数理解析研究所講究録
1521 巻 2006 年 126-138

Frobenius-Stickelberger-Type Formulae for Purely d-gonal Curves with Unique Point at Infinity

大西良博 (Y. Ônishi)
岩手大学 (Iwate University)

古典的な楕円函数論で常用する函数 $\sigma(u)$ と $\wp(u)$ について

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}1!2!\cdots(n-1)!\frac{\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(n)})\prod_{i<j}\sigma(u^{(i)}-u^{(j)})}{\sigma(u^{(1)})^n\sigma(u^{(2)})^n\cdots\sigma(u^{(n)})^n} \\
&=\begin{vmatrix} 1 & \wp(u^{(1)}) & \wp'(u^{(1)}) & \wp''(u^{(1)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(1)}) \\ 1 & \wp(u^{(2)}) & \wp'(u^{(2)}) & \wp''(u^{(2)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \wp(u^{(n)}) & \wp'(u^{(n)}) & \wp''(u^{(n)}) & \cdots & \wp^{(n-2)}(u^{(n)}) \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

なる等式が成り立つ ([**FS**]). これに先立ち, Kiepert は

$$
(-1)^{n-1}(1!2!\cdots(n-1)!)^2\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}=\begin{vmatrix} \wp' & \wp'' & \cdots & \wp^{(n-1)} \\ \wp'' & \wp''' & \cdots & \wp^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp^{(n-1)} & \wp^{(n)} & \cdots & \wp^{(2n-3)} \end{vmatrix}(u)
\tag{0.2}
$$

なる等式を得てゐる ([**Ki**]). これは (0.1) の極限を取ることで証明できる.

この等式を種数が 2 以上の代数曲線に付随する Abel 函数に一般化することを考へたい[1]. まづ (0.1) と (0.2) について, やや自明な書き換へを行なふ. $y(u)=\frac{1}{2}\wp'(u)$ および $x(u)=\wp(u)$ とおくと等式 $y(u)^2=x(u)^3+\cdots$ を得るが, これが上記の函数 $\wp(u)$ と $\sigma(u)$ が付随する楕円曲線である. ここで, 変数 u と楕円曲線の座標 $(x(u),y(u))$ は適当な積分路についての積分

$$
u=\int_{\infty}^{(x(u),y(u))}\frac{dx}{2y}
\tag{0.3}
$$

で対応してゐる. このとき (0.1) と (0.2) はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma(u^{(1)}+u^{(2)}+\cdots+u^{(n)})\prod_{i<j}\sigma(u^{(i)}-u^{(j)})}{\sigma(u^{(1)})^n\sigma(u^{(2)})^n\cdots\sigma(u^{(n)})^n} \\
&=\begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & yx(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & \cdots \\ 1 & x(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & yx(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x(u^{(n)}) & y(u^{(n)}) & x^2(u^{(n)}) & yx(u^{(n)}) & x^3(u^{(n)}) & \cdots \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

[1] そのような動機は Gauss 和を巡る考察から起つたのであるが, できあがつてみると, 反応があつたのは数理物理の方面の研究者ばかりで, そちらの方面の方に取つては興味深い等式であるらしい.

$$
(0.5) \qquad 1!2!\cdots(n-1)!\,\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}} = \begin{vmatrix} x' & y' & (x^2)' & (yx)' & \cdots \\ x'' & y'' & (x^2)'' & (yx)'' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ x^{(n-1)} & y^{(n-1)} & (x^2)^{(n-1)} & (yx)^{(n-1)} & \cdots \end{vmatrix}(u)
$$

と書き換へられる.

筆者は最近 (0.4) と (0.5) を表題の様な代数曲線のいくつかに対して一般化した ([**Ô1**], [**Ô2**], [**Ô3**], [**Ô4**], [**Ô5**]). これらの idea の源泉は筆者にとつては David Grant 氏の非常に originality に富んだ論文 [G] に基づく. その idea を一言で述べれば《Jacobi 多様体上で考へないで, むしろ, その中に埋め込まれてゐる曲線上で考へる》となる.[2]. その新公式を, 無限遠に唯一の点 ∞ を有する種数 2 の曲線

$$
(0.6) \qquad C : y^2 = x^5 + \cdots \quad (\text{右辺は } x \text{ の 5 次式})
$$

について述べるならば, まづ Frobenius-Stickelberger 公式 (0.4) の一般化は

$$
(0.7) \qquad \frac{\sigma(u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i<j} \sigma(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma_2(u^{(1)})^n \sigma_2(u^{(2)})^n \cdots \sigma_2(u^{(n)})^n} = \begin{vmatrix} 1 & x(u^{(1)}) & x^2(u^{(1)}) & y(u^{(1)}) & yx(u^{(1)}) & x^3(u^{(1)}) & \cdots \\ 1 & x(u^{(2)}) & x^2(u^{(2)}) & y(u^{(2)}) & yx(u^{(2)}) & x^3(u^{(2)}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x(u^{(n)}) & x^2(u^{(n)}) & y(u^{(n)}) & yx(u^{(n)}) & x^3(u^{(n)}) & \cdots \end{vmatrix}
$$

となる ([**Ô1**, Th. 2.3], [**Ô3**, Th. 6.2]). この式に現れる記号の意味は以下に説明するが, 特に<u>各変数の定義域</u>, <u>左辺の分母</u>, <u>右辺の成分に並ぶ函数の列</u>に注意されたい. いま

$$
(0.8) \qquad (u_1,\ u_2) = \int_{\infty}^{(x,y)} \left(\frac{\mathrm{d}x}{2y},\ \frac{x\mathrm{d}x}{2y} \right)
$$

