数理解析研究所講究録
1520巻 2006年 44-47

ある種の関数空間の等距離写像の構造

山形大学名誉教授　岡安 隆照 (Takateru Okayasu)
Professor Emeritus, Yamagata University

1. 関数環の間の等距離線形写像

空でないコンパクトハウスドルフ空間 X 上の複素数値連続関数の全体が作る Banach 空間 $C(X)$ の部分空間 M が恒等関数 1 を含み X の点を分離するとき, M は X 上の関数空間であるという. 関数空間から連続関数の空間の中への等距離線形写像の構造は, 次のとおり (Novinger [7], Cf. Holsztyński [4]):

定理 1. X, Y を空でないコンパクトハウスドルフ空間, M を X 上の関数空間, $\phi : M \longrightarrow C(Y)$ を等距離線形写像, $N = \phi(M)$ とすると, 上への連続写像 $\eta : \bar{\Pi}_N \longrightarrow \Sigma_M$ が一意に存在して:

$$\phi(f)(y) = \phi(1)(y)f(\eta(y)), \quad \forall\, y \in \bar{\Pi}_N, \quad \forall\, f \in M$$

が成り立つ. このとき, $\forall\, y \in \bar{\Pi}_N$ に対して $|\phi(1)(y)| = 1$ が成り立つ. また, η は Π_N を Π_M の上に写す.

ここに Σ_M, Π_M はそれぞれ M の Shilov 境界, Choquet 境界を表す.

Banach 環 $C(X)$ の閉部分環 A が X 上の関数環であるとは, それが同時に関数空間であるときにいう. 関数環の例にはこと欠かない. n 次元複素数空間 $\boldsymbol{C}^n$ の空でないコンパクト部分集合 K 上の多項式の一様極限の全体 $P(K)$, 有理関数の一様極限の全体 $R(K)$, 解析関数の一様極限の全体 $H(K)$ などが重要である. K の内部 K° で解析的な K 上の連続関数の全体 $A(K)$ も同様である. $\boldsymbol{C}^n$ の空でない開集合 G 上の H^∞ 空間 $H^\infty(G)$ は点毎に定義された積を積として Banach 環をなすが, それをその Gelfand 表現と同一視することとき $H^\infty(G)$ の Gelfand 空間上の関数環とみなすことができる.

関数環の間の等距離線形写像の構造は次のとおり (長沢 [6], Hoffman [3]):

定理 2. A, B をそれぞれ空でないコンパクトハウスドルフ空間 X, Y 上の関数環, $\phi : A \longrightarrow B$ を上への等長線形写像とすると, 上への代数同型 $\psi : A \longrightarrow B$ が一意に存在して

$$\phi(f) = \phi(1)\psi(f), \quad \forall\, f \in A$$

が成り立つ. このとき, $\forall y \in \Sigma_B$ に対して $|\phi(1)(y)| = 1$ が成り立ち, $\phi(1)$ は B で可逆である.

よって関数環の間の等距離線形写像の研究は, 関数環の間の代数同型の研究に帰着される. この稿では我々の興味の対象を, 関数環の間の等距離線形写像に限るとしよう.

2. 幾つかの知られている結果

解析関数を要素とする幾つかの関数環の自己代数同型は (したがって, 等距離線形写像も) 完全に記述されている. たとえばよく知られているように, $A(K)$ の代数同型 ψ は K° 上 (両側から) 解析的な K の位相同型 η によって

$$\psi(f) = f \circ \eta \quad \text{for } \forall f \in A(K)$$

と書かれる. 特に, K が $\boldsymbol{C}$ 上の単位閉円板ならば η はメビウス変換になる. また, $\boldsymbol{C}^n$ の閉単位球を B によって表すとき, $A(B)$ の代数同型も B° 上 (両側から) 解析的な B の位相同型によって同様に書かれる ([8]).

$\boldsymbol{C}$ の領域 G が極大であるとは, G の境界上の任意の点に対してその点を超えて解析的に拡大できないような $f \in H^\infty(G)$ が存在するときにいう (任意の領域は極大な極大領域に含まれることに注意せよ). Chevalley-角谷の定理 ([5], Rudin [9]) によれば, G_1, G_2 が $\boldsymbol{C}$ の極大領域ならば, $H^\infty(G_1)$ から $H^\infty(G_2)$ の上への代数同型は G_2 から G_1 の上への等角写像によって同様に書かれる.

解析関数を要素とする関数環の間の等距離線形写像を完全に記述したいという変わらぬ願いがあり, 継続的に努力がなされている. しかし, 今のところ, 相対的に, まことに不十分な状況に止まっていると言わざるを得ない. いろいろな困難がある. たとえばコロナ問題が深くかかわっていると思われるが, それは, $H^\infty(D^\circ)$ については Carleson [2] によって否定的に解決されたにもかかわらず, 他の多くの環については未だ未解決のままである.

