

力学系理論の工学的応用 宇宙ロケット, 2足歩行ロボットおよびマイクロカンチレバー

岐阜大学工学部 矢ヶ崎一幸 (Kazuyuki Yagasaki)
Faculty of Engineering, Gifu University

1. はじめに

力学系理論はカオスの再発見を契機として急速に発展し, 自然科学や工学の各分野に多大な影響を与えている. 最近では, これらの分野に関連した問題で起こるカオスや分岐などの非線形現象を調べるだけでなく, カオス制御 [1] やカオス通信 [2] など, 力学系理論で得られた成果を積極的に工学的に応用する試みがなされている. 本報告では, 宇宙工学, ロボット工学及びナノテクノロジーという重要な工学分野からの問題を取りあげ, 力学系理論が重要な役割を果たす工学的応用例を与える. 具体的には, 力学系理論の手法を用いることにより, 低コストで地球から月へ飛行する宇宙ロケットの軌道を設計し [3,4], エネルギー消費の低い2足歩行ロボットの機構を提案し [5], 原子間力顕微鏡 (AFM) [6-8] のプローブであるマイクロカンチレバーの動的挙動を理論的に解明する [9].

宇宙ロケットの地球から月への遷移軌道を設計する伝統的な方法は2体問題の楕円軌道に基づく Hohmann 遷移 [10] によるものである. 平面制限3体問題 [10,11] によって与えられる, ロケットのより現実的なモデルでは, 周期的, 準周期的およびカオス的なものを含むさまざまなタイプの軌道が存在することが力学系理論により示されている [12]. この性質は地球から月への新しい遷移軌道を提案するために用いられている [13-18]. 特に, 文献 [13,14] では, 低コストの地球から月への遷移軌道を設計する新しい方法が提案され, 飛行時間は約120日と長いものの, 搭載燃料が Hohmann 遷移と比較して18%低減できることを示されている. 最近, このタイプの軌道の性能は改良され, 飛行時間は約90日, 搭載燃料は Hohmann 遷移から25%まで低減できると報告されている [17].

一方, アシモに代表される現在の2足歩行ロボットでは, 歩行のために消費されるエネルギーが大きいということが大きな問題点のひとつとなっている. McGeer [19] は, 数値シミュレーションおよび物理的なモデルの実現の両方から, 2脚からなる単純な機構が, 駆動力や制御がない場合でも, 緩やかな傾きの斜面を規則的な歩行で下りていくことを示した. このとき摩擦や衝突によるエネルギー損失はロボットの重力ポテンシャルによって復元される. このような機構はそれ以前に安価な玩具などでも使用されているものである. ある範囲の角度の斜面を下る場合に限定されるものの, その後このアイデアはより現実的な受動歩行ロボットの2Dおよび3Dモデルに改良あるいは拡張されている [20-23].

また, タッピング・モードで動作する AFM は, 高分子, DNA やたんぱく質など柔らかい物質に対して, ナノスケールでの表面の測定のため広く用いられている [24]. 標準的な原子間力顕微

鏡では、長さが数百 μm 程度のカンチレバーが共振振動数付近で加振され、測定中その振幅が一定に保たれるよう加振力が制御される。初期の研究により、試料表面付近において2つの安定な状態が存在し、加振周波数が主共振点付近で上下されるときチップの応答がヒステレシスを示すことが知られている。この挙動は調和振動子と、van der Waals および Derjaguin-Muller-Toporov (DMT) 力 [25] などによってモデル化されるポテンシャルの吸引および反発領域との相互作用の結果として説明されている。その単純なモデルの非線形挙動は主として数値シミュレーションによって調べられ、多重尺度法あるいは平均法 [26] と類似な方法に基づく解析的な研究も行われている [24]。最近、Lee ら [27] は、微分方程式の数値的な解の接続および分岐解析のために開発され、力学系の分野において広く用いられている、AUTO [28] と呼ばれる現代的な計算機ツールによる数値解析を行っている。高配向熱分解性黒鉛試料に対して彼らの数値計算と実験結果は良く一致し、数値計算で得られた4種類のサドル・ノード分岐により実験で観測された複数のジャンプ現象の説明に成功している。

ここでは、宇宙ロケットのモデルとして地球と月を含む平面制限3体問題で太陽からの影響による摂動を受けるものを採用し、地球の高度 167km の静止軌道から月の高度 100km の静止軌道までの、低コストで適度な飛行時間を有する遷移軌道を求める。また、歩行ロボットについては、踵部に取り付けられたモータでのみ駆動される、2つの脚と足をもつモデルを考え、エネルギー消費の低い歩行パターンを求める。対象とした問題のある非線形境界値問題に帰着し、コンピュータ・ソフトウェア AUTO [28] を用いて、解を数値的に求めて解の接続を行い、適切な軌道を計算する。Hohmann 遷移軌道よりも 15% 低コストで約 43 日間の飛行時間を有するロケットの遷移軌道や、エネルギー消費の少ないロボットの安定な歩行パターンが得られる。また、タッピング・モード AFM におけるマイクロカンチレバーの動的挙動に対して、平均法 [26, 29] および、力学系理論でよく知られた分数調波 Melnikov の方法 [29, 30] の拡張版 [31] を用いた理論解析を行い、文献 [27] の数値計算および実験結果に対する理論的な説明を与える。文献 [32, 33] のように、これらの解析で必要となる計算の多くの部分は数値的に行われる。結果の詳細については [3-5, 9] を参照されたい。

2. 宇宙ロケット

2.1. 運動方程式 まず、地球から月へ飛行する宇宙ロケットに対して低エネルギーの遷移軌道を求める問題を考える。図 1 に示すような、地球 (E) と月 (M) の位置が固定された回転座標系を考える。地球と月の距離が 1 になるよう無次元化を行い、宇宙ロケットの位置を (x, y) と表す。また、座標原点から太陽 (S) までの距離を ρ とし、太陽の位置を $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ と表す。ロケットの運動方程式は近似的に次式で与えられる。

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} \Omega_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \Omega_1(x, y, \theta), \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial}{\partial y} \Omega_0(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \Omega_1(x, y, \theta), \quad \dot{\theta} = \omega_S \quad (1)$$

ここで、地球と月の質量の和が 1、回転座標系の角速度が 1 になるよう無次元化され、地球と月の質量は、それぞれ、 $1 - \mu$ と μ であり、 m_S は太陽の質量、 ω_S はこの回転座標系における太陽の角速度である。また、

$$r_E = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_M = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}, \quad r_S = \sqrt{(x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2}$$

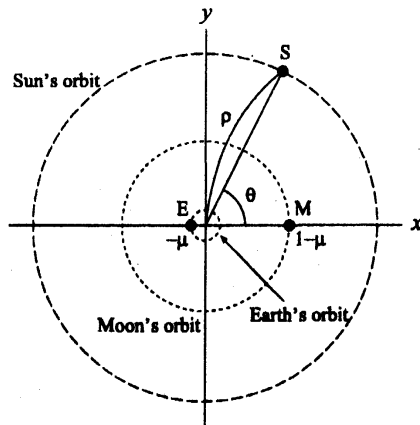


図 1. 回転座標系

として

$$\Omega_0(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_E} + \frac{\mu}{r_M}, \quad \Omega_1(x, y) = \frac{m_S}{r_S} - \frac{m_S}{\rho^2}(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

である。 $m_S = 0$ のとき

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega_0(x, y)$$

は保存量で、ロケットのエネルギーを表す。

2.2. 地球から月への遷移軌道 地球の静止軌道から月の静止軌道への宇宙ロケットの遷移軌道を構成する。まず、地球の半径 r_s の静止軌道上で速度が Δv_s だけ増加するように噴射する (図 2(a))。次に、軌道が月の付近に到達した場合を考え、 r_0 をロケットの軌道と月の最短距離とする (図 2(b))。ロケットを月の半径 r_e の静止軌道に乗せるために Hohmann 遷移のように楕円軌道を用いる。ロケットは、速度がまず $\Delta v_0 = v_0 - \sqrt{2\mu r_e / r_0(r_0 + r_e)}$ だけ減速され楕円軌道に投入され、その後 $\Delta v_e = \sqrt{2\mu r_0 / r_e(r_0 + r_e)} - \sqrt{\mu / r_e}$ だけ減速されて半径 r_e の円軌道に投入される (図 2(b))。ここで、月からの影響のみを考慮している。地球の静止軌道から月の静止軌道まで遷移するために必要な全速度変化は $\Delta v = |\Delta v_s| + |\Delta v_0| + |\Delta v_e|$ となる。

