数理解析研究所講究録
1526巻 2006年 214-222

多選択肢ファジィゲームとその解

大阪大学大学院基礎工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.
大阪大学大学院工学研究科
谷野哲三 (Tetsuzo Tanino)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1. はじめに

複数の意思決定者が存在する状況における意思決定には，協力ゲーム理論が有効であるということが知られている．協力ゲームの解は，各意思決定者が得られる利益や影響力を表す．協力ゲームの解の重要なものとして，Shapley 値，Banzhaf 値などがある．これらの特徴づけの一つとして，多重線形展開と呼ばれる関数による特徴づけがある．

部分的な協力をするプレイヤーを含む提携は，Aubin によって提案されたファジィ提携と呼ばれる概念 [2, 3, 4] によって取り扱うことができる．ファジィ提携とは，ある提携に代表権 (representability) [6] の一部を委譲したプレイヤーの集合である．ファジィ提携は，メンバシップ関数と同一視することができ，このときの各メンバシップ値は，各プレイヤーがどの程度代表権を委譲したのかを表し，協力の度合い (rate of participation) [2, 3, 4] と呼ばれる．また，ファジィ提携に基づく協力ゲームは協力ファジィゲーム，あるいは単にファジィゲームと呼ばれる．

多重線形展開は，協力ゲームの定義域を拡張したとき，多重線形性を満たす唯一の関数として定義される [10, 11]．多重線形展開は，協力ファジィゲームの一つのクラスとみなすことができる．したがって，多重線形展開は，通常の協力ゲームが与えられたとき，与えられた協力ゲームに対応し，かつ多重線形性を満たす唯一の協力ファジィゲームと考えられる．このとき，あるプレイヤーの協力する度合いで多重線形展開を偏微分して得られる関数を考えると，これはそのプレイヤーが協力する度合いを増やしたときの利益の増分を表していると考えられる．これは，ファジィ型貢献度と呼ぶことができる．この関数をファジィ提携全体の空間で積分した値が Banzhaf 値となることが知られている．Banzhaf 値は，プレイヤーが独立に各選択肢の選択度合いを一様な確率で選べるときのファジィ型貢献度の期待値であると考えられる．

一方，複数の意思決定者が複数の選択肢のうちのいずれかを選択する状況は，数多く存在する．このような状況は，多選択肢ゲーム（あるいは r 代替案ゲーム）として定式化されてきた [1, 7, 8]．従来の多選択肢ゲームでは，各プレイヤーがいずれか 1 つの選択肢を必ず選択した場合の提携値のみを考えていた．しかしながら，実際にはいずれの選択肢も選択しないプレイヤーが存在することもある．また，各選択肢をいくらかの割合ずつ選択するような状況もある．

本研究では，複数の選択肢があり，いずれの選択肢も選択しないプレイヤーが存在する状況を拡張多選択肢ゲームとして定式化する．さらに，それぞれの選択肢をある程度ずつ選択するような状況を扱うことができる定式化として多選択肢ファジィゲームを定義

する．多選択肢ファジィゲームにおいて，ファジィ型貢献度を定義し，多選択肢ファジィゲームの解として，プレイヤーが独立に各選択肢の選択度合いを一様な確率で選べるときのファジィ型貢献度の期待値を Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値と呼び，解として提案する．さらに，多選択肢ファジィゲームの一つのクラスとして，多選択肢型多重線形展開を考え，このクラスにおける Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値の性質を議論する．

2. 通常の協力ゲームと協力ファジィゲーム

2.1. 通常の協力ゲームにおける解

プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ するとき，通常の協力ゲームは $v(\emptyset)=0$ を満たす $v:2^N\to\mathbb{R}$ で定義される．このとき，関数値 $v(S)$ は，$S\in 2^N$ が得られる最大利益または最小費用を表す．協力ゲームは，単にゲームとも呼び，通常の協力ゲームすべてからなる集合を $\mathcal{G}$ と表す．

関数 $g:\mathcal{G}\to\mathbb{R}^n$ は，協力ゲームの解と考えられる．協力ゲームの主要な解には，Shapley 値，Banzhaf 値，正規化 Banzhaf 値がある．いずれも，投票状況での意思決定者の影響力分析に有効であることが知られている．

