R}^{n-1}$ 上の関数 $\widetilde{\psi}$ を

$$\widetilde{\psi}(t) = \sup \left\{ \psi(s) + \langle a, t-s \rangle : \begin{array}{l} s = (s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n, \\ a \in \partial\psi(s), \\ \psi(s) + \langle a, p_j - s \rangle \geq 0 \text{ for } j \in I_n \end{array} \right\}$$

とおく. ここで, $p_0 = (0,0,0,\cdots,0)$, $p_j = (0,0,\cdots,0,\overset{(j)}{1},0,0,\cdots,0) \in \Delta_n$, $j = 1,2,\ldots,n-1$, $I_n = \{0,1,\cdots,n-1\}$.

Proposition 2.7 $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき,

(i) 任意の $t \in \Delta_n$ に対して, $\widetilde{\psi}(t) = \psi(t)$

(ii) $\widetilde{\psi}$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ 上の凸関数である.

Remark 2.8 $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき,

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{if } t < 0, \\ \psi(t), & \text{if } 0 \leq t \leq 1, \\ t, & \text{if } t > 1. \end{cases}$$

Theorem 2.9 **([7])** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をバナッハ空間とし, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が *smooth* であることと $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が *smooth* かつ $\widetilde{\psi}$ が Δ_n 上で微分可能であることは同値.

3 U-convexity

Dhompongsa-Kaewkhao-Saejung [3] は $(X \oplus Y)_\psi$ の U-convexity を特徴付けたが, 本章では n 個の ψ-直和についての U-convexity を特徴付けを述べる.

まず $(X \oplus Y)_\psi$ の U-convexity について考察する. これを考察するためには, 次の Bonsall-Duncan [2] による $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ の norming functional についての結果が必要となる. $\psi \in \Psi_2$ に対して, $x(t)$ を

$$x(t) = \frac{1}{\psi(t)}(1-t, t).$$

と定める.

Lemma 3.1 (Bonsall-Duncan [2]) $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき各 $t \in [0,1]$ に対して

$$D\big(\mathbb{C}^2, x(t)\big) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ c(1+a) \end{pmatrix} : a \in \partial\widetilde{\psi}(0), |c| = 1 \right\}, & \textit{if } t = 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} \psi(t) - at \\ \psi(t) + a(1-t) \end{pmatrix} : a \in \partial\widetilde{\psi}(t) \right\}, & \textit{if } 0 < t < 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} c(1-a) \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \partial\widetilde{\psi}(1), |c| = 1 \right\}, & \textit{if } t = 1 \end{cases}$$

である.

Theorem 3.2 (Dhompongsa-Kaewkhao-Saejung [3]) X, Y をバナッハ空間とする. また, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき次は同値.

(i) $(X \oplus Y)_\psi$ は *U-space (resp. u-space).*

(ii) X, Y は *U-space (resp. u-space)* かつ ψ は *u-function.* 即ち, 任意の $s \neq t (0 < s < t < 1)$ なる $s, t \in [0,1]$ に対して ψ が $[s,t]$ 上 *affine* ならば, ψ は s, t で微分可能である.

我々はこの結果を $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ や $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ 上において考察することを目的とする.

Lemma 3.3 (Mitani-Saito-Suzuki [8]) $\psi \in \Psi_n$ とする．このとき任意の

$$t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n$$

に対して，$x(t)$ を

$$x(t) = \frac{1}{\psi(t)}(1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_{n-1}, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

と定める．このとき

$$D(\mathbb{C}^n, x(t)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_0}\big(\psi(t) + \langle a, p_0 - t\rangle\big) \\ e^{i\theta_1}\big(\psi(t) + \langle a, p_1 - t\rangle\big) \\ e^{i\theta_2}\big(\psi(t) + \langle a, p_2 - t\rangle\big) \\ \vdots \\ e^{i\theta_{n-1}}\big(\psi(t) + \langle a, p_{n-1} - t\rangle\big) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a \in \partial\varphi(t), \\ \theta_j \in [0, 2\pi) \\ \quad \textit{for } j \in I_n \textit{ with } t_j = 0, \\ \theta_j = 0 \\ \quad \textit{for } j \in I_n \textit{ with } t_j > 0 \end{array} \right\}$$

上の Lemma を使って，次の結果を得ることができる．

Definition 3.4 関数 $\psi \in \Psi_n$ が *u-function* であるとは，任意の $s \neq t$ なる $s, t \in \Delta_n$ に対して，ψ が $[s, t]$ 上 *affine* ならば，$\partial\widetilde{\psi}(s) = \partial\widetilde{\psi}(t)$ であるときをいう．

Theorem 3.5 (Mitani [6]) $\psi \in \Psi_n$ とする．このとき次は同値．

(i) $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ は *U-space (resp. u-space)*.

(ii) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は *U-space (resp. u-space)* かつ ψ は *u-function*.

またこの結果と同様にして，n 個の直和空間 $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ に対しても次の Lemma を使って特徴づけすることができる．

Lemma 3.6 (Mitani-Oshiro-Saito [7]) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をバナッハ空間とする．また，$\psi \in \Psi_n$ とする．また $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$, $\|x\|_\psi = 1$ と

する. このとき,

$$D\big((X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi, x\big) = \\ = \left\{ \big(a_1 f_1, \cdots, a_n f_n\big) : \begin{array}{l} (a_1, \cdots, a_n) \in D\big(\mathbb{C}^n, (\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|)\big) \\ f_i \in S_{X_i^*} \ \mathit{for}\ i\ \mathit{with}\ x_i = 0 \\ f_i \in D(X_i, x_i)\ \mathit{for}\ i\ \mathit{with}\ x_i \neq 0. \end{array} \right\}.$$

Theorem 3.7 (Mitani [6]) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をバナッハ空間とする. また, $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき次は同値.

(i) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ は *U-space (resp. u-space).*

(ii) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は *U-space (resp. u-space)* かつ ψ は *u-function.*

参考文献

[1] Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.

[3] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao and S. Saejung, *Uniform smoothness and U-convexity of ψ-direct sums,* J. Nonlinear Convex Anal., 6(2005), no. 2, 327-338.

[4] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., 75(2003), 413-422.

[5] K. S. Lau, *Best approximation by closed sets in Banach spaces,* J. Approx. Theory.,

[6] K. Mitani, U-convexity of ψ-direct sums of Banach spaces, preprint.

[7] K. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces, to appear in Math. Inequal. Appl.

[8] K. Mitani, K. -S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on* $\mathbb{C}^n$., J. Convex. Anal., 10, (2003), 89-107.

[9] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform convexity of* ψ*-direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 277, (2003), no.1, 1-11.

[10] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normes on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 244(2000), 515-532.

[11] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., 252(2000), 879–905.

[12] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute normes on* $\mathbb{C}^2$ *and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., 7(2002), 179-186.