数理解析研究所講究録
1524 巻 2006 年 1-7

ファインマン・パラメーター積分公式と摂動論における解析性

京都大学名誉教授　中西　襄 (Noboru Nakanishi)
Kyoto University

1956 年から 10 年ほど行なってきたファインマン・パラメーター積分公式とそれから従がう摂動論における解析性の研究に関してレヴィユーする。

研究の発端は、1949 年の Dyson の次数勘定定理の証明に関する疑問であった。ファインマン・ダイアグラム G に対するファインマン積分は、一般に

$$\int d^4k_1 ... \int d^4k_L \; f(k+q) \prod_{l=1}^{N} \frac{1}{m_l{}^2 - (k_l+q_l)^2 - i\epsilon}$$

のように書ける。ここに、k_l は積分運動量、m_l は内線質量、q_l は定数運動量（計算終了後、外線運動量 $p_1, ..., p_n$ の 1 次結合で表わす)、$f(k+q)$ は $k_l + q_l$ の多項式、$\epsilon > 0$（計算終了後 $\epsilon \to 0$) である。紫外発散を判定するために、Dyson は $(k_l)_0 = \alpha(\tilde{k}_l)_0$ のような非線形変換を行い、α についてその虚軸にまで解析接続した（「Wick 回転」の論文はこの 5 年後)。ユークリッド的な積分になったから、被積分関数の分母の次数マイナス分子の次数が積分の数 $4L$ より小ならば、紫外発散は存在しないはずであるというのである。

1956 年、私は Dyson の非線形変換は数学的に妥当ではないことに気付いた。そもそもファインマン積分は極めて特異な積分で、数学的に well-defined とはいえない。そこで、ファインマン・パラメーター積分を、ファインマン積分の数学的「定義」とすべきだと考えた。Feynman は、ファインマンの恒等式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha A + (1-\alpha)B]^2}$$

およびそれを A, B について何回か微分して得られる式を繰り返し用い、分母を1つにまとめてから、運動量積分を遂行した。こうして得られるファインマン・パラメーター積分は、ϵ を有限量にしておけば、有界領域での通常の積分なので、well-defined である。しかしながら、それが定義式であるとするためには、ファインマン・パラメーター積分が運動量積分遂行の仕方に依らないことを証明する必要がある。そのためには、すべてのプロパゲーターを平等な形で扱わなければならないことに気付いた。そこで分母関数がすべてのファインマン・パラメーター $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ について線形であるような一般化されたファインマンの恒等式

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^N A_i} = (N-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_N \frac{\delta(1-\sum_{i=1}^N \alpha_i)}{(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i)^N}$$

を用いた。不思議なことに、これ以前には物理では誰も使っていなかったのである。

余談　ファインマンの恒等式の面白いところは、物理としては、次元解析の原理に反し「次元」の異なる量の和が作れること、数学としては、コーシーの積分表示に適用すると、多変数解析関数を1変数解析関数に帰着させられることである。

こうして、次のファインマン・パラメーター積分公式が得られた。

$$(\prod_l \int_0^1 d\alpha_l)\, \delta(1-\sum_l \alpha_l) f(D) \frac{1}{U^2(V-i\epsilon)^{N-2L}}$$

ただし分母の冪が正にならないときは、適当に「定数プロパゲーター」をつけ加える。

$$D = \{D_1, ..., D_N\}, \quad D_l = \frac{1}{2}\int_{m_l{}^2}^{\infty} dm_l{}^2 \frac{\partial}{\partial q_l}$$

$$U = \sum_{T^*} \prod_{l \in T^*} \alpha_l \qquad (T^*\text{: } G \text{ の補樹木})$$

$$V = \sum_l \alpha_l (m_l^2 - q_l^2) + U^{-1} \sum_C U_C (\sum_l \epsilon_{Cl} \alpha_l q_l)^2$$

C は回路 (ループ)、$\epsilon_{Cl} = \pm 1$ for $l \in C$, $= 0$ for $l \notin C$、U_C は C を縮約して得られる縮約図 G/C の "U" である。