定義 1 [5] 次で定義される $\beta:\mathcal{G}\to\mathbb{R}^n$ は，Banzhaf 値と呼ばれる．

$$\beta_i(v) \;=\; \frac{1}{2^n}\sum_{S\subseteq N}\{v(S\cup\{i\})-v(S\backslash\{i\})\}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\}$$

Owen [10, 11] は，通常の協力ゲーム v の多重線形拡張を考え，これと Shapley 値，Banzhaf 値の関係について議論している．n 変数関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が多重線形関数であるとは，$f(p_1,\ldots,p_n)=\sum_{S\subseteq N}C_S\prod_{j\in S}p_j$ となる定数 $C_S(S\subseteq N)$ が存在するときをいう．また，$\alpha^S=(\alpha_i^S)_{i\in N}\in\{0,1\}^N$ を次で定義する．

$$\alpha_i^S=\begin{cases}1 & i\in S\\ 0 & i\notin S\end{cases}$$

$S\in 2^N$ と $\alpha^S\in\{0,1\}^N$ は，明らかに一対一に対応する．

定理 1 [10, 11] 任意の $T\subseteq N$ について $f(\alpha^T)=v(T)$ を満たす多重線形関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は一意に存在し，次で与えられる．

$$f^v(p_1,\ldots,p_n) \;=\; \sum_{S\subseteq N}\left[\prod_{j\in S}p_j\prod_{j\notin S}(1-p_j)\right]v(S)=\sum_{S\subseteq N}\prod_{j\in S}p_j\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}v(S)$$

この関数 $f^v(p_1,\ldots,p_n)$ の定義域を $[0,1]^N$ に制限して得られる関数は，ゲーム v の多重線形展開 (multilinear extension, MLE) と呼ばれる．

多重線形展開は，Shapley 値，Banzhaf 値と密接な関連があることが知られている．このことを説明するために，多重線形展開 f^v の p_i に関する 1 階偏導関数を考え，これを $\partial_i f^v(p_1,\ldots,p_n)$ と表すと，これは次のように表される．

$$\partial_i f^v(p_1,\ldots,p_n)=\sum_{S\subseteq N,S\ni i}\;\prod_{j\in S,j\neq i}p_j\prod_{j\notin S}(1-p_j)[v(S)-v(S\backslash\{i\})]$$

Shapley 値と Banzhaf 値は，$\partial_i f^v$ を用いて次のように特徴づけられる．

定理 2 [10, 11] Shapley 値 ϕ_i と Banzhaf 値 β_i に関して，次が成り立つ．

$$\beta_i(v) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \partial_i f^v((p_1, \ldots, p_n))dp_n \cdots dp_1 = \partial_i f^v\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$$
$$\phi_i(v) = \int_0^1 \partial_i f^v((p, p, \ldots, p))dp$$

投票ゲームにおける解釈は，Straffin [12] によってなされている．プレイヤー間に独立性があり（プレイヤー i が協力する確率 p_i が独立であり），p_i が一様に選択されるときには Banzhaf 値となり，プレイヤー間に同質性があり（任意の $i \in N$ に対して $p_i = p$ が成立し），p が一様に選択されるときには Shapley 値となると考えられる．

2.2. 協力ファジィゲーム

プレイヤーの集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ とする．ファジィ提携とは，N のファジィ部分集合であり，N から $[0,1]$ への関数と同一視できる．したがって，ファジィ提携全体は，$[0,1]^N$ と表される．協力ファジィゲームは，これを定義域とする関数であり，次で定義される．

定義 2 [2, 3, 13, 14] $v(\emptyset) = 0$ を満たす関数 $v: [0,1]^N \to \mathbb{R}$ を協力ファジィゲームと呼ぶ．協力ファジィゲーム全体を $\mathcal{FG}$ と表す．

多重線形展開を協力ファジィゲームの一つのクラスと考えることができる．このとき，p_i はプレイヤーの参加度とみなすことができ，$\partial_i f^v((p_1, \ldots, p_n))$ はプレイヤーが参加度を選択できると考えたときのプレイヤー i の貢献度（ファジィ型貢献度）とみなすことができる．このことから，定理 2 は，次のように解釈できる．