最初の噴射 Δv_s と2つの静止軌道を固定するとき、全速度変化 Δv は $r_0 = r_e$ で最小となることが証明される [3]。よって、式 (1) の軌道で以下の性質を満たすものを探す：(i) 半径 r_s の地球の静止軌道を出発し、半径 r_e の月の静止軌道に到達する；(ii) 出発点と到達点における速度が地球あるいは月に固定された非回転座標系で円軌道に接する；(iii) Δv は可能な限り小さい。また、 $m_S = 0$ のとき、最小の全速度変化 Δv と月の近くでの最終の噴射 Δv_0 (このとき $\Delta v_e = 0$ となることに注意) は近似的に軌道のエネルギー E のみに依存する [3]。

2.3. 低エネルギー遷移軌道に対する境界値問題 T をロケットがその出発点から到達点までの (無次元化) 飛行時間とする。出発点と到達点は、それぞれ、地球と月の中心から r_s と r_e の距離にあるので、

$$(x(0) + \mu)^2 + (y(0))^2 = r_s^2, \quad (x(T) - 1 + \mu)^2 + (y(T))^2 = r_e^2 \quad (2)$$

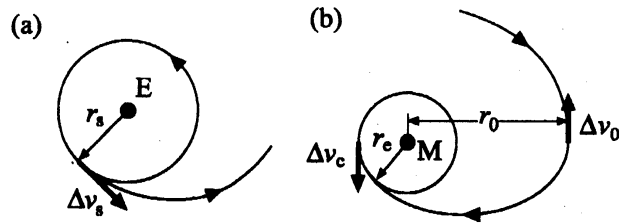


図 2. 地球から月への遷移軌道：(a) 地球での静止軌道上での噴射 Δv_s ；(b) 月付近での2回の噴射 Δv_0 と Δv_e

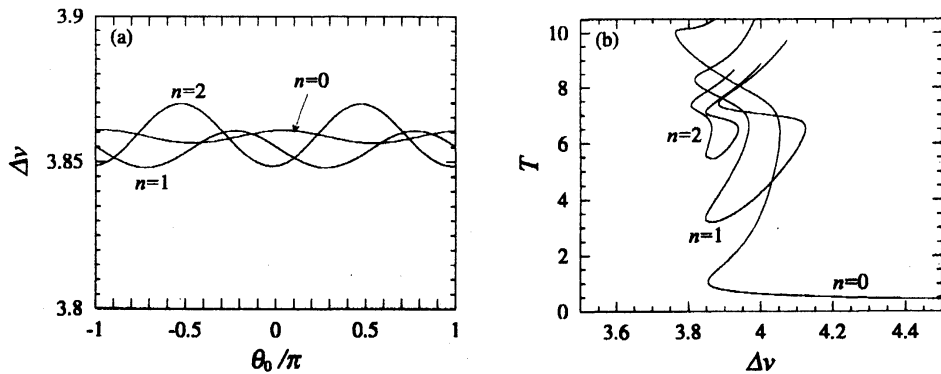


図 3. AUTO による数値計算結果：(a) 解の接続 (T を固定し, Δv と θ_0 を変化させた場合)；(b) Δv の最小値の接続 (T と θ_0 を変化させた場合)

となる。出発点と到達点での地球と月に対する相対速度は相対的な位置ベクトルに直交するので、

$$\begin{aligned} (x(0) + \mu)(\dot{x}(0) - y(0)) + y(0)(\dot{y}(0) + x(0) + \mu) &= 0, \\ (x(T) - 1 + \mu)(\dot{x}(T) - y(T)) + y(T)(\dot{y}(T) + x(T) - 1 + \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

となる。地球から月への遷移軌道の速度変化は、

$$\Delta v_s = \sqrt{(\dot{x}(0) - y(0))^2 + (\dot{y}(0) + x(0) + \mu)^2} - \sqrt{\frac{1 - \mu}{r_s}}$$

および

$$\Delta v_e = \sqrt{(\dot{x}(T) - y(T))^2 + (\dot{y}(T) + x(T) - 1 + \mu)^2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_e}}$$

として、 $\Delta v = \Delta v_s + \Delta v_e$ と求められる。式(1)-(3)は最適な遷移軌道を求めるための非線形境界値問題を与える。コンピュータ・ソフトウェア AUTO [28] を用いて、この問題を数値的に解き、 Δv が可能な限り小さくなるような軌道を求める。

2.4. 数値例 $r_s = 0.01703$ および $r_e = 0.004781$ に対する数値計算結果を与える。これらの値は、それぞれ、地球と月の高度 167 km と 100 km の静止軌道に対応する。Hohmann 遷移に対しては初期噴射として $\Delta v_s \approx 3.065$ が必要となる [3]。

図 3 に AUTO による計算結果を示す。ここで、 $\theta_0 = \theta(0)$ は最初の噴射を行う時刻での太陽の方向を表す。これらの結果を得るために、初期軌道として、式(2)と(3)を満足し、地球と月の静止軌道を経る楕円軌道を n 回半 ($n = 0, 1, 2$) 回る Hohmann 型の遷移軌道を採用した。最初、太陽の質量を $m_s = 0$ とおき、月の質量を $\mu = 0$ から 0.01215 まで、次に $m_s = 3.289 \times 10^5$ まで増加させた。その後、固定した T の値に対して Δv と θ_0 を変化させた。その結果が図 3(a) である。さらに、各々の n の値に対して、 Δv の 2 つの極小値を T と θ_0 を変化させて接続することにより、図 3(b) の結果が得られた。

図 3(b) において、各々の n に対して、速度変化 Δv はいくつかの極小値を有している。これらの Δv の極小値で計算された遷移軌道を図 4 に示し、また、それらの性能を表 1 に与える (括弧内は $m_s = 0$ の場合に対するものである)。図 4 で “o” は地球と月の位置を表す。太陽の影響を

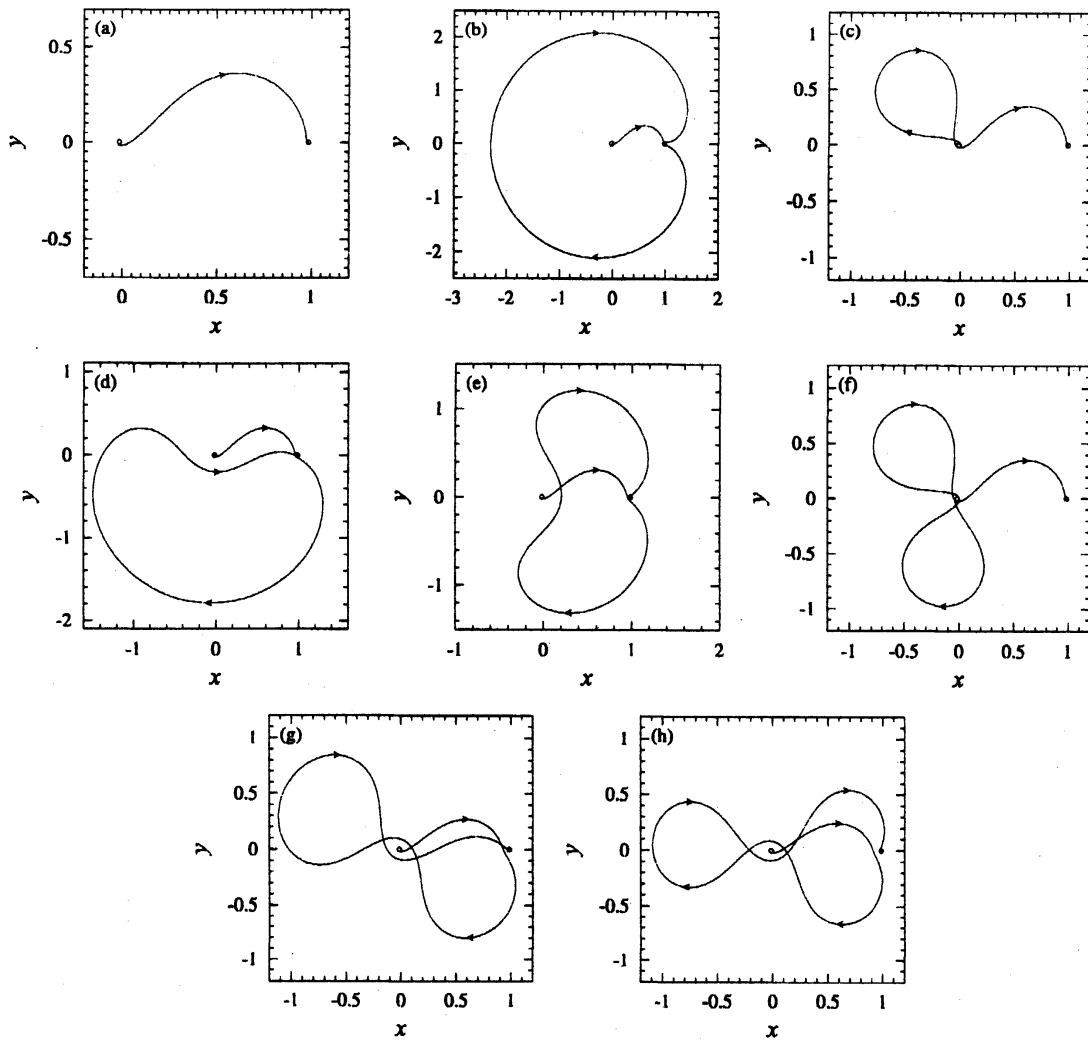


図 4. 低エネルギーの地球から月への遷移軌道 (各々の図における Δv と T の値は表 1 を参照)