次数勘定定理の厳密証明は、次のように行なう。$\epsilon > 0$ を有限にとどめておけば、分母のゼロ点は U のゼロからのみである。従って、$f(D) = 1$ の場合、次の不等式が $0 \leqq \alpha_l \leqq 1$ で満たされれば積分は収束する。

$$U \geqq (\prod_l \alpha_l)^\sigma, \quad \sigma < \frac{1}{2}$$

この不等式の証明は、ファインマン・パラメーターの大小により、$N!$ 個のセクターにわけて行なうのだが、補樹木の性質をフルに用いる。

繰り込まれたファインマン・パラメーター積分公式は、私がやるべきだったのだが、解析性の問題の方に興味が移ってしまい、大分経ってから Zav'yalov や Appelquist などによって行なわれた。他方、積分公式の実用的な応用としては、高次ファインマン積分の具体的計算（緋田らとの核子の電磁構造の計算、木下らによる電子の異常磁気能率の高次補正の計算など）がある。

1950 年代後半、分散式の公理論的証明の限界が認識され、その原因が摂動論で分析された。任意のファインマン・ダイアグラムを exact な結果とする不定計量の場の量子論が構成できるので、摂動論は状態空間の計量の正値性以外のすべての公理を満たす例を潤沢に与えるのである。三角ダイアグラムで異常しきい値の存在が発見され、核子核子散乱の分散式が公理論的に証明できない理由は、スペクトル条件だけでは異常しきい値の存在が排除できないからであることが分かった。

摂動論における解析性の研究は 2 つの方向がある。一般のファインマン積分の特異点の位置と構造を調べることと、特定の条件に従がうすべてのファインマン積分に共通する解析的な領域を調

べることである。物理として有用なのは後者のアプローチである。前者は数学的な興味が中心となっていく。

ファインマン積分の特異点の一般論を簡単に紹介しておこう。$\epsilon \to 0$ とすると、V のゼロ点が問題となるが、単純なゼロ点は積分路を曲げて回避できる。回避出来ないのは、端点 $\alpha_l = 0$ とピンチと呼ばれる V のダブルゼロ点である。$H = \{l | \ \alpha_l = 0\}$ とするとき、H を縮約して得られる縮約図 $R \equiv G/H$ に対する V を V_R と書く。ラグランジュ未定係数法と、斉次式に対するオイラーの偏微分方程式を用いると、V のダブルゼロ点の位置は、

$$\frac{\partial V_R}{\partial \alpha_l} = 0 \quad (l \in R)$$

によって決定されることが分かる。

q_l は R における保存則 [L1]:

$$\sum_l \epsilon_{al} q_l + p_a = 0$$

$[\epsilon_{al} = \pm 1$ (a が l の端点), $= 0$ (それ以外)$]$ のみでは決まらず、回路方程式 [L2]:

$$\sum_l \epsilon_{Cl} \alpha_l q_l = 0$$

を課してはじめて一意的となる。このとき、上の条件式は、質量殻条件 [L3]:

$$m_l^2 - q_l^2 = 0$$

に帰着する。Laudau は、ファインマン積分にファインマン・パラメーターを導入はするが、運動量積分は遂行しないという形の式で、[L1]–[L3] をエレガントに導いた。

電流回路網との対応は著しい。運動量 $\Rightarrow$ 電流、ファインマン・パラメーター $\Rightarrow$ 抵抗 (縮約 $\Rightarrow$ ショート) とすれば、[L1] $\Rightarrow$ キルヒホッフの第 1 法則、[L2] $\Rightarrow$ キルヒホッフの第 2 法則、$V - \sum \alpha_l m_l^2$ $\Rightarrow$ ジュール熱ということになる。

なお、ファインマン積分の解析関数としての特異点近傍での振る舞いは、外線運動量の微小変化に対する V_R の変化 ΔV_R に対し、

$$\mathrm{const}(\Delta V_R)^k, \qquad k = \frac{1}{2}(4L_R - N_R - 1)$$

ただし、$k = 0, 1, 2, ..$ のときは $\log \Delta V_R$ を乗ずるものとする。

連立方程式 [L1]–[L3] を解けば、ファインマン積分の特異点の位置は決定されるが、その特異点はエネルギー変数のどのリーマン面上にあるのかは全く分からない。物理として重要なのは実特異点、すなわち物理的リーマン面実軸上の特異点である。実特異点を決めるのは、V_R のゼロ点近傍での正定値性

$$\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2 V_R}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\Delta\alpha_i\Delta\alpha_j > 0$$