注意 1 プレイヤー間に独立性があり（プレイヤー i が協力する度合い s_i が独立であり），プレイヤー i の協力の度合い s_i が一様に選択されると考えたときには，プレイヤー i のファジィ型貢献度の期待値は Banzhaf 値となり，プレイヤー間に同質性があり（任意の $i \in N$ に対して $s_i = s$ が成立し），プレイヤー i の協力の度合い s_i が一様に選択されると考えたときには，プレイヤー i のファジィ型貢献度の期待値は Shapley 値となる．

後者を一般の C^1 級協力ファジィゲームに対して適用して得られる概念は，Diagonal value と呼ばれ，Branzei らによって提案されている [9]．

2.3. 多選択肢ゲーム

複数の選択肢がある状況における意思決定を考えるため，Bolger [7, 8] は，多選択肢ゲームを考えた．選択肢の集合を $R = \{1, 2, \ldots, r\}$ とする．多選択肢ゲームは，各プレイヤーは 1 つの選択肢を必ず選択するものという前提に基づいており，次のようなプレイヤー集合の分割が基礎となっている．

定義 3 [1, 7, 8] 次を満たすプレイヤーの分割 $Z = (Z_k)_{k \in R}$ を N に対するアレンジメント，あるいは単にアレンジメントと呼ぶ．

1. $Z_k \subseteq N, \forall k \in R$
2. $Z_k \cap Z_l = \emptyset, \forall k, l \in R; k \neq l$
3. $\cup_{k \in R} Z_k = N$

アレンジメントは，N から R への関数と同一視できるため，アレンジメント全体の集合は R^N で表すことができる．

アレンジメントに基づき，多選択肢ゲームは次のように定義される．

定義 4 [1, 7, 8] 次式を満たす関数 $m' : R^N \to \mathbb{R}^r$ を多選択肢ゲームという．

$$m'(Z) = (m'_1(Z), \ldots, m'_r(Z))$$
$$m'_k(Z) = 0 \ \ \forall k \in R, \text{ s.t. } Z_k = \emptyset$$

$m'_k(Z)$ は，アレンジメント Z で表されたように各プレイヤーが選択肢を選択するとき，提携 Z_k が得られる利益を表す．$r = 1$ のとき，多選択肢ゲームは通常の協力ゲームと一致しないが，$r = 2$ のとき，m'_1 のみに着目すれば通常の協力ゲームと一致する．

Bolger [7, 8] は，Shapley 値が順列に基づく貢献度であるという観点から，Shapley 値を多選択肢ゲームに拡張し，公理化を行っている．

3. 拡張多選択肢ゲーム

3.1. 拡張多選択肢ゲームの定義

多選択肢ゲームでは，各プレイヤーは 1 つの選択肢を必ず選択するものという前提に基づいていたが，いずれの選択肢も選ばないプレイヤーが存在することもある．このような状況を扱うため，次のようなプレイヤー集合の族を導入する．

定義 5 次を満たす $Y = (Y_k)_{k \in R}$ を N に対する多選択肢間の部分アレンジメント，あるいは単に部分アレンジメントとよぶ．

1. $Y_k \subseteq N, \forall k \in R$
2. $Y_k \cap Y_l = \emptyset, \forall k \neq l$

部分アレンジメントは，N から $R \cup \{0\}$ への関数と同一視できるため，アレンジメント全体の集合は $(R \cup \{0\})^N$ で表すことができる．$Y \in (R \cup \{0\})^N$ に対して，$Y_0 = N \setminus \cup_{l \in R} Y_l$ とし，$R_0^N = (R \cup \{0\})^N \setminus \{(\emptyset, \ldots, \emptyset)\}$ とする．部分アレンジメントに基づき，拡張多選択肢ゲームを次のように定義する．

定義 6 次式を満たすような関数 $m : (R \cup \{0\})^N \to \mathbb{R}^r$ を拡張多選択肢ゲームという．

$$m(Y) = (m_1(Y), \ldots, m_r(Y))$$
$$m_k(Y) = 0 \quad \forall k \in R, \quad \text{if} \ \ \cup_{l \in R} Y_l = \emptyset$$