表 1. 低エネルギー遷移軌道の性能

Δv	Δv_s	Δv_0	T	θ_0/π	図 4
3.855 (3.857)	3.063 (3.063)	0.792 (0.794)	1.058 (1.052)	0.5309	(a)
3.763 (3.85)	3.062 (3.062)	0.701 (0.788)	9.993 (9.511)	0.8197	(b)
3.847 (3.853)	3.062 (3.062)	0.785 (0.79)	3.32 (3.297)	-0.7343	(c)
3.883 (3.847)	3.061 (3.061)	0.822 (0.786)	7.404 (7.269)	-0.7923	(d)
3.818 (3.843)	3.061 (3.061)	0.757 (0.782)	8.277 (8.201)	0.6011	(e)
3.848 (3.857)	3.063 (3.063)	0.784 (0.794)	5.579 (5.526)	-0.0358	(f)
3.848 (3.831)	3.058 (3.058)	0.79 (0.772)	7.105 (7.076)	-0.9918	(g)
3.808 (3.823)	3.057 (3.057)	0.751 (0.766)	7.353 (7.347)	0.4724	(h)

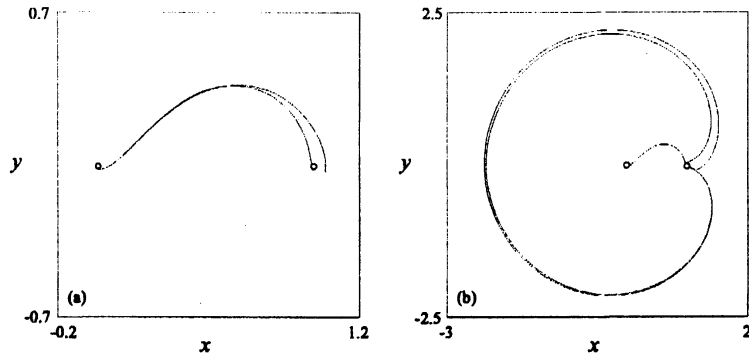


図 5. わずかに初期条件の異なる軌道: (a) $\Delta v = 3.855$, $T = 1.058$ のとき $\dot{x}(0) = 9.542599, 9.552599$; (b) $\Delta v = 3.763$, $T = 9.993$ のとき $\dot{x}(0) = 9.312612, 9.312632$.

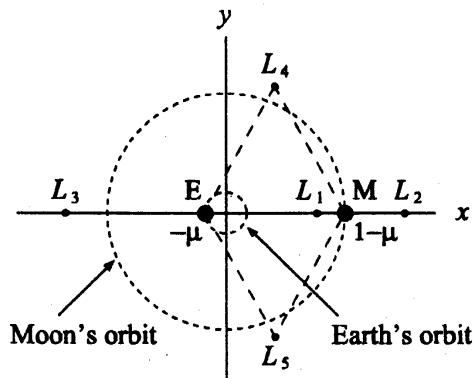


図 6. 平面制限 3 体問題における Lagrange 点

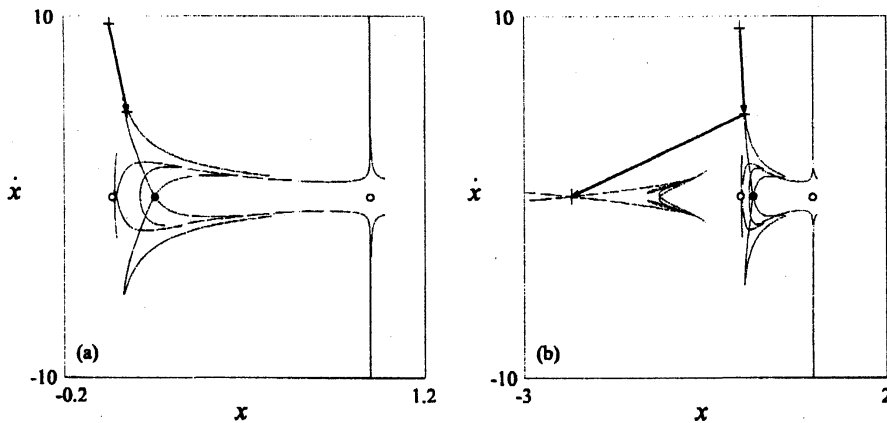


図 7. Lagrange 点 L_1 近傍の周期軌道の安定多様体と不安定多様体: 遷移軌道が “+” と矢印, 周期軌道が “●” で表されている

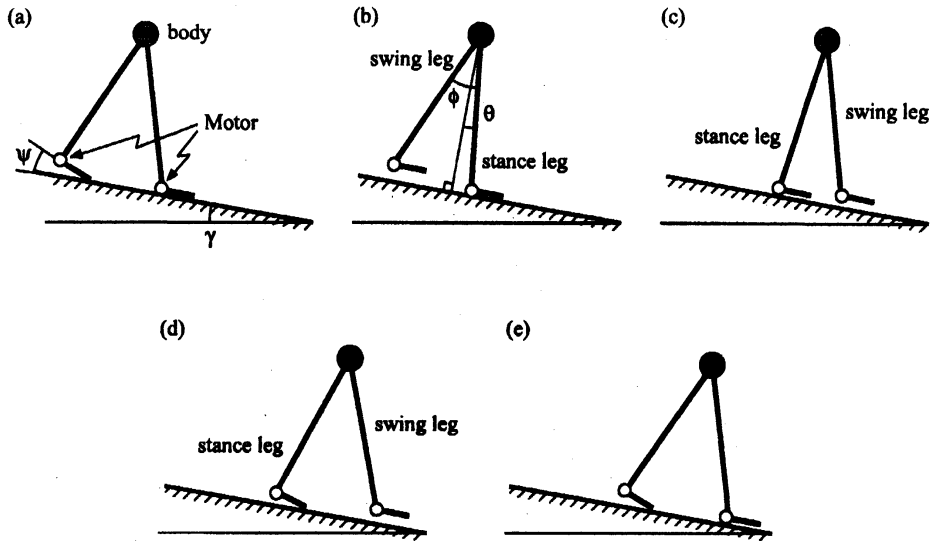


図 8. 準受動歩行ステップ

考慮した場合の方が，図 2(d) と (g) の 2 つの場合を除き，特に長い飛行時間を持つものに対しては，性能はより優れていることがわかる。

古典的な Hohmann 遷移は月の付近でもう一度噴射が必要であり，例えば，月付近での総噴射量は約 0.828 (0.848 km/s) と評価されている [14]。よって，飛行時間がそれほど長くなく，高々 $T = 9.993$ (約 43 日間) であるにもかかわらず，図 4 の遷移軌道では必要となる搭載燃料が Hohmann 遷移と比較して 15.3% まで低減されている。また，初期噴射も Hohmann 遷移の場合 ($\Delta v_s = 3.065$) よりも幾分低くなっている。

2.5. 軌道の安定性 図 5 では，求められた遷移軌道に対して，初期条件が僅かに異なる軌道がプロットされている。これら 2 つの軌道の差は最終的には大きくなり，遷移軌道が不安定であることが確認できる。

この不安定性の起源を明らかにするために， $m_S = 0$ とした制限 3 体問題を考える。式 (1) は Lagrange 点と呼ばれる 5 個の平衡点 (L_1 から L_5) を有する (図 6 を参照)。特に， L_1 はサドル・センターで，その周りには不安定周期軌道の族が存在する。図 7 に，同じエネルギーをもつ周期軌道の安定多様体と不安定多様体および遷移軌道を，Poincaré 断面 $\{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \mid y = 0, \dot{y} > 0\}$ 上に描いた結果を与える。遷移軌道は安定多様体と不安定多様体の近くを通過し，そのために不安定となることがわかる。

