

バナッハ空間における非拡大写像の不動点性の最近の結果について

千葉大院人社研 田村 高幸 (Takayuki TAMURA)

1 Introduction

バナッハ空間 X における非拡大写像 T の不動点性の研究はバナッハ空間の幾何学的性質と深く結びついている。ヒルベルト空間をはじめ、一様凸空間、ノルムが一様フレッシュ微分可能な空間などはいずれも回帰的であり、非拡大写像についての不動点性を持つことが知られている。これらの空間は正規構造をもつバナッハ空間である。正規構造を持つバナッハ空間の(弱)不動点性については、[8]において次の定理が証明された。

Theorem K([8]) C を(回帰的)バナッハ空間 X の非空弱コンパクト(有界閉)凸部分集合、 T を C からそれ自身への非拡大写像とする。さらに C が正規構造を持つ、すなわち任意の有界閉凸部分集合 K について、ある $x_0 \in K$ が存在して、 $\sup_{y \in K} \|x_0 - y\| < \sup_{x, y \in K} \|x - y\| = \text{diam}(K)$ が成り立つとする。すると、 T の不動点が存在する。すなわち、 X が正規構造を持つならば、 X は非拡大写像に対して弱不動点性(不動点性)をもつ。

しかし、uniformly nonsquare 空間は回帰的であるが、正規構造を持つかがわからなかった。その結果、不動点性を持つかどうかということが長い間わかっていなかった。非拡大写像の不動点性は回帰性のもとでは、弱不動点性と同値になるので、正規構造を持たないバナッハ空間においてどのような条件を持ったら、弱不動点性を持つかが研究の対象となった。その際に、Theorem K の証明の際に重要な働きをしている、 T -不変な極小集合の性質についての研究が中心的に、正規構造もたないバナッハ空間における弱不動点性の研究がなされてきた。Pruss[13]、Kutzarova と Prus, と Sims[9]、Garia-Falset[4, 5] と研究が進む中で Dominguez-Benavides[3] によって、定数 $R(a, X)$ ($a \in (0, \infty)$) の nontrivialness から弱不動点性の証明がなされ、Garcia-Falset, Llorens-Fuster, Mazcunan-Navarro

は [6] において、この結果を利用して、uniformly nonsquare 空間の不動点性の問題を肯定的に解決された。

今回はこの結果の紹介をできるだけわかりやすく行うことが目的である。以下、Preliminary から順を追って、説明していくことにする。

2 Preliminary

以下、バナッハ空間を X とする。 C を X の部分集合とする。そこで、 C から C への写像 T が非拡大とは、任意の $x, y \in C$ に対して、 $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成立することである。また、 X が (弱) 不動点性をもつとは、任意の非空有界閉凸集合 (非空弱コンパクト凸集合) C に対して、 C から C への非拡大写像 T が不動点を持つことである。そこで、回帰的ならば弱不動点性から不動点性が導かれるので、弱不動点性に着目する。非空弱コンパクト集合 C および C から C への非拡大写像 T を固定する。 C の T -不変な非空閉凸部分集合の族 $\mathcal{C}_T = \{K \subset C : \text{非空閉凸}, TK \subset K\}$ を考える。 C の弱コンパクト性と Zorn の補題から、 \mathcal{C}_T に包含関係の意味で極小元 $K_0 \in \mathcal{C}_T$ が存在することがわかる。 $K_1 \subset K_0$ かつ $K_1 \in \mathcal{C}_T$ ならば $K_1 = K_0$ である。このことから、次の定理がわかる。

Theorem 1 $(x_n) \subset K_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$

Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \text{diam}(K_0)$ for all $x \in K_0.$

この定理はまず、

$$c(K_0) = \{z \in K_0 : \sup_{y \in K} \|z - y\| = \inf_{x \in K_0} \sup_{y \in K} \|x - y\| = r_c\}$$