なる積分を考へて, 右辺の積分の積分路と終点 (x, y) を動かすと, その値 $u = (u_1,\ u_2)$ の全体 (1 次元の多様体, $\subset \mathbf{C}^2$) を定義域として函数 $x(u)$, $y(u)$ が定義される. 全空間 $\mathbf{C}^2$ の座標も $u = (u_1, u_2)$ と記せば, 詳細は本文で述べるが, 2 変数の sigma 函数

$$
(0.9) \qquad \sigma(u) = \sigma(u_1, u_2)
$$

が定義されるので, それの偏導函数を

$$
(0.10) \qquad \sigma_2(u) := \tfrac{\partial}{\partial u_2}\sigma(u)
$$

と記してゐる. (0.5) の一般化である Kiepert 型の公式も同様に成り立ち

$$
(0.12) \qquad 1!2!\cdots(n-1)!\,\frac{\sigma(nu)}{\sigma_2(u)^{n^2}} = \begin{vmatrix} x' & (x^2)' & y' & (yx)' & \cdots \\ x'' & (x^2)' & y'' & (yx)'' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ x^{(n-1)} & (x^2)^{(n-1)} & y^{(n-1)} & (yx)^{(n-1)} & \cdots \end{vmatrix}(u)
$$

[2] しかし実際には, この考へ方はたとへば F.Klein の論文 [Kl1], [Kl2] などに既に見える. このことは中屋敷厚氏に教へていただいた. ちなみにこの Klein の論文は超楕円函数の場合について, sigma 函数を theta 級数なしで表示する方法を与へてゐる.

となる ([**Ô1**, Th. 3.3], [**Ô3**, Th. 8.3]). ただし, これらの式の変数の定義域の上では u_2 が原点の周りでの局所助変数であるので, $'$ で d/du_2 を表してゐる.

これらを (0.1) や (0.2) の形に書くことも容易である. さらに, 左辺の各因子を, 考へてゐる曲線に対応する多変数 σ 函数の適当な導関数で置き換へて得られる同様の公式を説明するのが本報告の目的である[3].

主結果の詳細は [**Ô5**] を参照していただくこととして, 本報告では, 結果自体を正確かつ丁寧に述べ, 証明の細部を省略した. 特に, 今までの Abel 函数論では馴染みのない対象が登場するので, その辺をとくに丁寧に解説したつもりである.

これらの結果が得られたのは, 忍耐強く discussion に付き合つてくれた松谷茂樹氏の支へがあつたればこそである. 彼に最大の感謝を捧げたい. また J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, E. Previato の各氏と松谷氏を招いて首都大で 2005 年初夏に行なつた研究交流で筆者は多大な刺激を受けた. 合せて深く感謝申し上げる.

読者には 本報告を読み始める前に, まづ §9 の主結果 (予想 9.1) を御覧いただきたい. そこに現れる様々な函数や記号などは, 楕円函数の場合においてそれらに対応する対象を想起してみるに非常に基本的であるにも拘らず, 今まであまり現れて来なかつたのものである. 従つてそれらを定義し説明するには紙数を要するが, 一旦理解してみれば, それらが何如に自然な対象であるか納得していただけるものと信ずる.

文献

[**Ba**] Baker, H.F., *Abelian functions —Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions —*, Cambridge Univ. Press, 1897; reprint, 1995.

[**BEL1**] V.M. Buchstaber, V.Z. Enolskii and D.V. Leykin, Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, *Reviews in Math. and Math. Physics* **10** (1997), 1–125.

[**BEL2**] V.M. Buchstaber, V.Z. Enolskii, and D.V. Leykin, Rational analogs of Abelian functions, *Functional Anal. Appl.* **33** (1999), 83–94.

[**Fa**] J. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces, Lecture Notes in Math.* **352**, Springer-Verlag, 1973.

[**FS**] F.G. Frobenius and L. Stickelberger, Zur Theorie der elliptischen Functionen, *J. reine angew. Math.* **83** (1877), 175–179.

[**G**] D. Grant, A generalization of a formula of Eisenstein, *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991), 121–132.

[**Ki**] L. Kiepert, Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplikation der elliptichen Funktionen, *J. reine angew. Math.* **76** (1873), 21–33.

[**Kl1**] F. Klein, Über hyperelliptische Sigmafunctionen I, *Math. Ann.* **27** (1886), 432–464..

[**Kl2**] F. Klein, Über hyperelliptische Sigmafunctionen II, *Math. Ann.* **32** (1888), 351–380..

[**Mu**] D. Mumford, *Tata lectures on Theta I*, Progr. Math., **28**, Birkhäuser, 1983.

[**Ô1**] Y. Ônishi, Determinant expressions for Abelian functions in genus two, *Glasgow Math. J.* **44** (2002), 353-364.

[**Ô2**] Y. Ônishi, Determinant expressions for hyperelliptic functions in genus three, *Tokyo J. Math.* **27** (2004), 299-312.

[**Ô3**] Y. Ônishi, Determinant expressions for hyperelliptic functions (with an appendix by Shigeki Matsutani), *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **48** (2005), 705-742.

[**Ô4**] Y. Ônishi, Determinant expressions in Abelian functions for purely trigonal curves of degree four, `http://arxiv.org/abs/math.NT/0503696` (2005).

[**Ô5**] Y. Ônishi, Determinant expressions in Abelian functions for purely pentagonal curves of degree six, `http://web.cc.iwate-u.ac.jp/~onishi/` (2006).

[3] 類似の公式として J. Fay に依るもの ([**Fa**], p.43) が知られてゐるが, 最近, 超楕円曲線の場合に中屋敷氏が Fay の公式から筆者の公式を導くことに成功した.