3. 2 足歩行ロボット

3.1. モデル 次に，図 8 のように，2 つの脚と足を有し，傾き γ の斜面を下りる歩行ロボットを考える。脚と足は踵部に取り付けられたモータに連結されて駆動され，また，脚は腰部で摩擦のない蝶番で連結されているものとする。図 8(a) は，後ろの支持脚が斜面に対して角度 ψ だけ傾き，前の遊脚が斜面に衝突した瞬間の状態を示している。その後，次にその踵が斜面に衝突する図 8(e) の状態まで，図 8(a) で後ろにある脚が遊脚となる。支持脚が斜面法線方向となす角を θ

とし、支持脚と遊脚のなす角を ϕ とする。ある角度 $\theta_0 > 0$ に対して、支持脚のモーダで発生するトルクは、 $\theta - \gamma > -\theta_0$ では零、 $\theta - \gamma \leq -\theta_0$ では $T_0 = -K_1(\psi + \gamma - \psi_0) - K_2\dot{\psi}$ ($K_j, j = 1, 2$, はある定数) とし、支持脚の足と水平方向のなす角が $\psi + \gamma = \psi_0$ となるようフィードバック制御されるものとする。よって、 $\theta - \gamma > -\theta_0$ のときは、支持脚はつねに踵のまわりを回転し (図 8(b) を参照)、 $\theta - \gamma \leq -\theta_0$ のときは、踵が上がるか上がらないかによって踵かつま先のまわりを回転する (図 8(c) と (d) を参照)。さらに、足の質量と慣性モーメントは小さいものとして無視し、遊脚は支持脚を越えるとき、斜面にぶつからないものとする。

M と m を、それぞれ、ボディと脚の質量、 J を脚の腰まわりの慣性モーメント、 l を脚の長さ、 r を腰と脚の重心との距離、 l_1 をつま先から踵までの長さとする。時間を $t \mapsto (\sqrt{g/l})t$ と無次元化し、以下のパラメータを導入する。

$$\alpha = \frac{J}{Ml^2}, \quad \beta = \frac{m}{M}, \quad \kappa = \frac{r}{l}, \quad \mu = l_1/l, \quad k_1 = K_1/Mgl, \quad k_2 = K_2/M\sqrt{gl^3}$$

また、図 8(c) の過程において、斜面から支持脚の踵部に作用する垂直抗力は、ボディに作用する重力によって無次元化すると、次式で与えられる。

$$f_c = (1 + 2\beta) \cos \gamma - (1 + \beta(2 - \kappa))(\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ + \beta \kappa [(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) \sin(\phi - \theta) - (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 \cos(\phi - \theta)] + \frac{k_1}{\mu} (\gamma - \psi_0) \geq 0$$

$f_c = 0$ となるとき支持脚の踵が持ち上がり始める。

一方、遊脚の踵は

$$\cos(\phi - \theta) = \cos \theta + \mu \sin \psi \quad (4)$$

となるとき斜面と衝突する。衝突後、遊脚は支持脚に、支持脚は遊脚となる (図 8 を参照)。後ろのつま先に対して、衝突直前の速度は零で、衝突時斜面との衝撃的な反力は生じないものと仮定する。また、前の踵に対しては衝突直後の速度は零であるものとする。腰のまわりの後ろの脚の角運動量と前の踵まわりの全体の角運動量が保存されることより、次式が得られる。

$$\theta_2^+ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \theta_2^-, \quad Q^+(\phi^+) \dot{\theta}_2^+ = Q^-(\theta_3^-) \dot{\theta}_3^- \quad (5)$$

ここで、上添え字 “+” と “-” は、それぞれ、衝突直後と衝突直前を意味し、 $\theta_2 = (\theta, \phi)^T$ 、 $\theta_3 = (\theta, \phi, \psi)^T$ (T は転置演算) であり、

$$Q^+(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \kappa \cos \phi & -\alpha \\ 1 + 2\alpha + 2\beta(1 - \kappa) - 2\beta \kappa \cos \phi & -\alpha + \beta \kappa \cos \phi \end{pmatrix}, \\ Q^-(\theta_3) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \kappa & 0 \\ 2\alpha - 2\beta \kappa + (1 + 2\beta(1 - \kappa)) \cos \phi & -\alpha + \beta \kappa \\ \beta \kappa \mu \sin(\theta + \psi) \\ \beta \kappa \mu \sin(\theta + \psi) - (1 + \beta(2 - \kappa)) \mu \sin(\theta - \phi + \psi) \end{pmatrix}$$

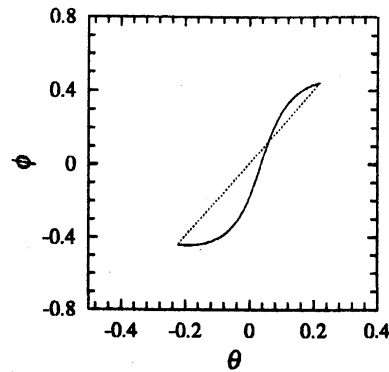


図 9. 跳りのない周期的な歩行パターン ($\beta = 0.5$, $\gamma \approx 0.02874281$)

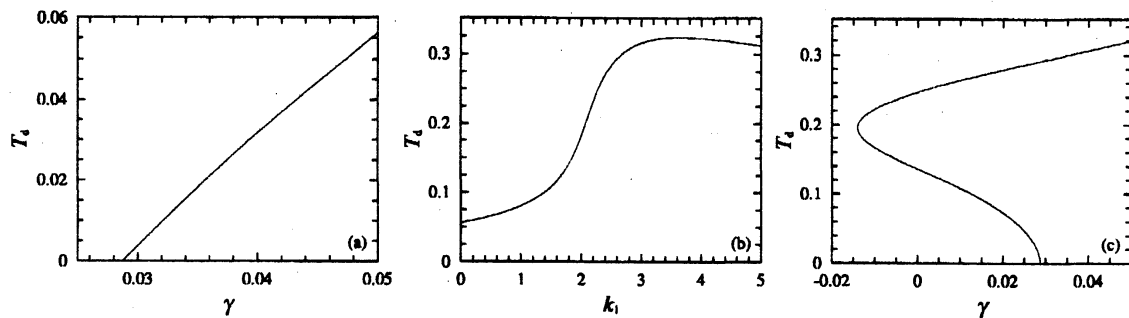


図 10. AUTO による周期的な歩行パターンの数値的な接続 ($\beta = 0.5$, $k_2 = 0$, $\theta_0 = 0.25$, $\psi_0 = 0.2$): (a) $k_1 = 0$; (b) $\gamma = 0.05$; (c) $k_1 = 3.2$

である。

3.2. 周期的な歩行パターンに対する境界値問題 図 8(c) の過程を含まない周期的な歩行パターンを求める。図 8(b) と (d) の過程を分けて取り扱い、各々の過程の開始時刻を $t = 0$ とし、 T_b と T_d を、それぞれ、過程 (b) と (d) の (無次元化) 継続時間とする。過程 (b) の $t = T_b$ と過程 (d) の $t = 0$ で $\theta - \gamma = -\theta_0$ であるから、

$$\theta_b(T_b) = \theta_d(0) = \gamma - \theta_0 \quad (6)$$

となる。ここで、下添え字 “b” と “d” は、それぞれ、過程 “(b)” と “(d)” を意味する。モーターがトルクを供給し始めるとき、

$$\phi_b(T_b) = \phi_d(0), \quad \dot{\theta}_b(T_b) = \dot{\theta}_d(0), \quad \dot{\phi}_b(T_b) = \dot{\phi}_d(0) \quad (7)$$

であり、その時点で支持脚の踵はまだ持ち上がらないので

$$\psi_d(0) = \dot{\psi}_d(0) = 0 \quad (8)$$

となる。また、過程 (d) の時刻 $t = T_d$ で踵は斜面に衝突し、式 (4) より、

$$\cos(\theta_d(T_d)) + \mu \sin(\psi_d(T_d)) - \cos(\phi_d(T_d) - \theta_d(T_d)) = 0 \quad (9)$$