3. $H(K_1)$ と $H(K_2)$ の間の代数同型と等距離線形写像

次の定理が示される:

定理 3. K_1, K_2 を $\boldsymbol{C}$ の空でないコンパクト部分集合, $\psi : H(K_1) \longrightarrow H(K_2)$ を上への代数同型とすると, 上への 1 対 1 写像 $\eta : K_2 \longrightarrow K_1$ が一意に存在して

$$\psi(f) = f \circ \eta, \quad \forall f \in H(K_1)$$

が成り立つ. このとき, $\eta \in H(K_2)$ かつ $\eta^{-1} \in H(K_1)$ である.

したがってまた, 次の系が得られる:

系. K_1, K_2 を前定理のとおりとするとき, 上への等長線形写像 $\phi : H(K_1) \longrightarrow H(K_2)$ は次の形をもつ:

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \eta), \quad \forall f \in H(K_1).$$

ここに $\eta : K_2 \longrightarrow K_1$ は $H(K_2)$ に属する上への 1 対 1 写像で, η^{-1} も $H(K_1)$ に属し, ϕ によって一意に定まる.

これらの (実質的には定理 3 の) 結果が既に知られているか否か, 寡聞にして不明である. しかしその推論には (自ら述べるのも不遜だが) 示唆するものがあるように思われる. それを紹介したい.

先ず, もしも $K \subset G \subset \boldsymbol{C}$ で, K がコンパクトで G が開集合ならば, G は K の補集合の, 有限個を除く全ての有界成分を含んでしまうことに注意する. この事実は日合文雄氏 (東北大情報) によって指摘され, 定理 3 を著しくきれいにした.

定理 3 の証明. z を K_1 上の座標関数とし, $\eta = \psi(z)$ とおく. これは K_2 を K_1 上に写す. 実際, $\zeta_0 \in K_2, \eta(\zeta_0) \notin K_1$ とすると $z - \eta(\zeta_0)$ は $H(K_1)$ で可逆になり, $\eta(\zeta_0) \notin \sigma(z) = K_1$ である. よって $\eta(K_2) \subset K_1$ が得られる. よって対称性により $\eta(K_2) = K_1$ が得られる.

さて, $f \in H(K_1)$, かつ $\zeta_0 \in K_2$ とする. 更に, f は K_1 を含む開集合 U で解析的, Γ は U の中にあって K_1 を囲む長さをもつ閉曲線とする. このとき, 自明な等式 $f = f \circ z = f(z)$ に注意すると, 次の計算ができる:

$$\begin{aligned}
\psi(f)(\zeta_0) &= \psi(f(z))(\zeta_0) \\
&= \psi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta\right)(\zeta_0) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta - \eta)^{-1} d\zeta\right)(\zeta_0) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta - \eta(\zeta_0))^{-1} d\zeta \\
&= f(\eta(\zeta_0)) \\
&= (f \circ \eta)(\zeta_0).
\end{aligned}$$

よって,

$$\psi(f) = f \circ \eta$$

である. ψ は等距離だから, この等式は任意の $f \in H(K_1)$ に対して成り立つ.

次に, $\zeta_1, \zeta_2 \in K_2$, かつ, $\eta(\zeta_1) = \eta(\zeta_2)$ とすると, 任意の $f \in H(K_1)$ に対して,

$$\psi(f)(\zeta_1) = f(\eta(\zeta_1)) = f(\eta(\zeta_2)) = \psi(f)(\zeta_2).$$

f が $H(K_1)$ を走るとき $\psi(f)$ は $H(K_2)$ を走る一方, $H(K_2)$ は K_2 の点を分離する. よって $\zeta_1 = \zeta_2$ である. つまり η は 1 対 1 である. η が一意であることは明か. また対称性によって w を K_2 の座標関数とするとき, $\eta^{-1} = \psi^{-1}(w)$ が成り立つこともわかる. □

4. 今後の展望

今述べた推論は $H(K_1)$, $H(K_2)$ をそれぞれ $P(\hat{K_1})$, $P(\hat{K_2})$ で, また, $R(K_1)$, $R(K_2)$ で置き換えてもそのまま通用する (もっとも, 後者からは新たな結果は得られない. というのも Runge の定理によれば $R(K)$ と $H(K)$ は同じものである). K_1 を $\boldsymbol{C}^m$ の, K_2 を $\boldsymbol{C}^n$ の空でないテンソル型の (つまり多重円板のような) コンパクト集合としてもよいことも容易にわかる.

同じ着想にもとづいて $A(K_1)$, $A(K_2)$ の間の等距離線形写像, $H^\infty(G_1)$, $H^\infty(G_2)$ の間の等距離線形写像を完全に記述したいと願っている.

文　献

1. J. Araujo and J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 413-428.

2. L. Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. Math. **76** (1962), 547-559.

3. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall Inc., 1962.

4. W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function*, Studia Math. **26**(1966), 133-136.

5. S. Kakutani, *Rings of analytic functions*, Lectures on Functions of Complex Variable, univ. Michigan Press, Ann Arbor, 1955, 71-83.

6. M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with application to rings of analytic functions*, Kôdai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 182-188.

7. W. P. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math. **53** (1975), 273-276.

8. W. Rudin, *Some theorems on bounded analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 333-342.

9. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\boldsymbol{C}^n$*, Springer-Verlag, New York, 1980.