数理解析研究所講究録
1520巻 2006年 13-19

On the maximal subalgebras of $L^{\infty}(G)$

鶴岡高専・総合科学科　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Department of General Science,
Tsuruoka National College of Technology

1 序

バナッハ空間の理論において, その閉部分空間の極大性の研究は興味深いテーマの一つであり, これまでに様々な設定の下で研究がなされてきた. その代表的なものとして, 関数環におけるハーディ環の極大性の研究がある. 例えば, 単位円 $\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 空間 $L^{\infty}(\mathbb{T})$ の弱-* 閉部分環として与えられるハーディ環 $H^{\infty}(\mathbb{T})$ はいつも弱-* 閉部分環として極大であるという結果は良く知られていて, 同様の結論が $L^{\infty}(\mathbb{R})$ のハーディ環 $H^{\infty}(\mathbb{R})$ に対しても成立する. しかし, より一般の設定ではハーディ環の極大性は保障されない (cf. 例 3.8) 可換なコンパクト群 G 上の Lebesgue 空間 $L^{\infty}(G)$ は可換な von Neumann 環として良く知られていて, その非可換な拡張として接合積がある. 実際に接合積は von Neumann 環 N と G の双対群 $\hat{G}$ の N の上への作用 $\alpha=\{\alpha_{\hat{g}}\}_{\hat{g}\in\hat{G}}$ によって与えられるが, 特に任意の $\hat{g}\in\hat{G}$ に対して $\alpha_{\hat{g}}$ が N のユニタリ作用素 $u_{\hat{g}}$ によって $\alpha_{\hat{g}}(x)=u_{\hat{g}}xu_{\hat{g}}^{*}$ $(\forall x\in N)$ と与えられるとき α は内部的であるといい, このとき接合積は N と $L^{\infty}(G)$ のテンソル積 $N\otimes L^{\infty}(G)$ と同型であることを注意しておく. (cf. [3]) 近年我々は, 接合積の部分環の構造解析を, その部分環に対応する半群の性質に結びつけて考察する手法を用いて行ってきた. (cf. [4–6]) ここではハーディ環の概念を含むより一般的なものとしてスペクトル部分環を考えて, その極大性を対応する半群の性質に着目することにより詳細に調べた結果を, 関数環の設定で説明することを目的とする.

2 背景

まず, 以後の話題の中心である極大性の定義を与える.

定義 2.1 $\mathfrak{A}$ を *von Neumann* 環 M の弱-* 閉部分環としたとき, $\mathfrak{A}$ を真に含む M の弱-* 閉部分環は M だけであるとき **$\mathfrak{A}$ を M の極大な弱-* 閉部分環**という.

簡単のために $G=\mathbb{T}$ として考えると, その双対群 $\hat{G}$ は $\mathbb{Z}$ である. 一般に群 G の部分集合 Γ が条件 $\Gamma+\Gamma\subseteq\Gamma$ をみたすとき, Γ は G の半群であるというが, $\mathbb{Z}_{+}=\{0,1,2,\cdots\}$ と

すれば明らかに $\mathbb{Z}_+ + \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{Z}_+$ であるので $\mathbb{Z}_+$ は $\mathbb{Z}$ の半群である. $L^\infty(\mathbb{T})$ の元 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ とかき, その台を $\mathrm{supp}\hat{f}$ とかく. このときハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T})$ は良く知られているように, フーリエ変換の台が $\mathbb{Z}_+$ に含まれる $L^\infty(\mathbb{T})$ の元全体である. すなわち

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}) \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{Z}_+ \right\}$$

となる. このハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T})$ は極大な弱-$*$ 閉部分環として良く知られているが, その極大性を半群の性質と結びつけるために $\mathbb{Z}$ の任意の半群 Γ に対して, $L^\infty(\mathbb{T})$ のスペクトル部分環 $M(\Gamma)$ を

$$M(\Gamma) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}) \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \Gamma \right\}$$

により与える. このとき $H^\infty(\mathbb{T}) = M(\mathbb{Z}_+)$ であることを注意しておく. $\mathbb{Z}$ の半群において, 以下の構造定理がある.

定理 2.2 ([8, 定理 3.4.5]) $\mathbb{Z}$ の自明でない半群は次のいずれか一つに同型である.