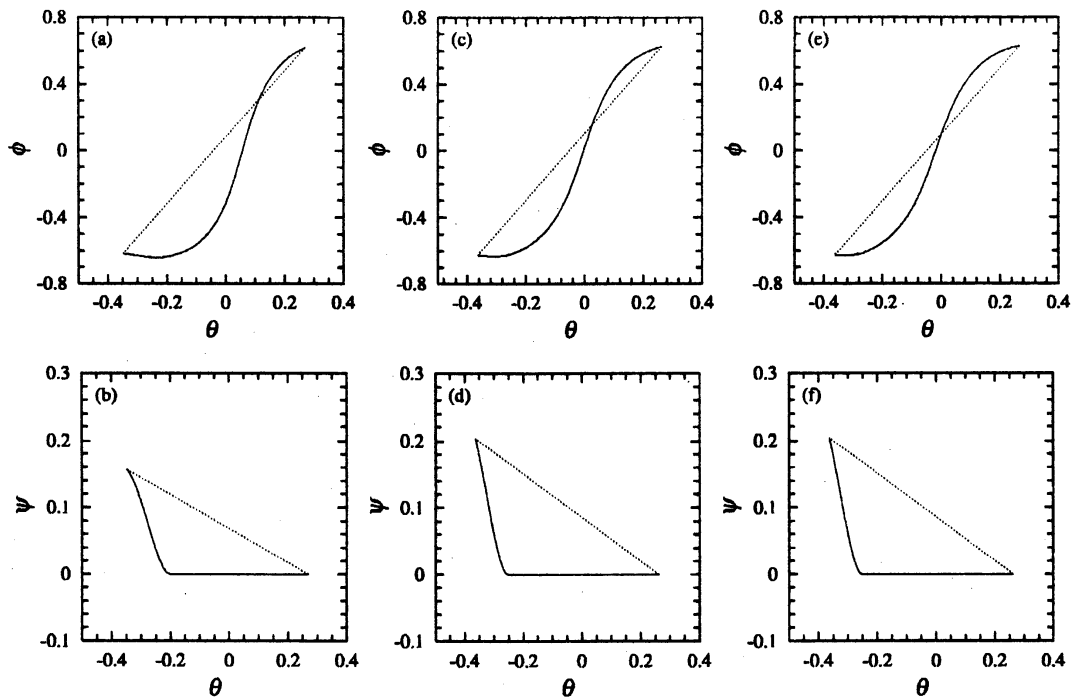


図 11. 図 10 で見つけれられた周期的な歩行パターン: (a), (b) $\gamma = 0.05$, $k_1 = 3.2$; (c), (d) $\gamma = 0$, $k_1 = 3.2$; (e), (f) $\gamma = -0.01$, $k = 3.2$

となる. さらに, 切り替え条件 (5) から周期歩行パターンは

$$\theta_b(0) = \theta_d(T_d) - \phi_d(T_d), \quad \phi_b(0) = \phi_d(T_d) \quad (10)$$

および

$$Q^+(\phi_b(0)) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_b(0) \\ \dot{\phi}_b(0) \end{pmatrix} = Q^-(\theta_d(T_d), \phi_d(T_d), \psi_d(T_d)) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_d(T_d) \\ \dot{\phi}_d(T_d) \\ \dot{\psi}_d(T_d) \end{pmatrix} \quad (11)$$

を満たす. 再びコンピュータソフトウェア AUTO [28] を用いて, 過程 (b) と (d) における運動方程式および (6)-(11) からなる非線形境界値問題を数値的に解き, 過程 (b) と (d) からなる周期的な歩行パターンを求める.

3.3. 数値例 $\alpha/\beta = 0.25$, $\kappa = 0.5$ および $\mu = 0.15$ に対する数値計算結果を与える. $\beta = 0.5$, $\gamma \approx 0.02874281$, $\min \theta(t) = -0.25$ の場合の 2 脚歩行ロボットに対する, 蹴りのない受動的な周期的な歩行パターン (図 9 を参照) を初期軌道として選び, 解の数値的な接続を行った. その結果を図 10 に与える. まず, 位置フィードバックゲイン $k_1 = 0$ に対して斜面の傾き角 γ を増加させ (図 10(a) を参照), 次に $\gamma = 0.05$ と固定して k_1 を増加させた (図 10(b) を参照). 最後に, $k_1 = 3.2$ に対して γ の値を減少させた (図 10(c) を参照). ここで, 他のパラメータの値は $\beta = 0.5$, $k_2 = 0$, $\theta_0 = 0.25$, $\psi_0 = 0.2$ と固定した. これらの計算により得られた周期的な歩行パターンを図 11 に示す (破線は踵の衝突時のジャンプを表す). また, 図 11(c)-(f) の軌道は安定, 図 11(a) と (b) の軌道は不安定であることを確認しており, 水平面や登り坂に対しても安定な周期

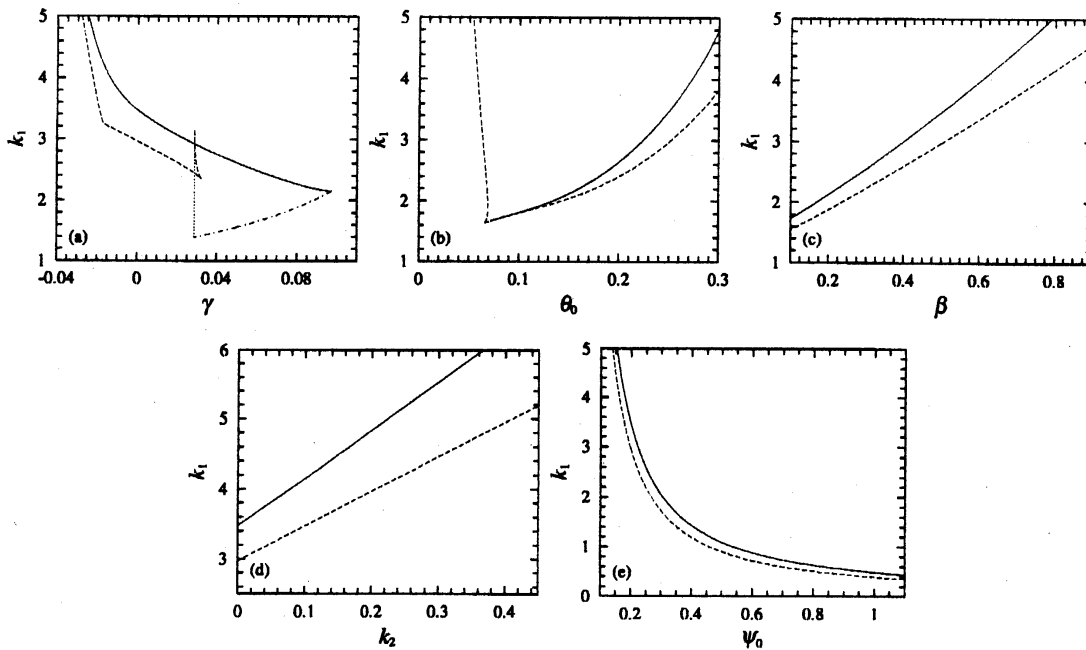


図 12. 安定な、蹴りのある 1-周期歩行パターンの存在するパラメータ領域: (a) $\beta = 0.5, k_2 = 0, \theta_0 = 0.25, \psi_0 = 0.2$; (b) $\beta = 0.5, \gamma = 0, k_2 = 0, \psi_0 = 0.2$; (c) $\gamma = 0, k_2 = 0, \theta_0 = 0.25, \psi_0 = 0.2$; (d) $\beta = 0.5, \gamma = 0, \theta_0 = 0.25, \psi_0 = 0.2$; (e) $\beta = 0.5, \gamma = 0, k_2 = 0, \theta_0 = 0.25$

的歩行パターンが存在する。

図 12 は、モータのトルク発生直後に支持脚の踵が持ち上がる、安定な 1-周期歩行パターンが存在するパラメータ領域を示している。これらの領域の境界上では、サドル・ノードまたは周期倍加分岐（破線または実線で表示）が発生するか、 $f_c = 0$ （一点鎖線）あるいは $\min \theta(t) = -\theta_0$ （点線）となっている。図より、広いパラメータ範囲においてこのような周期歩行パターンが存在することがわかる。特に、 θ_0 あるいは β を減少させた場合、位置フィードバックゲイン k_1 を 1.5 まで減少させても水平面上の安定な周期歩行パターンが存在する。さらに、速度フィードバックがある場合、必要となる位置フィードバックゲインが増加し、また、 ψ_0 を増加させると、踵部のモータで生じる最大トルクをいくらか減少できることがわかる。