1. Purely d-gonal curve with unique point at infinity

まづ, 方程式

$$C: y^d = x^s + \lambda_1 x^{s-1} + \cdots + \lambda_{s-1} x + \lambda_s \tag{1.1}$$

で定義された代数曲線 C を考へる. ただし, $\gcd(d,s)=1$, $d<s$ とする. 表題の purely d-gonal といふのは y を含む項が左辺の 1 つだけであることを意味してゐる. また C は自然に無限遠点に 1 点 ∞ を添加して完備射影曲線と見做されるので, "with unique point at infinity" と称してゐる. 基礎の環 (体) は複素数体であることを要求しないが, わかり易くするために, ここではそれを仮定する. 曲線 C は, 非特異であればその種数は

$$g = (d-1)(s-1)/2 \tag{1.2}$$

である. いま $a_j \geqq 0$, $b_j \geqq 0$ として,

$$\{\, a_1 d + b_1 s\,(=0),\ \ a_2 d + b_2 s\,(=d),\ \ a_3 d + b_3 s,\ \cdots, a_g d + b_g s\} \tag{1.3}$$

を C の ∞ に於ける Weierstrass non-gap sequence, つまり ∞ における極が取り得る位数を<u>小さい順</u>に並べたものとする. これの始めの g 個を使つて作つた微分形式[4]

$$\frac{x^{a_1}y^{b_1}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\left(=\frac{\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\right),\ \frac{x^{a_2}y^{b_2}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\left(=\frac{x\,\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\right),\cdots,\ \frac{x^{a_j}y^{b_j}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\ \cdots,\ \frac{x^{a_g}y^{b_g}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}} \tag{1.4}$$

は C 上の正則な微分形式の空間の基底を成す. これらを g 次元の vector にして

$$\begin{aligned}\omega &= (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_g) = \big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y), \cdots, \omega_g(x,y)\big)\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\ \frac{x\,\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\ \cdots,\ \frac{x^{a_j}y^{b_j}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}},\ \cdots,\ \frac{x^{a_g}y^{b_g}\mathrm{d}x}{dy^{d-1}}\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

等と書く. 以下では Λ で (1.5) の微分形式が定める周期格子を表す. つまり

$$\Lambda = \text{“あらゆる閉積分路に関する積分 } \oint \omega \text{ 達の生成する格子”} \subset \mathbf{C}^g \tag{1.6}$$

とする. また

$$\{\, w_g\,(=2g-1),\ \ w_{g-1},\ \ \cdots,\ \ w_2,\ \ w_1\,(=1)\,\} \tag{1.7}$$

を ∞ における Weierstrass gap sequence, つまり (1.5) の隙間を埋める数列[5] を大きい順に並べたものとする. 曲線 C の上記の Λ に対応する Jacobi 多様体 (の $\mathbf{C}$ 有理点全体) を J と記す. 即ち

$$J := \mathbf{C}^g/\Lambda. \tag{1.8}$$

[4] 紛らはしいが italic d と roman d とを混同しないでいただきたい.

[5] この場合, それらが丁度 g 個となることは基本的なことである.

また, C の J への埋め込みを

$$(1.9) \qquad \iota: \quad C \hookrightarrow \quad J, \qquad (x,y) \mapsto \int_{\infty}^{(x,y)} \omega \mod \Lambda \in \mathbf{C}^g/\Lambda$$

で固定しておく. これは ∞ を J の原点に写す写像である. さらに, κ で modulo Λ で与へられる $\mathbf{C}^g$ から $\mathbf{C}^g/\Lambda$ への写像を表す:

$$(1.10) \qquad \kappa: \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^g/\Lambda\,(=J).$$

このとき

$$(1.11) \qquad \kappa^{-1}\iota(C) \to \iota(C) \simeq C$$

は C の普遍可換被覆となつてゐる. この上を動く点 $u \in \kappa^{-1}\iota(C)(\subset \mathbf{C}^g)$ については函数

$$(1.12) \qquad u \mapsto x(u), \quad u \mapsto y(u)$$

が定義される. この変数は u の座標を全空間 $\mathbf{C}^g$ の自然な座標を持つが, それを

$$(1.13) \qquad u = (u_{\langle w_g \rangle}, u_{\langle w_{g-1} \rangle}, \cdots, u_{\langle w_1 \rangle})$$

と書く (この記法については §2, §3 を参照). この函数の動く空間の座標をこの様に定めて考察することは重要である (Bernoulli-Hurwitz 数の一般化など).

補題 1.14. $u = (u_{\langle w_g \rangle}, u_{\langle w_{g-1} \rangle}, \cdots, u_{\langle w_1 \rangle}) \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき各 $u_{\langle w_j \rangle}$ $(2 \leqq j \leqq g)$ は $u_{\langle 1 \rangle}$ によつて

$$u_{\langle w_j \rangle} = \frac{1}{w_j} {u_{\langle 1 \rangle}}^{w_j} + \cdots$$

なる形に展開される.

補題 1.15 $u = (u_{\langle w_g \rangle}, u_{\langle w_{g-1} \rangle}, \cdots, u_{\langle w_1 \rangle}) \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき $x(u)$ と $y(u)$ は局所助変数 $u_{\langle w_1 \rangle} = u_{\langle 1 \rangle}$ に関して次のやうに展開される:

$$x(u) = \frac{1}{{u_{\langle 1 \rangle}}^d} + \cdots, \qquad y(u) = \frac{1}{{u_{\langle 1 \rangle}}^s} + \cdots.$$

注意 1.16 以上のことから $u_{\langle 1 \rangle}$ は $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上で原点における局所助変数であることがわかる.