(i) 正の整数全体からなる半群 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

(ii) 正の整数全体に 0 を付け加えた半群 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

(iii) 整数全体からなる半群 $\mathbb{Z}$

このことより直ちに $\mathbb{Z}_+$ は $\{0\}$ を含む $\mathbb{Z}$ の極大な半群であることがわかる. よって $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱-$*$ 閉部分環 $M(\Gamma)$ の極大性と $\mathbb{T}$ の双対群 $\mathbb{Z}$ の $\{0\}$ を含む半群の極大性は一致する. 実際に, $M(\Gamma)$ が $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱-$*$ 閉部分環として極大であることと Γ が $\mathbb{Z}$ の半群として極大であることは同値である. (cf. [4]) このようにスペクトル部分環の極大性とそれを与える半群の極大性には深い結びつきがあり一般の場合にも同様の結果が期待されたが, 実際には $G = \mathbb{T}^2$, $\hat{G} = \mathbb{Z}^2$ の場合ですら成立しない (例 3.8) . 我々は [4] で極大な半群であってもそれに対するスペクトル部分環が極大で無い例を取り上げて, その極大性を詳細に調べた. その際, スペクトル部分環の極大性に付随する半群 Γ の性質として, 条件

$$\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\} \tag{2.1}$$

が重要な役割を果たしていることを知った. しかし, それがどのような形で極大性に影響を与えるかを完全に明らかにするには至らなかった. ここでは, 条件 (2.1) とスペクトル部分環の極大性の関係を問題とし, そこに至る過程と条件 (2.1) が果たす役割について解説することを目的とする.

3 半群とスペクトル部分環

この章では, 以後の議論に必要な幾つかの定義と準備を行う. ここでは常に G を可換なコンパクト群としその双対群を $\hat{G}$ で表すことにする.

定義 3.1 $\hat{G}$ の部分集合 Γ が条件 $\Gamma+\Gamma \subseteq \Gamma$ を満たすとき, **Γ を $\hat{G}$ の半群**という

次にスペクトル部分環を定義する. von Neumann 環 $L^\infty(G)$ を M とかき M の元 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ で表わすとき $\hat{f}$ の台 $\{\hat{h} \in \hat{G} : \hat{f}(\hat{h}) \neq 0\}$ を $\mathrm{supp}\hat{f}$ とかく. このとき

定義 3.2 $M = L^\infty(G)$ の任意の元 f に対して $\mathrm{supp}\hat{f}$ を **f のスペクトル**とよび, $\hat{G}$ の任意の部分空間 E に対して M の E に関するスペクトル部分空間 $M(E)$ を

$$M(E) = \left\{ f \in M \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq E \right\}$$

により定義する. 特に E が $\hat{G}$ の半群であるとき $M(E)$ は M の弱 $*$-閉部分環であり, それを **M の半群 E によるスペクトル部分環**とよぶ.

接合積の設定では, その接合積の上への G の作用に関するスペクトルとして定義されるが, 関数環の設定ではそれがフーリエ変換の台と一致していることを注意しておく. 作用素環におけるスペクトル理論の詳細は [1, 2] を参照していただきたい.

まず, スペクトル部分環に関する基本的で重要な性質を述べておく.

補題 3.3 $\hat{G}$ の半群 Γ, Σ に関して以下の条件は同値である.

(i) $M(\Gamma) \subsetneq M(\Sigma)$

(ii) $\Gamma \subsetneq \Sigma$

先ほどの例で取り上げた半群 $\mathbb{Z}_+$ は次の特徴的な半群の性質

$$\mathbb{Z}_+ \cup (-\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ \cap (-\mathbb{Z}_+) = \{0\}$$

を備えている. それは今後の議論にも重要な役割を果たすものであり, この条件を満たす半群の様々な性質が調べられている.

定義 3.4 G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}$ をその双対群とする. このとき $\hat{G}$ の半群 $\hat{G}_+$ が条件

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{\hat{0}\} \tag{3.1}$$

をみたすとき **$\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ の正半群**とよぶ.

実際にこの条件 (3.1) を満たすとき任意の $x, y \in \hat{G}$ に対して関係 $x \geq y$ を $x - y \in \hat{G}_+$ により定義すれば $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ に全順序を引き起こす. 正半群の選び方により様々な種類の順序が存在する. 重要な順序の例としてアルキメデス的順序がある.

定義 3.5 $\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ の正半群とする. $\hat{G}_+$ の 0 でない任意の元 x, y に対してある正整数 n が存在して $nx > y$ となるとき $\hat{G}_+$ が $\hat{G}$ に引き起こす順序を**アルキメデス的順序**といい, このとき **$\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす**という.

