

## $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の club guessing

吉信 康夫 (名古屋大学大学院情報科学研究科)\*

非可算正則基数の任意の閉非有界 (club) 部分集合を何らかの (弱い) 意味で “推測” (guess) する有界閉部分集合の列は, 一般に club guessing 列と呼ばれ, Shelah [1] をはじめ多くの研究者によって無限組合せ論のさまざまな文脈で利用されて来た. König, Larson および筆者 ([2]) は, この概念の一般化として  $\mathcal{P}_\kappa\lambda$  構造の閉非有界部分集合を推測する (tail) club guessing 列の概念を導入し, その存在の条件や, 他の無限組合せ論上の問題, 特にいわゆる Reflection Principles にまつわるある問題への応用などを示した. 本稿では, [2] で示されている結果の一部を, 主に最も簡単な  $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$  上の club guessing 列の場合に絞って解説する.

本稿で用いる基本的な用語の定義を与えておく.

$\kappa, \mu$  を無限基数とすると, 集合  $\{\gamma \in [\mu, \mu^+) \mid \text{cf}\gamma = \kappa\}$  および  $\{\gamma \in [\mu, \mu^+) \mid \omega \leq \text{cf}\gamma < \kappa\}$  をそれぞれ  $S_{\mu^+}^\kappa, S_{\mu^+}^{<\kappa}$  で表す.

$\kappa$  が非可算正則基数,  $\kappa \leq \alpha$  のとき,  $C \subseteq \mathcal{P}_\kappa\alpha$  が閉非有界 (club) であるとは,  $f : <\omega\alpha \rightarrow \alpha$  が存在して  $C = C(f) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\alpha \mid f''<\omega x \subseteq x\}$  と表せるときにいう\*<sup>1</sup>. また,  $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\alpha$  は任意の閉非有界部分集合と空でない交わりをもつとき定常 (stationary) であるという.

### 1 $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$ 上の (tail) club guessing

定義 1. 列  $\mathcal{F} = \langle F_\alpha \mid \alpha \in S_{\omega_2}^\omega \rangle$  で次をみたすものを  $\kappa^*$  列といい,  $\kappa^*$  列が存在する, という主張を  $\kappa^*$  で表す.

(1) 各  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  に対し,  $F_\alpha = \langle F_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$  は  $\alpha$  の可算部分集合たちの  $\subseteq$ -連続増大列で  $\bigcup_{\xi < \omega_1} F_\alpha^\xi = \alpha$  をみたすようなものである.

\* 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 17740053.

\*<sup>1</sup> ここで定義した閉非有界性を強い意味で閉非有界 (strongly club) と呼ぶことも多いが, 本稿ではこの定義しか用いないので簡単にこう呼んでいる.

- (2)  $\mathcal{P}_{\omega_1\omega_2}$  の任意の閉非有界部分集合  $D$  に対し,  $\omega_2$  の閉非有界部分集合  $C$  が存在して次が成り立つ: 各  $\alpha \in C \cap S_{\omega_2}^\omega$  に対し, 十分大きなすべての  $\xi < \omega_1$  について  $F_\alpha^\xi \in D$  である.

$\lambda^*$  の ZFC との相対無矛盾性は, 以下のように既知の事実に帰着することで容易に示される.

**定義 2.** (Jensen)  $\kappa$  を非可算正則基数,  $E$  を  $\kappa$  の (定常) 部分集合とすると, 列  $\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$  で次の性質をみたすものを  $\diamond_\kappa^*(E)$  列といい,  $\diamond_\kappa^*(E)$  列が存在する, という主張を  $\diamond_\kappa^*(E)$  で表す:

- (1) 各  $\alpha \in E$  に対し,  $\mathcal{A}_\alpha$  は  $\alpha$  の部分集合たちの高々  $|\alpha|$  個の族である.
- (2)  $\kappa$  の任意の部分集合  $X$  に対し,  $\kappa$  の閉非有界部分集合  $C$  が存在して次が成り立つ: 任意の  $\alpha \in C \cap E$  について,  $X \cap \alpha \in \mathcal{A}_\alpha$  である.

特に,  $E = \kappa$  の場合の  $\diamond_\kappa^*(E)$  を  $\diamond_\kappa^*$  で表す.  $\diamond_\kappa^*$  は  $\diamond_\kappa^*(E)$  の形の命題のうちで最も強いものである.

**注意.** 1. 構成可能宇宙  $\mathbf{L}$  においては,  $\kappa$  が ineffable でない限り  $\diamond_\kappa^*$  が成り立つ (Jensen). 従って特に, “ineffable でないすべての非可算正則基数  $\kappa$  について  $\diamond_\kappa^*$  が成り立つ” という命題は ZFC と相対無矛盾である.

2.  $\diamond_\kappa^*(E)$  は次の命題と同値であることが容易に確かめられる.

次をみたす列  $\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$  が存在する:

- (1) 各  $\alpha \in E$  に対し,  $\mathcal{A}_\alpha$  は  ${}^{<\omega}\alpha$  から  $\alpha$  への写像たちの高々  $|\alpha|$  個の族である.
- (2) 任意の  $g: {}^{<\omega}\kappa \rightarrow \kappa$  に対し,  $\kappa$  の閉非有界部分集合  $C$  が存在して次が成り立つ: 任意の  $\alpha \in C \cap E$  に対して,  $g \upharpoonright {}^{<\omega}\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$  である.