2. Jacobi 多様体の層化構造

次に Jacobi 多様体 J を階層構造 (stratification) を入れる. まづ (1.9) を拡張して

$$(2.1) \qquad \iota: \mathrm{Sym}^n C \longrightarrow J, \qquad (P_1, \cdots, P_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \int_{\infty}^{P_j} \omega \mod \Lambda$$

を考へ,

$$W^{[n]} := \iota(\mathrm{Sym}^n C) \subset J \tag{2.2}$$

とおく. 従つて $W^{[1]} = \iota(C)$ である. よく知られてゐる様に $n = g$ の場合の (2.1) の積分の全体

$$\left\{ u = (u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}) = \sum_{j=1}^{g} \int_{\infty}^{P_j} \omega \;\middle|\; \begin{array}{l} (P_1, \cdots, P_g) \in \mathrm{Sym}^g C, \\ \text{積分はあらゆる路を許す.} \end{array} \right\} \tag{2.3}$$

は全空間 $\mathbf{C}^g$ を覆ふ (従つて $n = g$ なら ι は全射) ので, これに応じて $\mathbf{C}^g$ の座標は

$$(u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}) \tag{2.4}$$

と記す (§3 参照). さらに

$$[-1](u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}) = (-u_{\langle w_g\rangle}, -u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, -u_{\langle w_1\rangle}) \tag{2.5}$$

とし,

$$\Theta^{[n]} := W^{[n]} \cup [-1]W^{[n]} \tag{2.6}$$

と定義する. このとき J の階層構造が

$$\begin{array}{ccccccccc} \infty \in \mathrm{Sym}^1 C & \subset & \mathrm{Sym}^2 C & \subset & \cdots & \subset & \mathrm{Sym}^{g-1} C & \subset & \mathrm{Sym}^g C. \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow & & \cdots & & \downarrow & & \downarrow \\ O \in W^{[1]} & \subset & W^{[2]} & \subset & \cdots & \subset & W^{[g-1]} & \subset & W^{[g]} \\ \| \quad\; \cap & & \cap & & \cdots & & \cap & & \| \\ O \in \Theta^{[1]} & \subset & \Theta^{[2]} & \subset & \cdots & \subset & \Theta^{[g-1]} & \subset & \Theta^{[g]} = J = \mathbf{C}^g/\Lambda \end{array} \tag{2.7}$$

の様に定まる.

注意 2.8 たとへば楕円曲線や楕円曲線 (つまり $d = 2$) については $\Theta^{[k]} = W^{[k]}$ であるが, 一般には $\Theta^{[k]} \neq W^{[k]}$ $(1 \leqq k \leqq g-1)$ である.

上の各階層 $\Theta^{[n]}$ に対応する "sigma 函数" を与へることが, この報告の目的であるといつても過言ではなく, 後に述べる記号を先取りして結論を云へば, それが元の $\sigma(u)$ の偏導函数 $\sigma_{\natural^n}(u)$ で与へられるのである.

3. Sato weight

定義-補題 3.1 今までに登場したものに Sato weight と呼ばれる重さ sw(·) を

$$\mathrm{sw}(u_{\langle w_j\rangle}) = w_j, \quad \mathrm{sw}(\lambda_j) = -dj,$$

によつて定めると $x(u)$, $y(u)$ の $u_{\langle 1\rangle}$ による $u = (0, \cdots, 0)$ における Laurent 展開はそれぞれ Sato weight $-d$, $-s$ で斉重となる. これを

$$\mathrm{sw}(x(u)) = -d, \quad \mathrm{sw}(y(u)) = -s.$$

と書き表す. これにより C の定義方程式 (1.1) も斉重となる.

この重さは重要であつて, これにより本報告に現れる全ての等式が斉重となる.

4. Sigma 函数

ここでは, この理論において最も重要な函数 $\sigma(u)$

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \sigma(u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}) \\ &= \sigma(u_{\langle 2g-1\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle 1\rangle})\end{aligned} \tag{4.1}$$

を定義から始めて詳しく解説する. 比較的新しい参考文献としては [**BEL1**, Chap. 1] などがある. 函数 $\sigma(u)$ は下記の data から定義されるものである:

—. (1.5) で与へた C 上の第 1 種微分形式 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_g$;
—. 適切な仕方で選ばれた g 個の線形独立な第 2 種微分形式 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_g$;
—. $H_10(C, \mathbf{Z})$ の生成元を代表する C 上の $2g$ 本の閉ぢた路 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g$ で, その交点数が $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$, $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$ となつてゐるもの.

以下は [**Ba**] の p.68 およびこれの p.194 の 1.2 式の周辺に依る. まづ, (1.5) で定義した第 1 種微分形式 ω_j から作られる周期の行列を

$$[\omega' \ \ \omega''] = \left[\int_{\alpha_i} \omega_j \ \ \int_{\beta_i} \omega_j\right]_{i,j=1,2,\cdots,g} \tag{4.2}$$

と書く. さらに

$$\Omega\big((x,y),(x',y')\big) = \frac{1}{(x-x')dy^{d-1}} \sum_{k=1}^{d} y^{d-k} {y'}^{k-1} \tag{4.3}$$

を考へて, 第 2 種微分形式 $\eta_j = \eta_j(x,y)$ を

$$\frac{\partial\,\Omega\big((x',y'),(x,y)\big)}{\partial x} - \frac{\partial\,\Omega\big((x,y),(x',y')\big)}{\partial x'} = \sum_{i=1}^{g} \frac{\omega_i(x,y)}{\mathrm{d}x}\frac{\eta_i(x',y')}{\mathrm{d}x'} - \frac{\omega_i(x',y')}{\mathrm{d}x'}\frac{\eta_i(x,y)}{\mathrm{d}x} \tag{4.4}$$