明らかに $\mathbb{Z}_+$ は $\mathbb{Z}$ にアルキメデス的順序を引き起こす．また定理2.2より $\mathbb{Z}$ の正半群は $\mathbb{Z}_+$ だけであることも直ぐにわかるので $\mathbb{Z}$ の正半群が引き起こす順序はアルキメデス的順序だけである．しかし $\mathbb{Z}^2$ ではその事情もだいぶ異なるようである．

まず, $\mathbb{Z}^2$ のアルキメデス的順序を引き起こす自明でない例を1つ上げる．

例 3.6 $G = \mathbb{T}^2$, $\hat{G} = \mathbb{Z}^2$, とする．このとき無理数 $\dfrac{\alpha}{\beta}$ に対して半群 $\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+ = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha k + \beta\ell \geqq 0\right\}$$

により与える．このとき $\hat{G}_+$ は条件

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{(0,0)\}$$

を満たし, $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす．

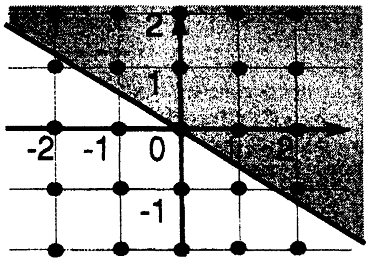

図 1: アルキメデス的順序を引き起こす例

次に, アルキメデス的順序ではない順序を引き起こす $\mathbb{Z}^2$ の正半群の例をあげる．

例 3.7 $G = \mathbb{T}^2$ の双対群 $\hat{G} = \mathbb{Z}^2$ に対して, $\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+ = \left\{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \mid k = 0 \text{ かつ } l \geq 0, \text{ または } k > 0\right\}$$

と定義すれば $\hat{G}_+$ は明らかに

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{(0,0)\}$$

をみたすので正半群である．しかしながら $\hat{G}_+$ の元 $(1,0), (0,1)$ をとれば, 任意の正整数 n に対して

$$n(0,1) - (1,0) = (-1,n) \notin \hat{G}_+$$

である．(図2を参照) すなわち $\hat{G}_+$ はアルキメデス的でない順序を $\hat{G}$ に引き起こす．この $\hat{G}_+$ によって導入される順序は **lexicographic** 順序と呼ばれている．

さてここでハーディ環がいつも極大で無いことを, 今取り上げた半群を利用して説明しよう．任意の正半群 $\hat{G}_+$ に対して, 一般のコンパクト群 G に関するハーディ環 $H^\infty(G)$ が次の形で定義される．

$$H^\infty(G) \stackrel{\text{def}}{=} M(\hat{G}_+) = \left\{f \in M \mid \operatorname{supp}\hat{f} \subseteq \hat{G}_+\right\}$$

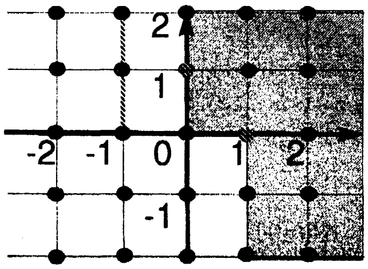

図 2: アルキメデス的順序でない例

例 3.8 例 *3.7* のように $G=\mathbb{T}^2$ の双対群 $\hat{G}=\mathbb{Z}^2$ に対して, $\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+=\left\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2 \mid k=0 \text{ かつ } l\geq 0, \text{ または } k>0\right\}$$

により与えると $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ の正半群である. また $\Gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ とすれば Γ は $\hat{G}$ の半群であり,

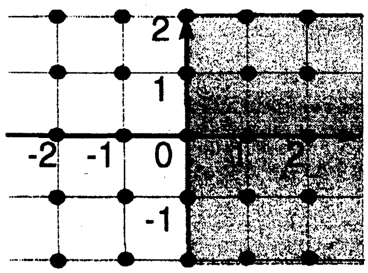

図 3: 極大でない例

明らかに $\hat{G}_+ \subsetneq \Gamma$ である. (図 2,3 参照) このとき補題 *3.3* より $H^\infty(G)=M^\alpha(\hat{G}_+)\subsetneq M^\alpha(\Gamma)$ である. すなわちハーディ環 $H^\infty(G)$ は極大ではない. ここで半群 Γ は正半群であるための条件 *(3.1)* を満たさない. すなわち $\Gamma\cup(-\Gamma)=\mathbb{Z}^2$ は満たすが条件

$$\Gamma\cap(-\Gamma)=\{(0,0)\}$$

を満たさない. また, Γ は半群として極大であるが, 対応するスペクトル部分環 $M(\Gamma)$ は M の弱 $*$-閉部分環として極大でないことを注意しておく.