4. マイクロカンチレバー

4.1. 解析モデル 図 13 にタッピングモード AFM のマイクロカンチレバーに対する解析モデルを示す。はりの基礎部は圧電アクチュエータにより加振され、その変位は $y_0 \cos \Omega t$ で与えられる。文献 [27] のように、タッピングモード AFM のチップと試料間の相互作用として球と平面の間の van der Waals 力および DMT 接触力 [25] を仮定する。 z をチップと試料表面間の距離、 a_0 を分子間距離とすると、チップと試料表面間の相互作用は、 $z > a_0$ のとき van der Waals 力、 $z \leq a_0$ のとき DMT 接触力により表される。

Δ を、相互作用がない場合におけるチップと試料表面間の距離とする。関連した線形問題の 1

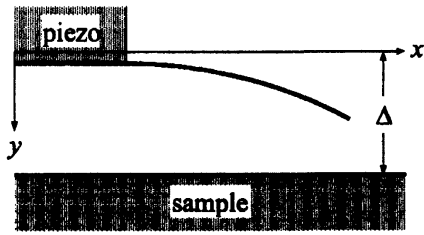
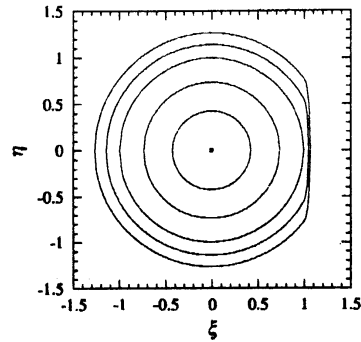


図 13. マイクロカンチレバー

図 14. $\beta = 4.55 \times 10^2$, $a = 4.22 \times 10^{-3}$ に対する非振動系 (13) の相平面

次モードで近似し, Galerkin 法を適用することにより, カンチレバーのモデルとして

$$\ddot{\xi} + \delta \dot{\xi} + \xi + f(1 - \xi) = \gamma(\omega) \cos \omega t,$$

あるいは, 1 階微分方程式系として

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\xi - f(1 - \xi) - \delta \eta + \gamma(\omega) \cos \omega t \quad (12)$$

が得られる. ここで, 時間は $t \mapsto t + \theta(\omega)/\omega$ とシフトされ, $a = a_0/\Delta$, $\gamma_0 = \gamma_0/\Delta$,

$$\alpha = \frac{2CR}{3\omega_1^2 \rho A \Delta^3 l}, \quad \beta = \frac{16E_* \sqrt{\Delta R}}{3\omega_1^2 \rho A l}$$

として,

$$f(\zeta) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\zeta^2} & \text{for } \zeta > a; \\ \beta(a - \zeta)^{3/2} - \frac{\alpha}{a^2} & \text{for } \zeta \leq a, \end{cases}$$

$$\gamma(\omega) = \gamma_0 \sqrt{(\kappa_1 \omega^2 + 1)^2 + (\kappa_1 \delta \omega)^2}, \quad \theta(\omega) = \arctan \left(\frac{\kappa_1 \delta \omega}{\kappa_1 \omega^2 + 1} \right)$$

である. また, ρ , A および l は, それぞれ, はりの密度, 断面積および長さ, C および E_* は, それぞれ, チップと試料に対する Hamaker 定数および見かけ上の弾性係数, R はチップ半径, ω_1 ははりの 1 次線形モードの固有角振動数, $\kappa_1 \approx 0.56598$ は 1 次線形モードによって決定される定数である. 式 (12) の導出の詳細は文献 [9] を参照せよ.

以下の計算では, $\Delta = 90\text{nm}$ とし, 表 2 に与えられる, 文献 [27] からの値を用いる. α , δ , γ_0 は小さな定数として見なす. 以下で用いられる手法は滑らかな系に対してのみ適用可能であるが, 式 (12) は滑らかではない. 解析を正当化するため, 滑らかでない点 $\xi = 1 - a$ を含む小さな長さ 2μ の区間を導入し, $\mu \rightarrow 0$ の極限を考える. 以下ではつねにこの取り扱いを採用する.

4.2. 非振動系 $\alpha = \gamma = \delta = 0$ のとき, 式 (12) は次のようになる.

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\xi - f_0(1 - \xi) \quad (13)$$

表 2. 計算で用いるカンチレバーと試料に対する定数 [27]

物理量	値
チップ半径	$R = 10 \text{ nm}$
カンチレバー	
断面積	$A = 8.09 \times 10^{-11} \text{ m}^2$
断面 2 次モーメント	$I = 3.57 \times 10^{-23} \text{ m}^4$
密度	$\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$
弾性率	$E = 130 \text{ GPa}$
有効弾性率	$E_* = 10.2 \text{ GPa}$
1 次モードの固有角振動数	$f_1 = 44 \text{ kHz}$
Q 値	$Q = 33.3$
Hamaker 定数	$C = 2.96 \times 10^{-19} \text{ J}$
分子間距離	$a = 3.8 \text{ \AA}$

ここで,

$$f_0(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{for } \zeta > a; \\ \beta(a - \zeta)^{3/2} & \text{for } \zeta \leq a \end{cases} \quad (14)$$

である. 非摂動系 (13) は, Hamilton 関数

$$H(\xi, \eta) = V_0(\xi) + \frac{1}{2}\eta^2, \quad (15)$$

を有する 1 自由度 Hamilton 系である. ここで,

$$V_0(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + \int_0^\xi f_0(1 - \zeta)d\zeta$$

はポテンシャルである. 式 (13) の相平面の軌跡を図 14 に示す. 原点に渦心点, そのまわりに周期軌道の族が存在することがわかる.

その周期軌道の族を Hamilton エネルギー $h \geq 0$ によってパラメータ化し, $(\xi^h(t), \eta^h(t))$ を Hamilton エネルギー h をもつ周期軌道とする. 一般性を失うことなしに, $\xi^h(t)$ を偶関数, $\eta^h(t)$ を奇関数と仮定する. T^h によって $(\xi^h(t), \eta^h(t))$ の周期を表す. $(\xi_L^h, 0)$ と $(\xi_R^h, 0)$ ($\xi_L^h = -\sqrt{2h} < \xi_R^h$) をその周期軌道が相平面上で ξ -軸を横切る 2 点とし, $\xi^h(0) = \xi_L^h$, $\xi^h(T^h/2) = \xi_R^h$ とする. 式 (13) と (15) から, $(\xi^h(t), \eta^h(t))$ 上 $0 \leq t \leq T^h/2$ に対して

$$\eta = \frac{d\xi}{dt} = \sqrt{2(h - V_0(\xi))} \quad (16)$$

となる. 式 (16) を整理して積分すると, $0 \leq t \leq T^h/2$ に対して,

$$t = \int_{\xi_L^h}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2(h - V_0(\xi))}}$$

となる. よって,

$$T^h = 2 \int_{\xi_L^h}^{\xi_R^h} \frac{d\xi}{\sqrt{2(h - V_0(\xi))}}$$

また, $\Omega^h = 2\pi/T^h$ から角振動数も求められる.

もし $h \leq (1-a)^2/2$ ならば, 周期軌道 $(\xi^h(t), \eta^h(t))$ は式 (13) の線形部分の応答であり, $h > (1-a)^2/2$ に対しては,

$$T^h = 2(\pi - \tau^h) + 2 \int_{1-a}^{\xi_R^h} \frac{d\xi}{\sqrt{2(h - V_0(\xi))}}$$

となる. ここで, $\tau^h = \arccos((1-a)/\sqrt{2h})$ である.

4.3. 平均法による解析 $\xi < 1-a$ の場合に対して, 平均法 [26] を用いて, 系 (12) を解析する. $0 < \epsilon \ll 1$ となる微小パラメータ ϵ を導入し, $\alpha = \epsilon\bar{\alpha}$, $\delta = \epsilon\bar{\delta}$, $\gamma_0 = \epsilon\bar{\gamma}_0$ とする. $\omega^2 - 1 = O(\epsilon)$ と仮定し, $\epsilon\nu = \omega^2 - 1$ とする.

4.3.1. $\max_t \xi(t) < 1-a$ のとき まず,

$$\xi = r \cos(\omega t + \phi), \quad \eta = -r\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (17)$$

とおく. 式 (17) を式 (12) に代入し, 得られた方程式に平均化を施すと, 次式が得られる.

$$\dot{r} = -\frac{\epsilon}{2} [\bar{\delta}r + \bar{\gamma}_0(\kappa_1 + 1) \sin \phi], \quad r\dot{\phi} = -\frac{\epsilon}{2} \left[\nu r + \frac{\bar{\alpha}r}{(1-r^2)^{3/2}} + \bar{\gamma}_0(\kappa_1 + 1) \cos \phi \right] \quad (18)$$

ここで, $\omega = 1 + O(\epsilon)$ を用いた.