が満たされるものとして定め, その周期のなす行列を

$$[\omega' \ \ \omega''] = \left[\int_{\alpha_i} \omega_j \ \ \int_{\beta_i} \omega_j\right]_{i,j=1,2,3}, \quad [\eta' \ \ \eta''] = \left[\int_{\alpha_i} \eta_j \ \ \int_{\beta_i} \eta_j\right]_{i,j=1,2,3} \tag{4.5}$$

と記す. この 2 つの行列を結合して

$$M = \begin{bmatrix} \omega' & \omega'' \\ \eta' & \eta'' \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

と書く. このとき M は

$$M \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} {}^t M = 2\pi\sqrt{-1} \begin{bmatrix} & -1_g \\ 1_g & \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

を満たすが, これが **一般 Legendre 関係式** である (see (1.14) in p.11 of [**BEL1**]). 特に ${\omega'}^{-1}\omega''$ は対称行列である. また

$$\mathrm{Im}\,({\omega'}^{-1}\omega'') \quad \text{は正定値行列} \tag{4.8}$$

である. いま

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{bmatrix} \in \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{Z}\right)^{2g} \tag{4.9}$$

を, C の基点を ∞ としたときの $[\omega'\ \omega'']$ に関して Riemann 定数を与へる theta characteristic ([**Mu**], pp.163–166, または [**BEL1**], p.15, (1.18)) とする. 微分形式 (3.5) を見れば C の標準因子類 (canonical divisor class) は $(2g-2)\infty$ になつてゐることがわかるので, 任意の theta characteristic は $\left(\frac{1}{2}\mathbf{Z}\right)^{2g}$ に属する. そこで,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(u) =&\ \exp(-\tfrac{1}{2}u\eta'\omega'^{-1}\,{}^t u)\vartheta[\delta]\,(\omega'^{-1}\,{}^t u;\ \omega'^{-1}\omega'') \\ =&\ \exp(-\tfrac{1}{2}u\eta'\omega'^{-1}\,{}^t u) \\ &\times \sum_{n\in\mathbf{Z}^g} \exp\left[2\pi i\{\tfrac{1}{2}\,{}^t(n+\delta')\omega'^{-1}\omega''(n+\delta') + {}^t(n+\delta')(z+\delta'')\}\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

と定義すると, これは我々の定義したい函数

$$\sigma(u) = \sigma(u; M) = \sigma(u_{\langle w_g\rangle}, u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, u_{\langle w_1\rangle}; M). \tag{4.11}$$

に 0 でない定数を掛けたものになつてゐる. この定数については, それほど重要でないので省略する. 詳しくは [**Ô5**], §5.1 に説明がある.

以下では, 与へられた $u \in \mathbf{C}^g$ に対して u' および u'' で

$$u = u'\omega' + u''\omega''. \tag{4.12}$$

となる $\mathbf{R}^g$ の元を示すことにする. このとき $u, v \in \mathbf{C}^g$ と $\ell\ (= \ell'\omega' + \ell''\omega'') \in \Lambda$ について

$$\begin{aligned}L(u,v) &:= {}^t u(\eta' v' + \eta'' v''), \\ \xi(\ell) &:= \pi\sqrt{-1}(2({}^t\ell'\delta'' - {}^t\ell''\delta') + {}^t\ell'\ell'')\ (\in \pi\sqrt{-1}\,\mathbf{Z}).\end{aligned} \tag{4.13}$$

が成り立つ. この状況の下で, 函数 $\sigma(u; M)$ の重要な性質のやうに述べられる:

補題 4.14 $u \in \mathbf{C}^g$, $\ell \in \Lambda$, $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ に対して次が成り立つ:
(1) $\sigma(u+\ell; M) = \sigma(u; M)\exp[L(u+\frac{1}{2}\ell, \ell) + \xi(\ell)]$,
(2) $\sigma(u; \gamma M) = \sigma(u; M)$,
(3) $u \mapsto \sigma(u; M)$ は $\Theta^{[g-1]}$ に 1 位の零を持つ,
(4) $\sigma(u; M) = 0 \iff u \in \Theta^{[g-1]}$.

証明. (1) は [**Ba**], p.286, ℓ.22. (2) は (4.10) および γ による M の変換が (4.5) の積分路の取り換へに対応してゐることとからわかる. 主張 (3) と (4) は [**Ba**, p.252]. □

補題 4.15 上の (4.8) および (4.9) を満たす M を固定するとき, 4.14(1) の型の函数方程式

$$\varphi(u+\ell; M) = \varphi(u; M)\exp[L(u+\tfrac{1}{2}\ell, \ell) + \xi(\ell)]$$

を満たす u に関する整函数 $\varphi(u; M)$ の全体は 1 次元の vector 空間をなし, その非自明な解は 4.14(2), (3), (4) の性質を持つ. 言ひ換へれば, 固定された M に対し, 4.14(1) は函数 $\sigma(u)$ 定数倍を除いて特徴付けてゐる.

証明. 本質的には Frobenius による. [**Ô5**], 補題 4.14 から辿られたい. □

5. 固有函数としての sigma 函数

いま

(5.1) $$\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/d}$$

と書くとき,

(5.2) $$C \ni (x,y) \mapsto [\zeta^\nu](x,y) := (x, \zeta^\nu y)$$

は, C の自己同型を与へる. いま μ を

(5.3) $$(2g-1)\mu \equiv 1 \mod d$$

なる整数とすれば, この作用から自然に ζ^ν は $\mathbf{C}^g$ に

(5.4) $$[\zeta^\nu](u_{\langle w_g\rangle}, \cdots, u_{\langle w_2\rangle}, u_{\langle w_1\rangle}) = (\zeta u_{\langle w_g\rangle}, \zeta^{\mu w_{g-1}} u_{\langle w_{g-1}\rangle}, \cdots, \zeta^{\mu w_2} u_{\langle w_2\rangle}, \zeta^{\mu} u_{\langle 1\rangle})$$

でもつて作用する. このとき, きちんと書かれた文献がないが, 以下が成り立つことが知られてゐる.