であって、これは Landau のように運動量積分を遂行しないやり方では分からない。縮約図 R は非分離型（すなわち 1 頂点で 2 部分に分けられないダイアグラム）に限ってよい。R が 2 頂点を持つ場合が常しきい値であって、必ず正定値性条件を満足する。物理的には、新しいチャンネルが開けるエネルギーである。これに対し、R の頂点数が 3 以上の場合が異常しきい値である。この存在は公理論的アプローチでは分からないものである。通常の散乱実験の状況である G の初期状態の外線数が 2 の場合、異常しきい値は非物理領域に現われる。

しかし初期状態の外線数が 3 以上の場合には、これらも物理的領域になり得る。これを物理領域特異点という。Coleman-Norton は、$\alpha_l m_l$ を固有時間間隔 τ_l と同定すれば、特異点条件は古典粒子の多重散乱に対応することを指摘した。しかし、そんな余計な仮定を持ち込まないでも、ファインマン積分の空間表示を考えると、その古典極限 $\hbar \to 0$ において、自然に物理領域特異点の条件が得られるのである。電流回路網との対応では、頂点の時空座標が電圧に相当する。なお、物理領域特異点は、S 行列のユニタリー性の拡張である Cutkosky の discontinuity 公式との関連で重要である。

特定の条件を満足するすべてのファインマン・ダイアグラムに共通する解析領域を見いだす最も便利な方法は、積分表示を与えることである。1 変数の場合、それは分散式に他ならない。多変数への拡張として最も有名なのは、散乱振幅に対するマンデルスタム表示と呼ばれる 2 重分散式である。しかしこれは結局、摂動論的にも証明することができなかった。

摂動論的積分表示は、ファインマン・パラメーター積分公式を直接変形して得られるものであるので、摂動論の全次数で成立する。主要な仕事は、ウェイト関数のサポートを調べることであって、これにより積分表示された関数が正則である領域が分かる。サポートを調べるのは、要するに不等式の問題であり、いろいろな方法が展開されてきた。

摂動論的積分表示の証明の基礎は、V に対する Symanzik による表式

$$V = \sum_l \alpha_l m_l^2 - U^{-1} \sum_S W_S (\sum_a p_a)^2$$

である。ここに、S はカットセット、すなわち中間状態、W_S ($\geqq 0$) は G を S で切って得られる 2 部分の "U" と $\prod_{l \in S} \alpha_l$ との積、$\sum_a$ は S のどちらか一方側にある頂点 a のすべてにわたる。回路とカットセットとは、グラフ理論的に双対関係にあり、その意味で V に対する 2 つの位相公式は、双対関係にあるものといえる。

一番簡単な例は、3 点関数の 2 変数積分表示で、DGSI 表示と呼ばれる。これはもともと公理論的に導かれたのだが、その導出の基礎となっていた積分表示が間違っていたので、私が摂動論的に証明したものである。

$$f(s,t) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^1 dz \frac{\rho(\alpha, z)}{\alpha - zs - (1-z)t}$$

この積分表示は分散式と異なり、レッジェ的振る舞いのように 1 変数の冪指数の実部が非負の場合に、発散を避けるための引算項を導

入する必要がないという非常に便利な性質がある。それは、ウェイト関数において、シュヴァルツの擬関数

$$Y_\nu(z)=\frac{z^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\theta(z)\quad[=\delta^{(k)}(z)\ \text{for}\ \nu=-k=0,-1,...]$$

を使うと、$z=0$ や $z=1$ における特異性を超関数の意味で回避できるからである。DGSI 表示は、ベーテ・サルピーター方程式の解の表示に、極めて重要である。

私は 2 変数の摂動論的積分表示を、散乱振幅の場合に拡張した。これはマンデルスタム表示と同じく s-t 項、t-u 項、u-s 項の和から成り、その各項は DGSI 表示と同じ形をしている。マンデルスタム表示にファインマンの恒等式を適用し、部分積分したものなので、マンデルスタム表示の拡張というか、それの弱い形である。この積分表示のウェイト関数のサポートの研究には、グラフ理論的な問題が関係している。