$m_k(Y)$ は，部分アレンジメント Y で表されたように各プレイヤーが選択肢を選択するとき，提携 Y_k が得られる利益を表す．

多選択肢ゲームとの違いは，定義域の拡張だけでなく，関数値がゼロとなる場合の条件にもあり，拡張多選択肢ゲームの方が条件が緩和されていることに注意しておく．

3.2. 拡張多選択肢ゲームと多選択肢ゲームの関係

$Y_k = \emptyset$ ならば $m_k(Y) = 0$ となる拡張多選択肢ゲーム $m : (R \cup \{0\})^N \to \mathbb{R}$ において，N に対する部分アレンジメント $Y = (Y_1, \ldots, Y_r)$ に選択肢集合 $R \cup \{r+1\} = \{1, \ldots, r, r+1\}$

に関する N のアレンジメント $Z=(Y_1,\ldots,Y_r,N\setminus\cup_{j=1}^{r}Y_j)$ を1対1対応させ，$m(Z)=(m(Y),0)$ と定義すれば，m は $r+1$ 個の選択肢を持つ多選択肢ゲームとみなせる．すなわち，$Y_k=\emptyset$ ならば $m_k(Y)=0$ となる拡張多選択肢ゲームは $r+1$ 番目の選択肢に特殊な役割を持たせた，$r+1$ 選択肢ゲームとみなせる．しかしながらこのような特殊なクラスの $r+1$ 選択肢ゲームを考えるよりも，拡張多選択肢ゲームの方が自然であり，貢献度を考える際にも，何も選択しないという状況を特別視して，適切に取り扱う必要があると考えられる．したがって，拡張多選択肢ゲームを新たに導入する意義があると考えられる．

多選択肢ゲーム，拡張多選択肢ゲーム，通常の協力ゲームは，次のように書き換えることができる．

注意 2 多選択肢ゲームは，次の関数と等価である．

$$\begin{aligned}&m':A_r\to\mathbb{R}^r,\\ \text{s.t.}\quad &m'(s)=(m'_1(s),\ldots,m'_r(s))\\ &m'_k(s)=0,\forall k\in R;\textstyle\sum_{i\in N}s_{i,k}=0\end{aligned}$$

ただし，$A_r=\left\{s=((s_{i,l})_{l\in R})_{i\in N}\in(\{0,1\}^R)^N\mid\sum_{l=1}^{r}s_{i,l}=1,\forall i\in N\right\}$.

注意 3 拡張多選択肢ゲームは，次の関数と等価である．

$$\begin{aligned}&m:B_r\to\mathbb{R}^r\\ \text{s.t.}\quad &m(s)=(m_1(s),\ldots,m_r(s))\\ &m_k(s)=0,\forall k\in R\text{ if }\textstyle\sum_{k\in R}\sum_{i\in N}s_{i,k}=0\end{aligned}$$

ただし，$B_r=\left\{s=((s_{i,l})_{l\in R})_{i\in N}\in(\{0,1\}^R)^N\mid\sum_{l=1}^{r}s_{i,l}\leq 1,\forall i\in N\right\}$.

注意 4 通常の協力ゲームは，次の関数と等価である．

$$v:\{0,1\}^N\to\mathbb{R}\text{ s.t. }v(0,\ldots,0)=0$$

ここで，$\{0,1\}^N$ は $B_1=\left\{s=(s_i)_{i\in N}\in\{0,1\}^N\mid\sum_{l=1}^{r}s_i\leq 1,\forall i\in N\right\}$ と等価である．また，$\{0,1\}^N$ と等価となる A_r $(r\in\mathbb{N})$ は存在しない．$r=2$ のときの m' の関数値の第一成分のみに着目すれば，通常の協力ゲームと一致する．

注意 2, 3, 4 からも，多選択肢ゲームよりも拡張多選択肢ゲームの方が自然な拡張であると考えられる．注意 3, 4 より，明らかに，$r=1$ のとき拡張多選択肢ゲームは通常の協力ゲームと一致する．

4. 多選択肢ファジィゲーム

4.1. 多選択肢ファジィゲームとその解

各プレイヤーが，各選択肢をいくらかの割合ずつ選択するような状況が数多く存在する．このような状況を取り扱う定式化として，拡張多選択肢ゲームを拡張して得られる多選択肢ファジィゲームを定義する．多選択肢ファジィゲームを導入するために，多選択肢ファジィアレンジメントを定義する．