補題 5.5 函数 $\sigma(u)$ は以下の性質を持つ:
(1) Sato weight $(d^2-1)(s^2-1)/24$ (これは後の 6.1 の aw(g) に一致) なる斉次な $u_{\langle w_g\rangle}$, $\cdots$, $u_{\langle w_1\rangle}$ の冪級数に展開され, その各項の係数は $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ の $\mathbf{Q}$ 係数の多項式となる;
(2) $[-1]$ と $[\zeta]$ の作用に関して, 固有函数であつて,

$$\sigma([-1][\zeta]u) = (-1)^\varepsilon \zeta^q \, \sigma(u).$$

ここで ε と q はそれぞれ $q \equiv \frac{(d^2-1)(s^2-1)}{24(2g-1)} \mod d$ および $\varepsilon \equiv \frac{(d^2-1)(s^2-1)}{24} \mod 2$ を満たす整数である.

6. Schur-Weierstrass 多項式

函数 $\sigma(u)$ の $\lambda_j \to 0$ のときの極限

(6.1) $$S(u) := \lim_{\forall\lambda_j \to 0} \sigma(u)$$

は **Schur-Weierstrass 多項式** と呼ばれる素性の良くわかつたものになることが知られてゐる ([**Ba**], [**BEL2**] など). そのことは, 定理 9.2 の証明では非常に重要であるが, 予想自体を述べるためにはそのことは必要なく, 詳細は [**Ô5**] にあるので, ここでは省くことにする. ただ, 多項式 $S(u)$ は具体的を書き下すことができるので (6.1) から, そのことは直ちに $\sigma(u)$ の冪級数展開の始めのいくつかの項がわかることを意味する. 参考のために, ここではいくつか例を記しておく.

(6.2) $$\begin{cases} (d,s)=(2,3), & S(u) = S(u_{\langle 1\rangle}) = u_{\langle 1\rangle}\ ; \\ (d,s)=(2,5), & S(u) = S(u_{\langle 3\rangle}, u_{\langle 1\rangle}) = u_{\langle 3\rangle} - \frac{1}{3}{u_{\langle 1\rangle}}^3\ ; \\ (d,s)=(2,7), & S(u) = S(u_{\langle 5\rangle}, u_{\langle 3\rangle}, u_{\langle 1\rangle}) = u_{\langle 5\rangle}u_{\langle 1\rangle} - {u_{\langle 3\rangle}}^2\ ; \\ (d,s)=(3,4), & S(u) = S(u_{\langle 5\rangle}, u_{\langle 2\rangle}, u_{\langle 1\rangle}) = u_{\langle 5\rangle} - {u_{\langle 2\rangle}}^2 u_{\langle 1\rangle} - \frac{1}{20}{u_{\langle 1\rangle}}^5\ ; \\ (d,s)=(3,5), & S(u) = S(u_{\langle 7\rangle}, u_{\langle 4\rangle}, u_{\langle 2\rangle}, u_{\langle 1\rangle}) = u_{\langle 7\rangle}u_{\langle 1\rangle} - {u_{\langle 4\rangle}}^2 \\ & \qquad - u_{\langle 4\rangle}u_{\langle 2\rangle}{u_{\langle 1\rangle}}^2 + \frac{1}{4}{u_{\langle 2\rangle}}^4 + \frac{1}{8}{u_{\langle 2\rangle}}^2{u_{\langle 1\rangle}}^4 - \frac{1}{448}{u_{\langle 1\rangle}}^8. \end{cases}$$

7. Sigma 函数の導函数

この節では, 階層構造 $\{\Theta^{[n]} | 1 \leqq n \leqq g\}$ に対応する $\sigma(u)$ の偏導函数を明かす.

定義 7.1. 第 k 階層 $\Theta^{[k]}$ に付随した (attached) Sato weight といふものを

$$\mathrm{aw}(k) := \sum_{j=1}^{g-k} (w_j - j + 1)$$

で定める.

例として, 表 8.5 の第 1, 第 2 列を参照いただきたい.

定義 7.2 I を $\mathbf{Weier}_{d,s} = \{w_g, w_{g-1}, \cdots, w_2, w_1\}$ に属する数をいくつか (重複も許す) 並べたものとする. ただし, その順序は問はない. この様な I を (組 (d,s) に関する) **多重添字**と呼ぶ. この論文では $I = \langle 4332111 \rangle$ などと必ず $\langle\ \rangle$ を付けて記す. 多重添字 I について対応する σ の 導函数 σ_I を

$$\sigma_I(u) = \left(\prod_{i \in I} \frac{\partial}{\partial u_{\langle i \rangle}} \right) \sigma(u)$$

と定義する. もちろん重複した $i \in I$ については重複しただけの階数の偏導函数を考へてゐる.

定義 7.3 I を上の定義の意味での多重添字とする. このとき $\mathrm{sw}(I)$ で, I に属する数の単純な和を表すことにする. sw は Sato weight の意である.

定義 7.4 記号 $\natural^n$ は $\mathrm{sw}(\natural^n) = \mathrm{aw}(n)$ なる多重添字であつて, $\sigma_{\natural^n}(u)$ が $\kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ 上で自明ではなく, かつ, これと同じ Sato weight を持つものを多重添字の全体を辞書式順序で並べたとき, 与ふ限り後方に来るものを表すものとする. 特に $\natural^1$ と $\natural^2$ は多用するので $\sharp = \natural^1, \flat = \natural^2$ と書く.