点 $(r, \phi) = (r_0, \phi_0)$ を平均化方程式 (18) の平衡点とする. このとき, $\rho = (1-r_0^2)^{1/2}$ とおくと,

$$(1-\rho^2) \left(\bar{\delta}^2 + \nu^2 + \frac{2\bar{\alpha}\nu}{\rho^3} + \frac{\bar{\alpha}^2}{\rho^6} \right) = \bar{\gamma}_0^2(\kappa_1 + 1)^2 \quad (19)$$

となる. 式 (19) の左辺を $g(\rho)$ とする. ν の値が

$$\nu_{\pm} = -\frac{1}{2\rho_0} \left[-\left(\frac{\bar{\alpha}}{\rho_0^2} - \frac{3\bar{\alpha}}{\rho_0^4} \right) \pm \sqrt{\chi(\rho_0)} \right]$$

に等しいとき, $(dg/d\rho)(\rho_0) = 0$ となる. ここで,

$$\chi(\rho_0) \equiv \left(\frac{\bar{\alpha}}{\rho_0^2} - \frac{3\bar{\alpha}}{\rho_0^4} \right)^2 + 2 \left(\frac{4\bar{\alpha}^2}{\rho_0^4} - \frac{6\bar{\alpha}^2}{\rho_0^6} - 2\bar{\delta}^2\rho_0^2 \right) > 0$$

である. $\sqrt{1-(1-a)^2} < \rho_0 < \rho_*$ に対して $\nu = \nu_{\pm}$, $\gamma_0 = \sqrt{g(\rho_0)}/(\kappa_1 + 1)$ の近くで調和軌道のサドルノード分岐 [29] が起こる. ここで, $\chi(\rho_*) = 0$, $\rho_* \approx 0.13$ である. さらに, $(dg/d\rho)(\rho) < 0$ または $(dg/d\rho)(\rho) > 0$ であるかに依存して, サドルノード分岐で発生する調和軌道は安定または不安定となる.

4.3.2. $\max_t \xi(t) > 1-a$ のとき 式 (17) において $r = 1-a + \epsilon^{1/2}u$ とおく. $\omega t + \phi \in [-\phi_\epsilon, \phi_\epsilon]$ のとき,

$$\phi_\epsilon = \arccos \left(\frac{1-a}{1-a + \epsilon^{1/2}u} \right) = \epsilon^{1/4} \sqrt{\frac{2u}{1-a}} + O(\epsilon^{3/4})$$

として, $\xi = (1-a + \epsilon^{1/2}u) \cos(\omega t + \phi) > 1-a$ であることに注意する. 式 (17) を式 (12) に代入し, 得られた方程式に平均化を施すと, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2} [-\bar{\delta}(1-a) - \bar{\gamma}_0(\kappa_1 + 1) \sin \phi], \\ \dot{\phi} &= \frac{\epsilon}{2} \left[-\nu - \frac{\bar{\alpha}}{(a(2-a))^{3/2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-a)^{3/2}} \beta u^2 - \frac{\bar{\gamma}_0(\kappa_1 + 1)}{1-a} \cos \phi \right] \end{aligned} \quad (20)$$

簡単な解析により,

$$\nu > -\frac{\bar{\alpha}}{(a(2-a))^{3/2}} \mp \sqrt{\left(\frac{\bar{\gamma}_0(\kappa_1+1)}{1-a}\right)^2 - \bar{\delta}^2}$$

ならば, 式 (20) は安定な平衡点と不安定な平衡点を1つずつ有することがわかる. さらに,

$$\nu = -\frac{\bar{\alpha}}{(a(2-a))^{3/2}} \mp \sqrt{\left(\frac{\bar{\gamma}_0(\kappa_1+1)}{1-a}\right)^2 - \bar{\delta}^2} \quad (21)$$

ならば, サドルノード分岐が起こる. このように, 式 (12) において, 式 (21) を満たすパラメータの近傍で調和軌道のサドルノード分岐が起こる.

4.4. 分数調波 Melnikov 解析 次に, ξ が $1-a$ を超える場合に対して, 系 (12) の調和振動を解析する. ここで用いられる手法は, 分数調波軌道に対する Melnikov の方法 [29,30] を拡張した手法 [31] である. 4.3 節と同様に, $0 < \epsilon \ll 1$ として, $\alpha = \epsilon\bar{\alpha}$, $\delta = \epsilon\bar{\delta}$, $\gamma_0 = \epsilon\bar{\gamma}_0$ とおく. 非摂動周期軌道 $(\xi^h(t), \eta^h(t))$ に対する $1/1$ 型の分数調波 Melnikov 関数 $M^h(t_0)$ と $L^h(t_0)$ は次のようになる.

$$M^h(t_0) = -\bar{\gamma}(\omega)A(h) \sin \omega t_0 - \bar{\delta}B(h), \quad L^h(t_0) = -\bar{\delta}T^h < 0$$

ここで, $\bar{\gamma}(\omega) = (\kappa_1\omega^2 + 1)\bar{\gamma}_0$, 主共振条件 $T^h = 2\pi/\omega$ が成立し,

$$A(h) = \int_0^{T^h} \bar{\eta}^h(t) \sin \omega t dt, \quad B(h) = \int_0^{T^h} [\bar{\eta}^h(t)]^2 dt$$

である. また, $\eta^h(t)$ が t の奇関数であることを用いた.

$d\Omega^h/dh > 0$ となることに注意し, 文献 [31] の拡張された理論を適用することにより, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して以下の結果が証明される.

(i) もし

$$\frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\delta}} > \frac{B(h)}{(\kappa_1\omega^2 + 1)|A(h)|}$$

ならば, $M^h(t_0)$ は2つの単純な零点, $t = \bar{t}_0$ と $\pi/\omega - \bar{t}_0$ を有し, $(\xi^h(t - \bar{t}_0), \eta^h(t - \bar{t}_0))$ あるいは $(\xi^h(t - \pi/\omega + \bar{t}_0), \eta^h(t - \pi/\omega + \bar{t}_0))$ の近傍に2つの周期軌道 $(\xi_j(t), \eta_j(t))$, $j = 1, 2$, が存在する. ここで,

$$\bar{t}_0 = -\frac{1}{\omega} \arcsin \left(\frac{\bar{\delta}B(h)}{\bar{\gamma}(\omega)A(h)} \right), \quad -\pi/2 \leq \bar{t}_0 \leq \pi/2$$

である.

(ii) $A(h) < 0$ (> 0) ならばその調和振動 $(\xi_1(t), \eta_1(t))$ は安定 (不安定), $(\xi_2(t), \eta_2(t))$ は不安定 (安定) である.

(iii) パラメータ空間における

$$\frac{\bar{\gamma}_0}{\bar{\delta}} = \frac{B(h)}{(\kappa_1\omega^2 + 1)|A(h)|},$$

の近傍でサドル・ノード分岐が起こり, 調和軌道 $(\xi_j(t), \eta_j(t))$, $j = 1, 2$, が生じる.

第4.3節と第4.4節から得られる結果を図15と16に与える. 図15は, 文献 [27] で主要な数値解析と実験で用いられた, $y_0 \approx 1.9$ nm の場合に対応する, $\gamma_0 = 0.0209$ に対する近似調和振動の振幅と位相差である. 理論解析が文献 [27] の数値的および実験的結果 (図2(c), (d) および図10)

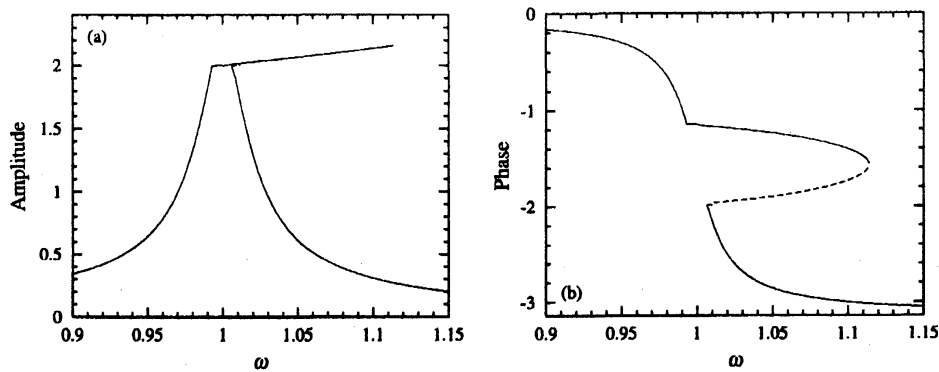


図 15. $\gamma_0 = 0.0209$ に対する近似周期軌道の角振動数 ω への依存性: (a) 振幅; (b) 位相差 ϕ_0 . 実線は安定軌道, 破線は不安定軌道を表す.