定義 7 任意の $i \in N$ に対して $\sum_{k \in R} s_{i,k} \leq 1$ を満たす $s = ((s_{1,l})_{l \in R})_{i \in N} \in ([0,1]^R)^N$ を多選択肢ファジィアレンジメントとよぶ．多選択肢ファジィアレンジメント全体の集合を MFA と表す．すなわち，$MFA = \{s = ((s_{i,l})_{l \in R})_{i \in N} \in ([0,1]^R)^N \mid \sum_{k \in R} s_{i,k} \leq 1, \forall i \in N\} \subseteq [0,1]^{nr}$ である．

拡張多選択肢ゲームの定義域が $B_r = \{s = ((s_{i,l})_{l \in R})_{i \in N} \in (\{0,1\}^R)^N \mid \sum_{l=1}^{r} s_{i,l} \leq 1, \forall i \in N\}$ であることから，拡張多選択肢ゲームの自然な拡張になっていると考えられる．

注意 5 MFA の体積は $(r!)^{-n}$ となる．

定義 8 次を満たす $mf : MFA \to \mathbb{R}^r$ を多選択肢ファジィゲームと呼ぶ．

1. $mf(s) = (mf_1(s), \ldots, mf_r(s))$

2. $mf_k(s) = 0, \forall k \in R$ if $\sum_{l \in R} \sum_{i \in N} s_{i,l} = 0$

$r = 1$ のとき，通常の協力ファジィゲームと一致する．

多選択肢ファジィゲーム全体を $\mathcal{MFG}$ と表す．任意の $k \in R$ に対して $mf_k \in \mathcal{MFG}$ がほとんどいたるところで1階偏微分可能で，偏微分して得られた関数が積分可能であるような mf 全体を $\mathcal{MFG}_1$ と書く．

$\mathcal{MFG}' \subseteq \mathcal{MFG}$ に対して $f : \mathcal{MFG}' \to \mathbb{R}^{nr}$ は $\mathcal{MFG}'$ 上の多選択肢ファジィゲームの解とみなせる．多選択肢ファジィゲームの解 $g : \mathcal{MFG}' \to \mathbb{R}^{nr}$ が満たすべき性質として，次が考えられる．

性質 1（線形性）

$$g(\alpha_1 mf_1 + \alpha_2 mf_2) = g(\alpha_1 mf_1) + g(\alpha_2 mf_2)$$
$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, mf_1, mf_2, \alpha_1 mf_1 + \alpha_2 mf_2 \in \mathcal{MFG}'$$

全単射 $\pi : N \to N$ を順列と呼び，順列全体を $\Pi(N)$ で表す．任意の $\pi \in \Pi(N)$, $s \in MFA$, $k \in R$ に対して，$\pi(s)_{i,k} = s_{\pi(i),k}$ とする．このとき，ゲーム $\pi mf \in \mathcal{MFG}$ を任意の $mf \in \mathcal{MFG}$, $s \in MFA$ に対して $\pi mf(\pi(s)) = mf(s)$ で定義する．このとき，次の性質が定義される．

性質 2（対称性）

$$g_{\pi(i)}(\pi mf) = g_i(mf), \qquad \forall i \in N, \pi \in \Pi(N), mf \in \mathcal{MFG}'$$

$s = ((s_{i,l})_{l \in R})_{i \in N} \in MFA$ において $s_{i,k}$ を $t_{i,k}$ に入れ替えて得られる多選択肢ファジィアレンジメントを $(s_{-(i,k)}, t_{i,k})$ と表す．任意の $s \in MFA$ と $0 \leq t_{i,k} \leq 1 - \sum_{l \neq k} s_{i,l}$ に対して $mf_k(s_{-(i,k)}, t_{i,k}) = 0$ となるとき，プレイヤー i は選択肢 k に関してナルプレイヤーであるとよぶ．このとき，次の性質が定義される．

性質 3（各選択肢に関するナルプレイヤーの評価）

$mf \in \mathcal{MFG}'$ において，プレイヤー i が選択肢 k に関してナルプレイヤーであるならば，$g_k(mf) = 0$.

