数理解析研究所講究録
1521 巻 2006 年 196-200

最大円分体のイデアル類群への円分体のガロア群の作用について 1)

京都工芸繊維大学　朝田　衞 (Mamoru Asada)
Kyoto Institute of Technology

§1　設定　k_0 を有限次代数体とし、k_0 およびその拡大体はすべて複素数体 $\mathbf{C}$ の中で考えます。

素数 p を一つ固定し、k_0 に 1 の p べき乗根をすべて添加して得られる無限次代数体について、その最大不分岐アーベル拡大体のガロア群やイデアル類群は、岩沢理論において研究されています。

では、1 の p べき乗根だけではなく 1 のべき根をすべて添加した体について、同様のことを考えると、どうなっているか、という問題が自然に生じます。すなわち、k_0 に 1 のべき根をすべて添加した体を k_∞ とし、k_∞ の最大不分岐アーベル拡大体を L, k_∞ のイデアル類群を C_∞ とするときの、ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ および C_∞ の構造を調べる問題です。

profinite abel 群としては、$\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ は $\hat{\mathbf{Z}}$ の可算無限個の直積と同型であること（Uchida[8]）、discrete abel 群としては、C_∞ は $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ の可算無限個の直和と同型であること（Brumer[3]）が知られています。($\mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ はそれぞれ有理数、整数の加法群、$\hat{\mathbf{Z}}$ は加法群 $\mathbf{Z}$ の profinite completion.)（関連する研究 Horie[4], Kurihara[7] も参照下さい。）

一方、円分体のガロア群 $\mathrm{Gal}(k_\infty/k_0)$ が $\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ および C_∞ に自然に作用しますが、その作用も込めた構造については、あまり調べられていないようです。

いま、k_0 に 1 の 4 乗根と 1 の l 乗根（l は奇素数）をすべて添加した（無限次）代数体を k_1 として、$\mathrm{Gal}(k_\infty/k_0)$ の部分群 $G = \mathrm{Gal}(k_\infty/k_1)$ を考えます。（G は $\hat{\mathbf{Z}}$ と同型です。）

今回の報告内容を一言で言うと、$\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ や C_∞ の、部分群 G の作用も込めた構造は、（いくつかの仮定の下で）決定できる、となります。以下、正確に述べます。

§2　主結果　まずガロア群 $\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ についてです。環 $\hat{\mathbf{Z}}$ 上の G の完備群環 $\hat{\mathbf{Z}}[[G]]$ は

$$\hat{\mathbf{Z}}[[G]] = \varprojlim \mathbf{Z}/(m)[G/U] \quad (m \text{ は整数を動き、} U \text{ は } G \text{ の開部分群を動く})$$

によって定義される profinite G-加群です。G の作用により、profinite abel 群 $\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ は自然に $\hat{\mathbf{Z}}[[G]]$ 上の加群となりますが、この構造については、次の結果が得られます。

定理 1（[2]） $\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ は $\hat{\mathbf{Z}}[[G]]$-加群として、$\hat{\mathbf{Z}}[[G]]$ の可算無限個の直積 $\prod_{N=1}^{\infty} \hat{\mathbf{Z}}[[G]]$ と同型となる。

次に k_∞ のイデアル類群 C_∞ についてです。まず C_∞ の定義は

$$C_\infty = \varinjlim C_F .$$

ここで、F は k_∞ に含まれる有限次代数体を動き、C_F は F のイデアル類群を表します。C_∞ は (discrete) torsion abel 群ですから、C_∞ の p-primary part (p : 素数）を $C_\infty(p)$ と表すと、C_∞ は $C_\infty(p)$ の直和に分解します；

$$C_\infty = \bigoplus_p C_\infty(p) .$$

前述の Brumer の結果は、$C_\infty(p)$ が $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ の可算無限個の直和と同型である；

$$C_\infty(p) \simeq \bigoplus_{N=1}^{\infty} \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$$

と言っても同じことです。($\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Z}_p$ はそれぞれ p 進数、p 進整数の加法群。)