として、 $c(K_0) = K_0$ を示す。 $c(K_0)$ が T -不変な非空有界閉凸集合を示せば K_0 の極小性から証明できる。この証明は、以下のようにおこなう。

$f(z) = \sup_{y \in K} \|z - y\|$ は連続凸関数になる。よって、 f は弱下半連続となる。 K_0 が弱コンパクトなので、 $c(K_0)$ は非空有界閉凸であることは明らかである。つぎに、 T -不変を示す。 $z \in c(K_0)$ とする。そこで、 $L_{Tz} = \{w \in K_0 : \|Tz - w\| \leq r_c\}$ とすると、ノルムが連続凸関数であり、 $\|Tz - Tu\| \leq \|z - u\| \leq r_c$ より $u \in K_0$ ならば $Tu \in L_{Tz}$ のなので、 L_{Tz} は T -不変で非空有界閉凸となる。よって、 K_0 の極小性から $L_{Tz} = K_0$ 、すなわち、 $\sup_{y \in K_0} \|Tz - y\| = r_c$ となり、 $c(K_0)$ の T -不変性が証明できた。

よって、 $c(K_0) = K_0$ となり、すべての $x \in K_0$ に対して、 $\sup_{y \in K} \|x - y\| = r_c$ となることがわかり、上限の性質から、 $\sup_{x, y \in K} \|x - y\| = r_c$ となることがわかる。
次に、

$$ac(K_0) = \{z \in K_0 : \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = \inf_{x \in K_0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = r_{ac}\}$$

として、 $ac(K_0) = K_0$ を示す。 $ac(K_0)$ が T -不変な非空有界閉凸集合を示せば K_0 の極小性から定理が証明できる。この証明は、以下のようにおこなう。

$f(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$ は連続凸関数になる。よって、 f は弱下半連続となる。 K_0 が弱コンパクトなので、 $ac(K_0)$ は非空有界閉凸であることは明らかである。つぎに、 T -不変を示す。 $z \in ac(K_0)$ とする。そこで、

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tz\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tz\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq r_{ac}$ より $Tz \in ac(K_0)$ となる。よって、 $ac(K_0) = K_0$ となり、 $\sup_{y \in K_0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = r_{ac}$ となる。

最後に、定理を証明する。

K_0 は弱コンパクトなので、 $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ と $x_1 \in K_0$ が存在して、 x_{n_i} が x_1 に弱収束する。すると、ノルムの弱下半連続性から、

$$r_{ac} = \sup_{y \in K_0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \geq \sup_{y \in K_0} \limsup_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - y\| \geq \sup_{y \in K_0} \|x_1 - y\| = \sup_{x, y \in K_0} \|x - y\|$$

となるので、

$$r_{ac} = \sup_{x, y \in K_0} \|x - y\|$$

となり、定理は示された。

また $\ell_\infty(K_0) = \{(x_n) \subset K_0 : \text{有界}\}$, $c_0(K_0) = \{(x_n) \subset K_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, とする。そこで、 $[K_0] = \ell_\infty / c_0(K_0)$ と定義すると、 $[K_0]$ のノルムは $\|[(x_n)]\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ となる。また、 T は非拡大なので、 $[K_0]$ から $[K_0]$ への非拡大写像 $[T]$ を $[T]([(x_n)]) = [(Tx_n)]$ で定義することができる。なお、任意の非空部分集合 $K \subset K_0$, $x \in K$ に対して、 $x = (x, x, x, \dots)$ ととする。

Theorem 2 ($[(w_n)]^m \subset [K_0] : \|[(w_n)]^m - [T]([(w_n)]^m)\| \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$).

Then $\lim_{m \rightarrow \infty} \|[(w_n)]^m - x\| = \text{diam}(K_0)$ for all $x \in K_0$.