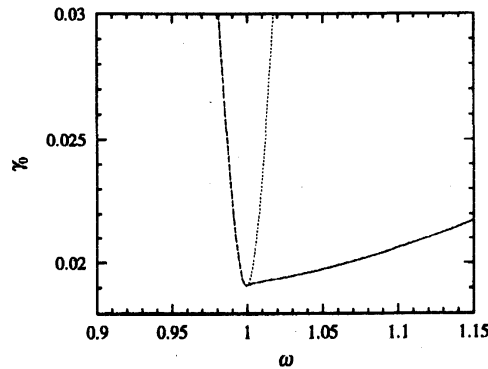


図 16. 近似的なサドルノード分岐曲線

を定性的にだけでなく定量的に説明していることがわかる. 図 16 は (ω, γ_0) -平面における近似サドルノード分岐曲線である. 第 4.4 節の結果は実線で, 第 4.3.1 節と第 4.3.2 節の結果は破線と点線でプロットされている. $\omega < 1$ の領域では, 破線と点線の結果はほぼ一致していることに注意せよ.

理論解析の有効性を検証するために, 数値分岐解析ソフト AUTO [28] による数値解析を行った. その結果を図 17 と 18 に示す. 図 15(a) と 17, 図 16 と 18 を比較することにより, 理論解析と数値解析の結果は非常に良く一致していることが確認され, 理論解析の有効性は明らかである.

5. 最後に

本報告では, 低コストで地球から月へ飛行する宇宙ロケット, エネルギー消費の低い 2 足歩行ロボット, タッピングモード AFM のマイクロカンチレバーという工学的に重要な 3 つの問題を取りあげ, 力学系理論の手法の有効性を示した.

Poincaré に始まり, カオスの発見を契機として発展してきた力学系理論は我々の科学認識に革命をもたらし, 単純な系でさえも複雑な挙動を示し, 一見複雑な挙動でも実際には単純なメカニズムにより作り出されているという自然の姿を明らかにした. 工学の分野においても, 力学系理

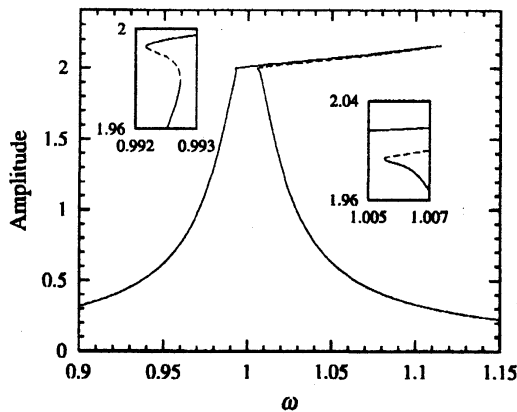


図 17. $\gamma_0 = 0.0209$ の場合に数値的に求められた振幅

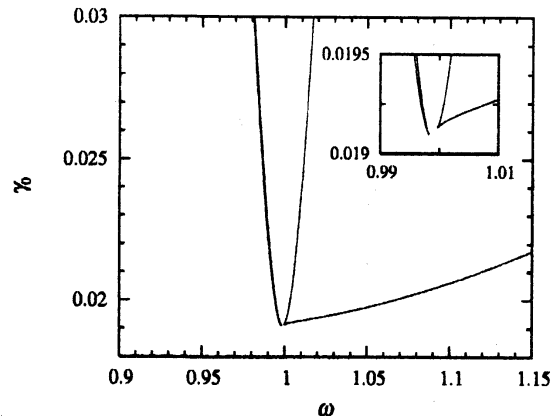


図 18. 数値的に求められたサドルノード分岐曲線

論が単なる解析のための道具から、非線形性・複雑性を積極的に考慮あるいは利用した新たな工学技術の創生のための原動力となる日がもうそこまで来ているのではないだろうか。

参考文献

- [1] G. Chen (ed.), *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [2] C.-C. Chen, K. Yao, K. Umeno and E. Biglieri, Design of spread-spectrum sequences using chaotic dynamical systems and ergodic theory, *IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl.*, **48** (2001), 1110–1114.
- [3] K. Yagasaki, Computation of low energy Earth-to-Moon transfers with moderate flight time, *Physica D*, **197** (2004), 313–331.
- [4] K. Yagasaki, Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with low energy and moderate flight time, *Celst. Mech. Dyn. Astron.*, **90** (2004), 197–212.
- [5] K. Yagasaki and Y. Hasegawa, Nonlinear analyses for periodic gaits of a quasi-passive dynamic walking robot with two legs and feet, in preparation.
- [6] G. Binnig, C.F. Quate and Ch. Gerber, Atomic force microscopy, *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986), pp. 930–933.
- [7] D. Rugar and P. Hansma, Atomic force microscopy. *Phys. Today*, **43** (1990), pp. 23–30.
- [8] G. Binnig and H. Rohrer, In touch with atoms, *Rev. Mod. Phys.*, **71** (1999), pp. S324–S330.
- [9] K. Yagasaki, Nonlinear dynamics of vibrating microcantilevers in tapping mode atomic force microscopy, *Phys. Rev. B*, **70** (2004), 245419.
- [10] V.G. Szebehely and H. Mark, *Adventures in Celestial Mechanics*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New Yor, 1998.
- [11] V.G. Szebehely, *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press, New York and London, 1967.
- [12] W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden and S.D. Ross, Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics, *Chaos* **10** (2000), 427–469.

- [13] E.A. Belbruno, Lunar capture orbit, a method of constructing Earth-Moon trajectories and the lunar GAS mission, *Proceedings of AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference*, 11–13 May 1987, Colorado Springs, Paper Np. AIAA 87-1504.
- [14] E.A. Belbruno and J.K. Miller, Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with ballistic capture, *J. Guid. Cont. Dyn.* **16** (1993), 770–775.
- [15] E.M. Bollt and J.D. Meiss, Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence, *Phys. Lett. A* **204** (1995), 373–378.
- [16] C.G. Schroer and E. Ott, Targeting in Hamiltonian systems that have mixed regular/chaotic phase space, *Chaos* **7** (1997), 512–519.
- [17] E.A. Belbruno and J.P. Carrico, Calculation of weak stability boundary ballistic lunar transfer trajectories, *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, 14–17 August 2000, Denver, Paper Np. AIAA 2000-4142.
- [18] W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden and S.D. Ross, Low energy transfer to the Moon, *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **81** (2001), 63–73.
- [19] T. McGeer, Passive dynamic walking, *Int. J. Robotics Res.*, **9** (1990), 62–82.
- [20] A. Goswami, B. Thuirot and B. Espiau, A study of the passive gait of a compass-like biped robot: Symmetry and chaos. *Int. J. Robotics Res.*, **17** (1998), 1282–1301.
- [21] M. Coleman and A. Ruina, An uncontrolled walking toy that cannot stand still. *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998), 3658–3661.
- [22] S.H. Collins, M. Wisse and A. Ruina, A three dimensional passive-dynamic walking robot with two legs and knees. *Int. J. Robotics Res.*, **20** (2001): 607–615.
- [23] J. Adolfsson, H. Dankowicz and A. Nordmark, 3D passive walkers: Finding periodic gaits in the presence of discontinuities. *Nonlin. Dyn.*, **24** (2001) 205–229.
- [24] R. García and R. Pérez, Dynamic atomic force microscopy methods, *Surf. Sci. Rep.*, **47** (2002), pp. 197–301.
- [25] B.V. Derjaguin, V.M. Muller and Y.P. Toporov, Effect of contact deformations on the adhesion of particles, *J. Colloid Interface Sci.*, **53** (1975), pp. 314–326.
- [26] A.H. Nayfeh and D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
- [27] S.I. Lee, S.W. Howell, A. Raman and R. Reifengerger, Nonlinear dynamics of microcantilevers in tapping mode atomic force microscopy: A comparison between theory and experiment, *Phys. Rev. B*, **66** (2002), 115409.
- [28] E. Doedel, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B. Sandstede and X. Wang, *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*, Concordia University, Montreal, 1997.
- [29] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.
- [30] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, New York, 1990.
- [31] K. Yagasaki, The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, **56** (1996), pp. 1720–1765.
- [32] K. Yagasaki, A simple feedback control system: Bifurcations of periodic orbits and chaos, *Nonlin. Dyn.*, **9** (1996), 391–417.
- [33] K. Yagasaki, Degenerate resonances in forced oscillators, *Disc. Cont. Dyn. Sys. B*, **3**, 423 (2003).