これらの例からハーディ環 $H^\infty(G)$ の極大性は $\hat{G}$ の正半群の性質と密接な関係にあると推測される. 実際に我々は [4, Theorem 3.7] の応用として次の定理を得る.

定理 3.9 G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}_+$ をその双対群の正半群とする. このときハーディ環 $H^\infty(G)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であることと $\hat{G}_+$ が $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こすことは同値である.

この定理からハーディ環の極大性はその正半群の性質を利用して完全な形で特徴付けられた．例 3.8 で論じたように，ハーディ環を真に含むスペクトル部分環が存在することは分かったが，ではスペクトル部分環の極大性も，その正半群の性質を利用して特長付けることが可能であろうか？ 次に我々は，スペクトル部分環の極大性を半群の性質と結びつけて考察する．補題 3.3 より，半群とスペクトル部分環の間には 1 対 1 対応が与えられる．そこでまずはスペクトル部分環の極大性を論ずるために，その鍵となる次の結果を紹介しよう．

定理 3.10 ([7, Theorem 8.1.3]) G を局所コンパクト可換群とし，Σ をその半群とする．このとき次が成り立つ．

(1) Σ が G にアルキメデス的順序を引き起こすなら，Σ は極大な半群である．

(2) Σ が極大な閉半群であるとき，$\Sigma \neq \{0\}$ かつ $\Sigma \cap (-\Sigma) = \{0\}$ を満たすなら，Σ は G にアルキメデス的順序を引き起こす．

この定理から正半群を考えた場合，その極大性とアルキメデス的順序を引き起こすことは同値であり，これが定理 3.9 と対応する．しかしスペクトル部分環の極大性を考える場合，半群は正半群を仮定しないので事情が異なる．だが補題 3.3 より，直ちに次のことが分かる．

補題 3.11 スペクトル部分環 $M(\Gamma)$ が極大であるとき，半群 Γ は極大である．

例 3.8 はスペクトル部分環を与える半群が極大であるにも関わらず，そのスペクトル部分環は極大でない例となっている．何故そのようなことが起きるかは，定理 3.10 より条件 $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$ と関係があることが予想されるが実際に我々は次の結果を得た．

定理 3.12 G をコンパクト可換群とする．このとき，$M = L^\infty(G)$ のスペクトル部分環 $M(\Gamma)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であるならば，$\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$ を満たす．

これより半群 Γ がたとえ極大であっても，条件 $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$ を満たさない場合，対応するスペクトル部分環は極大とはならないことが分かる． また，この定理よりスペクトル部分環の極大性に関して我々は以下の結果を得た．

系 3.13 G をコンパクト可換群とし，Γ を $\hat{G}$ の半群とする．このとき，$M = L^\infty(G)$ のスペクトル部分環 $M(\Gamma)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であることと，Γ が $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こすことは同値である．このとき $\Gamma = \hat{G}_+$ である．すなわち，$L^\infty(G)$ の極大なスペクトル部分環はアルキメデス的順序を引き起こす正半群に対するハーディ環 $H^\infty(G)$ だけである．

参考文献

[1] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras,* Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.

[2] R. I. Loebl and P. S. Muhly, *Analyticity and flows in von Neumann algebras.* J. Funct. Anal. **29** (1978), 214–252.

[3] M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products* (Invariant subspaces and maximality). Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979), 381–409.

[4] T. Ohwada, G. Ji, A. Hasegawa and K-S. Saito, *A note on maximality of analytic crossed products.* J. Math. Anal. Appl. **315** (2006), no. 1, 216–224.

[5] T. Ohwada, *On some subalgebras of von Neumann algebras with analyticity.* J. Funct. Anal. **222** (2005), 274–291.

[6] T. Ohwada, *The correspondence between semigoups and certain subalgebras of a von Neumann algebra.* preprint.

[7] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups.*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12 Interscience Publishers, New York-London (1990).

[8] 田村孝行, 半群論. 共立出版 (2001).