$mf \in \mathcal{MFG}_1$ に対して，$s_{i,k}$ $(i \in N, k \in R)$ に関する 1 階偏導関数を考え，これを $\partial_{i,k} mf(((s_{i,l})_{l\in R})_{i\in N})$ と表すと，これは他の選択肢を選択する度合いが変わらない状態で，プレイヤー i が選択肢 k を選択する度合いが増えたときの利益の変化率を表す関数である．これをプレイヤー i の選択肢 k に対するファジィ型貢献度と呼ぶ．

注意 1 より，プレイヤー間に独立性があり，プレイヤー i の協力の度合い s_i が一様に選択されると考えたときには，プレイヤー i のファジィ型貢献度の期待値が Banzhaf 値となる．このことに基づき，次を拡張多選択肢ゲームの解として提案する．

定義 9 $\mathcal{MFG}_1$ に含まれる拡張多選択肢ゲームが与えられたとき，各プレイヤーが独立に各選択肢の選択度合いを一様の確率で選ぶときの多選択肢ファジィ貢献度の期待値を割り当てる関数，すなわち $mf \mapsto (r!)^n \int_{MFA} \partial_{i,k} mf(s)ds$ をプレイヤー i の選択肢 k における Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値と呼ぶ．

4.2. 拡張多選択肢ゲームにおける多重線形展開と解の性質

多重線形展開の導入のため，拡張多選択肢ゲームにおける多重線形関数を定義する．

定義 10 関数 $f : \mathbb{R}^{nr} \to \mathbb{R}$ に対し，

$$f((p_{1,l})_{l\in R}, \ldots, (p_{n,l})_{l\in R}) = \sum_{(S_1,\ldots,S_r)\in R_0^N} C_{(S_1,\ldots,S_r)} \prod_{l\in R} \prod_{j\in S_l} p_{j,l}$$

を満たす定数 $C_{(S_1,\ldots,S_r)} \in \mathbb{R}$, $(S_1, \ldots, S_r) \in R_0^N$ が存在するとき，f を多選択肢型多重線形関数とよぶ．

多選択肢型多重線形関数は，一般の多重線形関数の特別な場合である．$(S_l)_{l\in R} \in R_0^N$ に対して $((p_{i,k}^{(S_l)_{l\in R}})_{k\in R})_{i\in N} \in ([0,1]^R)^N$ を次で定義する．

$$p_{i,k}^{(S_l)_{l\in R}} = \begin{cases} 1 & i \in S_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 3 m を拡張多選択肢ゲームとし，$k \in R$ とする．任意の $(S_l)_{l\in R} \in R_0^N$ に対して，$f((p_{1,p}^{(S_l)_{l\in R}})_{p\in R}, \ldots, (p_{n,p}^{(S_l)_{l\in R}})_{p\in R}) = m_k((S_l)_{l\in R})$ となる多選択肢型多重線形関数 $f : \mathbb{R}^{nr} \to \mathbb{R}$ は一意に存在して，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &f((p_{1,l})_{l\in R}, \ldots, (p_{n,l})_{l\in R}) \\ &= \sum_{(S_1,\ldots,S_r)\in R_0^N} \prod_{j\in S_1} p_{j,1} \cdots \prod_{j\in S_r} p_{j,r} \prod_{j\in S_0} \left(1 - \sum_{l\in R} p_{j,l}\right) m_k((S_l)_{l\in R}) \end{aligned}$$

この関数 f の定義域を MFA に制限して得られる関数を選択肢 k に関する多重線形展開とよぶ．

任意の選択肢 $k \in R$ に対して多重線形展開を考えることができる．すべての選択肢で多選択肢型多重線形展開で表される多選択肢ファジィゲームを MLE 型多選択肢ファジィゲームとよび，その全体を $\mathcal{MFG}_{MLE}$ と表す．MLE 型多選択肢ファジィゲームは，明ら

かに，ほとんどいたるところで1階偏微分可能で，偏微分して得られた関数が積分可能である．すなわち，$\mathcal{MFG}_{MLE} \subseteq \mathcal{MFG}_1$ が成り立つ．

$k \in R$ に対して $\{i\}^k = (\{i\}^k_l)_{l \in R} \in R_0^N$ を次で定義する．

$$\{i\}^k_l = \begin{cases} \{i\} & k = l \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