証明は以下のとおり。

一般性を失うことなく、 $d = \lim_{m \rightarrow \infty} \|[(w_n)]^m - x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|[(w_n)]^m - x\|$ 、
 $\eta_m = \|[(w_n)]_m - [T][(w_n)]_m\| = \|[(w_n^{(m)})] - [T][(w_n^{(m)})]\| = \|[(w_n^{(m)})] - [(T(w_n^{(m)}))]\| \rightarrow$
 0 とする。 $\{(w_n)^m\}$ の部分列 $\{(w_n)^{m_k}\}$ が存在して、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n^{(m_k)} - x\| \leq d + \frac{1}{k}$
 となる。

また、 $\|w_{n_k}^{m_k} - x\| \leq d + \frac{2}{k} (\exists n_k < n_{k+1})$ とできる。よって、 $\|w_{n_k}^{m_k} - T(w_{n_k}^{m_k})\| \leq$
 $\|[(w_n^{(m_k)})] - [(T(w_n^{(m_k)}))]\| = \eta_{m_k} \rightarrow 0$ となる。 $\{w_{n_k}^{m_k}\}$ は定理 1 の条件を満足する
 ので、

定理 1 より、 $\text{diam}(K_0) = d = \lim_m \|[(w_n)]_m - x\|$ となる。

Theorem 3 $[W] \subset [K_0]$: 非空閉凸、 $[T][W] \subset [W]$.

Then $\sup\{\|(w_n) - x\| : (w_n) \in [W]\} = \text{diam}(K_0)$ for all $x \in K_0$.

証明は以下のとおり。

$[T][W] \subset [W]$ より、 $w_0 \in W$ として、任意の $m \in \{bfN\}$ に対して、 $[T_m][(w_n)] =$
 $\{[(1/m)w_0 + (1 - (1/m))Tw_n]\}$ で定義すると $[T_n]$ はバナッハの縮小写像となるの
 で、不動点 $[(w_n)]^m$ が存在する。 $[T_m]$ の定義から、 $\|(w_n)^m - (Tw_n^m)\| = (1/m)\|w_0 -$
 $(Tw_n^m)\| \rightarrow 0$ となる。よって、 $\{(w_n)^m\}$ は定理 2 の仮定を満足するので、定理 2 よ
 り、 $\sup\{\|(w_n) - x\| : (w_n) \in [W]\} = \text{diam}(K_0)$ for all $x \in K_0$ を得る。

次の $R(a, X)$ は、非拡大写像の弱不動点性を示すために Dominguez-Benavides[3]
 によって導入された。

$$R(a, X) = \sup \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \right\},$$

where the supremum is taken over all $a > 0$, x with $\|x\| \leq a$ and $\{x_n\}$ of the
 unit ball of X such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = 0$ for every $x^* \in X^*$, its double limit of
 $\{\|x_n - x_m\|\}_{n,m}$ exists, $\lim_m \lim_n \|x_n - x_m\| \leq 1$.

$R(a, X)$ は次の性質を持つ。

Lemma 1 The following are equivalent.

(i) $R(a, X) = 1 + a$ for all $a > 0$;

- (ii) $R(a, X) = 1 + a$ for some $a > 0$;
- (iii) $R(1, X) = 2$.

一方、Garicia-Falset, Llorens-Fuster and Marzcunan-Navarro[6] は次の定数を導入した。 $a > 0$ に対して、

$$RW(a, X) = \sup \left\{ \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \right) \wedge \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \right) \right\}$$

where the supremum is taken over all weakly null sequences $\{x_n\}$ in B_X and all x in a B_X

3 Results

Theorem 4 $R(1, X) < 2$ ならば X は弱不動点性を持つ。

証明は以下のとおり。

T が不動点を持たないとする。一般性を失うことなく、 $0 \in K_0$ 、 $\text{diam}(K_0) = 1$ かつ

$(x_n) \subset K_0$ が存在して $x_n - Tx_n \rightarrow 0$ かつ (x_n) が 0 に弱収束すると仮定できる。

$[W] = \{(z_n) \in [K_0] : \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{2}, \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_m - z_n\| \leq \frac{1}{2}\}$ と、 $[W]$ を定義すると、 $[W]$ は非空閉凸で $[T][W] \subset [W]$ である。