表 7.5 多重添字 $\natural^n$ の表

(d,s)	g	$\sharp = \natural^1$	$\flat = \natural^2$	$\natural^3$	$\natural^4$	$\natural^5$	$\natural^6$	$\natural^7$	$\natural^8$	$\natural^9$	$\natural^{10}$	$\natural^{11}$	$\natural^{12}$	$\cdots$
$(2,3)$	1	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(2,5)$	2	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(2,7)$	3	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(2,9)$	4	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(2,11)$	5	$\langle 3,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(2,13)$	6	$\langle 1,5,9\rangle$	$\langle 3,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(2,15)$	7	$\langle 3,7,11\rangle$	$\langle 1,5,9\rangle$	$\langle 3,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
														$\cdots$
$(3,4)$	3	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(3,5)$	4	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(3,7)$	6	$\langle 2,8\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(3,9)$	7	$\langle 4,10\rangle$	$\langle 2,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(3,10)$	9	$\langle 4,8,14\rangle$	$\langle 1,7,11\rangle$	$\langle 4,8\rangle$	$\langle 2,7\rangle$	$\langle 1,5\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
														$\cdots$
$(5,6)$	10	$\langle 3,8,14\rangle$	$\langle 2,4,13\rangle$	$\langle 1,3,9\rangle$	$\langle 2,8\rangle$	$\langle 7\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$(5,7)$	12	$\langle 1,6,11,18\rangle$	$\langle 4,8,16\rangle$	$\langle 2,6,13\rangle$	$\langle 1,4,11\rangle$	$\langle 3,9\rangle$	$\langle 1,8\rangle$	$\langle 6\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle\rangle$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

8. Key Lemma

ここまでの状況で, $\sigma(u)$ の導函数について次の主張が成立する事は確実と思はれる.

作業仮説 8.1 I を上の定義の意味での添字集合とする. このとき次が成り立つ.
(1) $\mathrm{sw}(I) < \mathrm{aw}(n)$ ならば $\sigma_I(\kappa^{-1}(\Theta^{[n]})) = 0$ である.
(2) $\mathrm{sw}(I) = \mathrm{aw}(n)$ とする. σ_I は $\Theta^{[n]}$ 上で translational relation

$$\sigma_I(u+\ell) = \sigma_I(u)\exp[L(u+\tfrac{1}{2},\ell)+\xi(\ell)]$$

を満たす. このとき (1) より $\sigma_I(\kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]})) = 0$ となるが, もし σ_I が $\kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ 上の零函数でないならば, $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ に対し $\sigma_I(u) = 0 \iff u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]})$, 特に

$$\sigma_{\natural^n}(u) = 0 \iff u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]}).$$

(3) $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n]})$ のとき

$$\sigma_{\natural^n}(u+\ell) = \sigma_{\natural^n}(u)\exp[L(u+\tfrac{1}{2},\ell)+\xi(\ell)]$$

が成り立つ. 但し $L(\cdot,\cdot)$ と $\xi(\cdot)$ は (4.13) で定義したそれである.
(4) $1 \leqq n \leqq g$ とする. $u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[n-1]})$, $v \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき

$$\sigma_{\natural^n}(u+v) = \sigma_{\natural^{n-1}}(u){v_{\langle 1\rangle}}^{w_n+n-2} + \left(d^\circ(v_{\langle 1\rangle}) \geqq w_n+n-1\right)$$

と展開される. 但し $\sigma_{\natural^0}(0,0,\cdots,0) = 1$ とする.

定理 8.2 上の 8.1 は次の場合には成立する:

$$(d,s) = (2,2g+1) \quad (g \geqq 1),$$
$$(3,4),\quad (3,5),\quad (3,7),\ \text{etc.},$$
$$(5,6),\ \text{etc..}$$

注意 8.3 $(d,s) = (2,2g+1)$ については [**Ô3**] で, $(d,s) = (3,4)$ については [**Ô4**] で証明されてをり, 同様の方法でひとつひとつの $(3,s)$ についても証明できる. またこの論文で $(d,s) = (5,6)$ の場合を扱ふ. しかるに, 一気に一般の (d,s) について実行する為にはもう少し考察が必要である.

注意 8.4. (1) $\mathrm{sw}(I) = 0$ となるのは $I = \langle\rangle$ の場合のみなので上記の定理は $\sigma(u)$ が $\mathbf{C}^g = \kappa^{-1}(\Theta^{[g]})$ 上で translational relation を満し, $\sigma(\Theta^{[g-1]}) = 0$ となることを示してゐる. これらは命題 4.12 に他ならない.
(2) $\mathrm{sw}(I) = 1$ となるのは $I = \{1\}$ の場合のみなので上記の定理は $\sigma_{\langle g-1\rangle}(u)$ が $\Theta^{[g-1]}$ 上で translational relation を満し, $\sigma_{\langle 1\rangle}(\Theta^{[g-2]}) = 0$ を満すことを示してゐる.
(3) $\mathrm{sw}(I) > 1$ については添付の表に示す計算結果から証明される.

さて, この論文 [**Ô5**] では 8.1 を示すのに **剝離法** なるものを用いてゐる. 恐らく, 最も洗練されたやり方は, translational relation の解空間が 1 次元であることなどをうまく利用して, Schur-Weierstrass 多項式の行列式表示に帰着させることだと思はれるが, 現時点では考察が不十分であるためにさうできない. また [**Ô3**] の超楕円曲線の場合の証明を一般の (d,s) に対して適用することはできない ([**Ô5**] 参照).

表 8.5 $\sigma_I(\Theta^{[n]})$ の表

$*$: There exist some I such that $\sigma_I(u)$ is not "identically zero" on $\Theta^{[n]}$.

trans. rel. : $\sigma_I(u)$ satisfies the translational relation, namely $\sigma_I(u+\ell) = \sigma_I(u)\exp L(u+\frac{1}{2}\ell, \ell)$ for $u \in \Theta^{[n]}$ and $\ell \in \Lambda$.