命題 1 MLE 型多選択肢ファジィゲーム $mf \in \mathcal{MFG}_{MLE}$ に対してプレイヤー i の選択肢 k における Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値は，対応する多選択肢ゲーム m を用いて次式のように表される．

$$mf \;\mapsto\; (r!)^n \int_{MFA} \partial_{i,k} mf(s)ds = \frac{1}{(r+1)^{n-1}} \sum_{(S_l)_{l \in R} \in R_0^N; S_0 \ni i} \{m_k(S \cup \{i\}_k) - m_k(S)\}$$

$r = 1$ のとき，通常の協力（クリスプ）ゲームにおける Banzhaf 値と一致する．また，MLE 型多選択肢ファジィゲームにおける Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値について次の命題が成り立つ．

命題 2 MLE 型多選択肢ファジィゲームにおいて，Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値はファジィアレンジメントの重心におけるファジィ貢献度と一致する．すなわち，次が成り立つ．

$$(r!)^n \int_{MFA} \partial_{i,k} mf(s)ds = \partial_{i,k} mf\left(\frac{1}{r+1}, \ldots, \frac{1}{r+1}\right)$$

命題2は，$r = 1$ のとき定理 2 の一部と対応する．

命題 3 MLE 型多選択肢ファジィゲームにおいて，Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値は線形性，対称性，ナルプレイヤーのゼロ評価の性質を満たす．

5. おわりに

本研究では，複数の選択肢があり，いずれの選択肢も選択しないプレイヤーが存在する状況を拡張多選択肢ゲームとして定式化した．さらに，それぞれの選択肢をある程度ずつ選択するような状況を扱うことができる定式化として多選択肢ファジィゲームを提案した．多選択肢ファジィゲームにおいて，ファジィ型貢献度を定義し，多選択肢ファジィゲームの解として，プレイヤーが独立に各選択肢の選択度合いを一様な確率で選べるときのファジィ型貢献度の期待値を Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値と呼び，解として提案した．さらに，多選択肢ファジィゲームの一つのクラスとして，多選択肢型多重線形展開を考え，このクラスにおける Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値の性質を議論した．

今後の課題として，Banzhaf 型ファジィ貢献度期待値の公理化に関する議論，拡張多選択肢ゲームの解としての議論，および Shapley 値に対応するファジィ貢献度期待値に関する議論などが挙げられる．

参考文献

[1] M. J. Albizuri, J. C. Santos and J. M. Zarzuelo, Solutions for cooperative games with r alternatives, Review of Economic Design, Vol. 4, pp. 345-356 (1999)

[2] J.-P. Aubin, Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de 1'Académie des Sciences 279-A (1974) 891–894.

[3] J.-P. Aubin, Coeur et équilibres des jeux flous sans paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de 1'Académie des Sciences 279-A (1974) 963–966.

[4] J.-P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Rev. ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[5] J.F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis, Rutgers Law Review, Vol. 19, pp. 317–343 (1965)

[6] A. Billot, Fuzzy convexity and peripherial core of an exchange economy represented as a fuzzy game, in: J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (Eds.), Multiperson Decision Making Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990, pp. 311–335.

[7] E. Bolger, A value for games with n players and r alternatives, Int. J. of Game Theory, Vol. 22, No. 1, pp. 319-334 (1993)

[8] E. M. Bolger, A consistent value for games with n players and r alternatives, Int. J. of Game Theory, Vol. 29, pp. 93-99 (2000)

[9] R. Branzei, D. Dimitrov, S. Tijs, Models in Cooperative Game Theory – Crisp, Fuzzy and Multi-Choice Games –, Springer-Verlag, Belrin, Heidelberg, 2005.

[10] G. Owen, Multilinear extensions of games, Management Science, vol.18, pp.64–79, 1972.

[11] G. Owen, Multilinear extensions and the Banzhaf values, Naval Research Logistics Quarterly, vol.22, pp.741–750, 1975.

[12] P.D. Straffin, Probability models for power indices, in Ordeshook, P. ed., Game Theory and Political Science, New York Univ. Press, pp. 477-510, 1978.

[13] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, A Shapley Function on a Class of Cooperative Fuzzy Games, European Journal of Operational Research, Vol.129, No.3, pp.596–618 (2001).

[14] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, Axiomatic Characterizations of the Shapley Function in Cooperative Fuzzy Games, Central European Journal of Operations Research Vol. 12, No.1, pp. 47-57 (2004).