Theorem 3 より、 $\sup\{\|[(z_n)]\| : [(z_n)] \in [W]\} = 1$ である。そこで、 $[(z_n)] \in [W]$ とする。 (z_n) の部分列 (z_{n_i}) が存在して、 $\|[(z_n)]\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|z_{n_i}\|$ となる。一般性を失うことなく、 (z_{n_i}) はある $y \in K_0$ に弱収束するとしてよい。ノルムの弱下半連続性と $[W]$ の定義から、 $\|y\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{2}$ となる。一方、

$$\begin{aligned} & \liminf_{i \rightarrow \infty} \|z_{n_i} - y\| \\ & \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|z_{n_i} - z_{n_k}\| \\ & \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|z_{n_i} - z_m\| \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \|z_n - z_m\| \\ & \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
 \|[(z_n)]\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|z_{n_i}\| \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|(z_{n_i} - y) + y\| \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{i \rightarrow \infty} \|2(z_{n_i} - y) + 2y\| \\
 &\leq \frac{R(1, X)}{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $1 = \sup\{\|[(z_n)]\| : [(z_n)] \in W\} \leq \frac{R(1, X)}{2} < 1$ を得る。これは矛盾である。

$R(1, X)$ の定義において、上限をとる範囲の弱零列 $\{x_n\}$ が $\lim_m \lim_n \|x_n - x_m\| \leq 1$ を満足することとハーネンバナッハの定理から次の本質的な補題を得る。

Lemma 1. X をバナッハ空間とする。そのとき、 B_X の点列 $\{z^{(k)}\}$ と B_X の弱零二重点列 $\{z_n^{(k)}\}$ が存在して、

$$R(1, X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n^{(k)} \pm z^{(k)}\|$$

が成立する。

この結果と $RW(1, X)$ の定義から、次の定理を得る。

Theorem 5. $R(1, X) \leq RW(1, X)$.

Theorem 4 と Theorem 5 より、次の定理を得る。

Theorem 6. X を uniformly nonsquare 空間とする。そのとき、 $R(1, X) < 2$ となる。すなわち、 X は不動点性をもつ。

References

- [1] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and their Geometry, 2nd ed., North-Holland, 1985.

- [2] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach spaces*, Springer, 1984.
- [3] T. Dominguez Benavides, Stability of the fixed point property for nonexpansive mappings, *Houston J. Math.* **22** (1996), 835–849
- [4] J. Garcia-Falset, Stability and fixed points for nonexpansive mappings, *Houston J. Math.* **20** (1994), 495–506
- [5] J. Garcia-Falset, The fixed point property in Banach spaces with the NUS-property, *J. Math. Anal. Appl.* **215** (1997), 532–542
- [6] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster and Eva M. Mazcunan-Navarro, Uniformly non-square Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings, *J. Func. Anal.*, **233**(2006), 494-514.
- [7] R. C. James, Uniformly non-square Banach spaces, *Ann. of Math.* **80** (1964), 542-550.
- [8] W. A. Kirk, A fixed point theorem for nonexpansive mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly*, **72**(1965), 1004-1006.
- [9] D. Kutzarova, S. Prus, B. Sims, Remarks on orthogonal convexity of Banach spaces, *Houston J. Math.* **19** (1993), 603-614.
- [10] E. Llorens Fuster, Moduli and constants, preprint.
- [11] E. Llorens Fuster, Some moduli and constants related to metric fixed point theory, In: *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, eds. W. A. Kirk and B. Sims, Kluwer, 2001, pp. 133-175.
- [12] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.
- [13] S. Prus, Nearly uniformly smooth Banach spaces, *Boll. U. M. I.*, **(7)3-B** (1989), 507-521