$(d,s) = (3,4)$, $g = 3$

aw(·)	sw(I)	Stratum $\Theta^{[n]}$ 0	1	2	3
aw(1)	2	0	trans. rel.	*	*
aw(2)	1	0	0	trans. rel.	*
aw(2)	0	0	0	0	trans. rel.

$(d,s) = (3,5)$, $g = 4$

aw(·)	sw(I)	Stratum $\Theta^{[n]}$ 0	1	2	3	4
aw(1)	4	0	trans. rel.	*	*	*
	3	0	0	*	*	*
aw(2)	2	0	0	trans. rel.	*	*
aw(3)	1	0	0	0	trans. rel.	*
aw(4)	0	0	0	0	0	trans. rel.

$(d,s) = (3,7)$, $g = 6$

aw(·)	sw(I)	Stratum $\Theta^{[n]}$ 0	1	2	3	4	5	6
aw(1)	10	0	trans. rel.	*	*	*	*	*
	9	0	0	*	*	*	*	*
	8	0	0	*	*	*	*	*
	7	0	0	*	*	*	*	*
aw(2)	6	0	0	trans. rel.	*	*	*	*
	5	0	0	0	*	*	*	*
aw(3)	4	0	0	0	trans. rel.	*	*	*
	3	0	0	0	0	*	*	*
aw(4)	2	0	0	0	0	trans. rel.	*	*
aw(5)	1	0	0	0	0	0	trans. rel.	*
aw(6)	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.

$(d,s) = (5,6)$, $g = 10$

aw(·)	sw(I)	Stratum $\Theta^{[n]}$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aw(1)	25	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	24	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	23	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	22	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	21	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	20	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*	*
aw(2)	19	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*	*	*
	18	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	17	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	16	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	15	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
	14	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*	*
aw(3)	13	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*	*
	12	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*
	11	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*	*
aw(4)	10	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*	*
	9	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*
	8	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*	*
aw(5)	7	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*	*
	6	0	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*
	5	0	0	0	0	0	0	*	*	*	*	*
aw(6)	4	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*	*
aw(7)	3	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*	*
aw(8)	2	0	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*	*
aw(9)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.	*
aw(10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	trans. rel.

9. 主結果

予想 9.1 (Frobenius-Stickelberger 型公式) $n \geqq 2$ を整数とする．このとき $u^{(i)} \in \kappa^{-1}\iota(C)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ に対し,

$$\frac{\sigma_{\natural^n}(u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{i<j} \prod_{\nu=1}^{d-1} \sigma_\flat(u^{(i)} + [\zeta^\nu]u^{(j)})}{\prod_{j=1}^{n} \sigma_\sharp(u^{(j)})^{(d-1)(n-1)+1}}$$

$$= \pm \left| (x^{a_j}y^{b_j})(u^{(i)}) \right|_{1\leqq i,j\leqq n} \cdot \left| (x^{j-1})(u^{(i)}) \right|_{1\leqq i,j\leqq n}^{d-2}$$

が成り立つ．

系 9.2 (Kiepert 型公式) 上の 9.1 が成り立てば $n \geqq g$ で $u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ のとき，次の等式が成り立つ:

$$\psi_n(u) := \frac{\sigma(nu)}{\sigma_\sharp(u)^{n(d-1)(n-1)+n}} = \pm\, y^{n(n-1)/2}(u) \cdot \left| (x^{a_j}y^{b_j})^{(i-1)} \right|_{2\leqq i,j\leqq n}(u).$$

但し $^{(i-1)}$ は $(\mathrm{d}/\mathrm{d}u_{\langle 1\rangle})^{i-1}$ を意味し，行列式は $(n-1)\times(n-1)$ 型である．

9.1 と 9.2 の右辺の符号 “±” も正確に書けるが煩雑なのでここでは略す．詳しくは [Ô5] を参照されたい．

定理 9.3 予想 9.1 は (従つて 9.2 も) $(d, s) = (2, \text{any}), (3, 4), (5, 6)$, などに対して正しい．

証明は作業仮説 8.1 が示されれば，そこから比較的容易になされる．作業仮説 8.1(2) より左辺は各変換 $u^{(j)} \mapsto u^{(j)} + \ell$ $(\ell \in \Lambda)$ に関して不変であるし，また (5.2), (5.5) より $[-1]$ や $[\zeta]$ の作用によつて右辺と compatible であることは容易にわかる．

さて，予想が証明できてゐる場合はいづれも帰納法でそれを行なふのであるが，1 つの変数に着目して残りの変数を固定したとき，それがどこに零点を持つかが，左辺と右辺で一致してゐれば良いわけである．

その手順を極く簡単に説明する．まづ 8.1 を $n=1$ について証明する．この場合は幸ひにして，古典的な Riemann singularity theorem で事足りるのである．次に上記の予想を $n=2$ について証明しつつ，同時に 8.1 の $n=2$ の場合も示すことができる．詳細は [Ô5] の命題 12.1 にあるので略す．その後，上の予想を $n=g$ のときに証明する．これも，古典的な theta 函数の知識だけでできる．詳細は [Ô5] の命題 13.1 を見られたい．ここで，後ろの変数から順に $(0, 0, \cdots, 0)$ へと特殊化することで $n = g-1, g-2, \cdots, 3$ の場合が示される．各場合においては同時に対応する n についての 8.1 も示される．最後に $n = g+1, g+2, \cdots$ について，n についての帰納法で示すことができる．

Humanities and Social Sciences, Iwate University.
Ueda, Morioka, Japan.
Email : onishi@iwate-u.ac.jp