以下では、k_0 は総実と仮定し、p は奇素数とします。k_∞ の最大実部分体を k_∞^+ とすると、複素共役 ρ （$\mathrm{Gal}(k_\infty/k_\infty^+)$ の生成元）は $C_\infty(p)$ に作用しますから、

$$C_\infty(p)^\pm = \{c \in C_\infty(p) \mid c^\rho = \pm c\}$$

とおくと、

$$C_\infty(p) = C_\infty(p)^- \oplus C_\infty(p)^+$$

が成り立ちます。(実は、$C_\infty(p)^+ = \{0\}$ であることが Kurihara[8] の結果から従います。)

一般に X を pro-p G-加群とし、1 の p べき乗根全体の群を $W(p)$ ($\subset \mathbf{C}$) で表します。このとき、$\mathrm{Hom}(X, W(p))$ で、X から $W(p)$ への連続準同型全体を表すことにすると、これにも G は

$$\sigma(f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x))) \quad (\sigma \in G,\ f \in \mathrm{Hom}(X, W(p)),\ x \in X)$$

により作用し、$\mathrm{Hom}(X, W(p))$ は discrete G-加群となります。G の p 進整数環 $\mathbf{Z}_p$ 上の完備群環 $\mathbf{Z}_p[[G]]$ は

$$\mathbf{Z}_p[[G]] = \varprojlim \mathbf{Z}_p[G/U] \quad (U \text{ は } G \text{ の開部分群を動く})$$

によって定義される pro-p G-加群です。このとき、次の結果が得られます。

定理 2　p を奇素数とする。このとき、$C_\infty(p)^-$ は、$\mathrm{Hom}(\prod_{N=1}^{\infty} \mathbf{Z}_p[[G]],\ W(p))$ と G-加群として同型となる。

§3　定理 2 の言い換え　イデアル類群 $C_\infty(p)$ は、あるガロア群の指標群と自然に同型になることが知られているので (Iwasawa[6])、定理 2 はガロア群の構造として言い換えることができます。これを簡単に説明します。

k_0 を任意の有限次代数体とし、p も任意の素数とします。M_p を k_∞ の p の外で不分岐な最大アーベル pro-p 拡大体、N_p を k_∞ に k_∞ のすべての単数のすべての p べき乗根を添加して得られる拡大体とします。M_p, N_p は共に k_0 上のガロア拡大体で、

$$k_\infty \subset N_p \subset M_p$$

となっています。いま、$C_\infty(p)$ の元を c とし、c の代表（イデアル）をひとつとり、A とします。ある p べき m に対して、A^m は単項ですから、$A^m = (a)$ ($a \in k_\infty$) となります。そこで、$\alpha^m = a$ となる α をひとつとり、$\chi(\sigma) = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ により $\mathrm{Gal}(M_p/N_p)$ の指標

$$\chi : \mathrm{Gal}(M_p/N_p) \longrightarrow W(p)$$

を定めます。χ は A, m, a, α の選び方によらず c のみで定まることがわかり、さらにこの対応 $c \to \chi$ により、G 加群としての同型

$$C_\infty(p) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(M_p/N_p),\ W(p)) \qquad (*)$$

が成り立ちます。([6] では、代数体が 1 の p べき乗根をすべて含む場合にこの対応が述べられ、1 のべき根をすべて含む場合も最後に簡単に触れられています。)

特に、k_0 が総実代数体で、p が奇素数の場合を考えます。k_1 の最大実部分体を k_1^+ とし、M_p^+ を k_∞^+ の p の外で不分岐な最大アーベル pro-p 拡大体とします。ガロア群 $\mathrm{Gal}(M_p^+/k_\infty^+)$ は自然に pro-p G-加群（$G \simeq \mathrm{Gal}(k_\infty^+/k_1^+)$）となります。$k_0$ が総実であることから、k_∞ の単数は k_∞^+ の単数と 1 のべき根から生成され、これより、複素共役 ρ は $\mathrm{Gal}(N_p/k_\infty)$ には -1 倍で作用することがわかります。このことから、同型対応 $(*)$ より、G-加群として、

$$C_\infty(p)^- \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(M_p^+/k_\infty^+),\ W(p))$$

となることが従います。それゆえ、定理 2 は次の定理 2' を示すことに帰着します。

定理 2'　p を奇素数とする。このとき、$\mathrm{Gal}(M_p^+/k_\infty^+)$ は $\prod_{N=1}^{\infty} \mathbf{Z}_p[[G]]$ と pro-p G-加群、すなわち $\mathbf{Z}_p[[G]]$-加群として同型となる。

§4　**注意**　定理 1, 2'（2）についていくつか注意を述べます。

まず、いずれの定理においても、ガロア群は、単に完備群環上の加群としての構造が与えられているだけである、ということです。今のところ、ガロア群の、完備群環上の加群としての標準的な生成元などは（あるかどうかも含めて）全くわかっていません。

定理 2'（2）については、$p=2$ の場合や k_0 が総実ではない場合などは、どういう構造になるかはわかっていません。

次に、円分体のガロア群 $\mathrm{Gal}(k_\infty/k_0)$ 全体の作用も込めた $\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ や C_∞ の構造についてですが、これについてもほとんどわかっていません。$\mathrm{Gal}(L/k_\infty)$ については、$\mathrm{Gal}(k_\infty/k_0)$ 加群として忠実である、ということはわかります。（実はこれが、別の問題意識から、著者が最初に考察したことです [2]。）

§5　**証明について**　Iwasawa algebra と異なり、完備群環 $\hat{\mathbf{Z}}[[G]]$ や $\mathbf{Z}_p[[G]]$ については、その簡単な表示は知られていませんし、ましてその上の加群の構造定理のようなものもありません。ただ、与えられた加群がこれらの可算無限個の直積に同型となるかどうか、ということだけは、embedding problem の言葉（と位相的な条件）で特徴づけることができます。それが、Iwasawa[5, Th.4] の「作用域付き version」です。これは証明に必要な代数的な道具ですが、一方、数論的な結果として、（基礎体が非常に大きな）代数体の最大不分岐ガロア拡大体のガロア群の射影性に関する Uchida[8, Th.1] のある version が必要となります。詳しいことは [1] 又は [2] をご覧下さい。

註

1）約１年前に東北大学で行われた研究集会で、同じタイトルで（ほぼ）同じ内容の講演を行い、その報告集も出ています（[1]）。同一内容の文章を掲載することは、講究録の規定上できませんので、ここでは、主に設定と主結果を書きます。（最大円分体の最大不分岐アーベル拡大体のガロア群についての結果も含めました。）

2）これについては、第４回北陸数論研究集会（2005 年 12 月 26 日～ 12 月 27 日）の講演の中で触れました。報告集が出る予定ですので、そちらをご覧下さい。

文献

[1] 朝田　衞、最大円分体のイデアル類群への円分体のガロア群の作用について、仙台数論及び組み合せ論小研究集会 2004 報告集 (2005 年 3 月), 1–10. (http://www.math.is.tohoku.ac.jp/～taya/sendaiNC/2004/program.html)

[2] M. Asada, On Galois groups of abelian extensions over maximal cyclotomic fields, Preprint RIMS-1504(2005).

[3] A. Brumer, The class group of all cyclotomic integers, Journal of Pure and Applied Algebra 20(1981), 107–111.

[4] K. Horie, CM-fields with all roots of unity, Compositio Math. 74(1990), 1–14.

[5] K. Iwasawa, On solvable extensions of algebraic number fields, Ann. Math. 58(1953), 548–572.

[6] K. Iwasawa, Sheaves for algebraic number fields, Ann. Math. 69(1959), 408–413.

[7] M. Kurihara, On the ideal class groups of the maximal real subfields of number fields with all roots of unity, Journal of European Math. Soc. 1(1999), 35–49.

[8] K. Uchida, Galois groups of unramified solvable extensions, Tohoku Math. Journal 34(1982), 311–317.