**定理 3.**  $\diamond_{\omega_2}^*(S_{\omega_2}^\omega)$  は  $\lambda^*$  を導く.

(証明)  $\langle \mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in S_{\omega_2}^\omega \rangle$  を上の注意 2 にいうものとせよ. 各  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  に対し, 全射  $g_\alpha: \omega_1 \rightarrow \alpha$  を固定し, また  $\langle f_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$  を  $\mathcal{A}_\alpha$  の数え上げとする. 各  $\xi < \omega_1$  に対し  $F_\alpha^\xi$  を  $g_\alpha''\xi$  の  $\{f_\alpha^\eta \mid \eta < \xi\}$  による閉包とすると,  $F_\alpha = \langle F_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$  は定義 1 の条件 (1) をみたしている. 今,  $D$  を  $\mathcal{P}_{\omega_1\omega_2}$  の任意の閉非有界部分集合とし,  $D = C(f)$  なる  $f: {}^{<\omega}\omega_2 \rightarrow \omega_2$  をとると,  $\omega_2$  の閉非有界部分集合  $C$  がとれて, 各  $\alpha \in C \cap S_{\omega_2}^\omega$  について  $f \upharpoonright {}^{<\omega}\alpha = f_\alpha^{\xi_\alpha}$  なる  $\xi_\alpha < \omega_1$  がとれ, このとき  $F_\alpha$  の取り方から  $\xi_\alpha < \xi < \omega_1$  なる  $\xi$  については  $F_\alpha^\xi \in C(f_{\xi_\alpha}) \subseteq C(f) = D$  となる.  $\square$

## 2 Reflection Principles と $\kappa^*$

ここでは、定常集合のいわゆる Reflection Principles について Dow, Foreman, Todorcevic らによって提起されてきた ([3], [4], [5] などを参照) 問題への  $\kappa^*$  の応用について述べる。

定義 4.  $\lambda$  を正則基数とする。

$\text{WRP}(\lambda) \Leftrightarrow_{\text{def}}$   $\mathcal{P}_{\omega_1}\lambda$  の任意の定常部分集合  $S$  に対し,  $X \subset \lambda$  で  $\omega_1 \subseteq \lambda$ ,  $|X| = \omega_1$  であり, かつ  $S \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  が  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  の定常部分集合となるようなものが存在する。

$\text{RP}(\lambda) \Leftrightarrow_{\text{def}}$   $\mathcal{P}_{\omega_1}\lambda$  の任意の定常部分集合  $S$  に対し,  $X \subset \lambda$  で  $\omega_1 \subseteq \lambda$ ,  $|X| = \omega_1$ ,  $\text{cf}(\text{o.t.}X) = \omega_1$  であり, かつ  $S \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  が  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  の定常部分集合となるようなものが存在する。

注意. 1.  $\text{WRP}(\lambda)$  の定義で,  $\text{o.t.}X$  が極限順序数であることを要請しても同値である。さらに  $\text{cf}(\text{o.t.}X) = \omega_1$  まで要請しているのが  $\text{RP}(\lambda)$  である。

2.  $\lambda = \omega_2$  の場合には,  $\text{WRP}$ ,  $\text{RP}$  とも  $X$  が (極限) 順序数であることを要請してもそれぞれ同値である。さらに, 定義の条件をみたすような (極限) 順序数の全体が  $\omega_2$  の定常部分集合をなすことも導ける。

問題.  $\text{WRP}(\lambda)$  は  $\text{RP}(\lambda)$  を導くか?

次にみるように,  $\kappa^*$  はこの問題の  $\lambda = \omega_2$  の場合に肯定的な解答をもたらす。

定理 5.  $\kappa^*$  の下で,  $\text{WRP}(\omega_2)$  は  $\text{RP}(\omega_2)$  を導く。

(証明)  $\kappa^*$  と  $\text{WRP}(\omega_2)$  を仮定する。  $\langle F_\alpha = \langle F_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle \mid \alpha \in S_{\omega_2}^\omega \rangle$  を  $\kappa^*$  列とし,  $S$  を  $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$  の任意の定常部分集合とする。必要なら各  $F_\alpha$  をその終切片で置き換えることにより,  $F_\alpha^\xi$  はいずれも  $\alpha$  に共終であるとしてよい。  $\text{WRP}(\omega_2)$  (上の注意 2) より,

$$E = \{ \alpha < \omega_2 \mid S \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha \text{ は } \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha \text{ の定常部分集合} \}$$

は  $\omega_2$  の定常部分集合である。  $\text{RP}(\omega_2)$  を導くには,

$$E \cap S_{\omega_2}^{\omega_1} \neq \emptyset \tag{1}$$

であることを示せばよい。  $E \cap S_{\omega_2}^{\omega_1}$  が定常でない場合は,  $E$  が定常なので (1) は直ちに従う。そこで,  $E \cap S_{\omega_2}^{\omega_1}$  が定常である場合を考える。各  $\alpha \in E \cap S_{\omega_2}^{\omega_1}$  に対し,  $S \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  は

$\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  で定常であり, 一方  $\{F_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1\}$  は  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  の閉非有界部分集合となるので, 両者は定常な交わりをもち,  $S_\alpha = \{\xi \in \omega_1 \mid F_\alpha^\xi \in S\}$  は  $\omega_1$  の定常部分集合となる. 今,  $\alpha$  毎に,  $S_\alpha$  の部分集合  $T_\alpha$  を,  $\omega_1$  で非有界だが定常ではないようにとり,

$$S' = \{F_\alpha^\xi \mid \alpha \in E \cap S_{\omega_2}^\omega, \xi \in T_\alpha\}$$

とおくと,  $S'$  は  $S$  の部分集合である.

主張 1  $S'$  は  $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$  の定常部分集合である.

(主張 1 の証明)  $D$  を  $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$  の任意の閉非有界部分集合とすると,  $\lambda^*$  列の定義から,  $\omega_2$  の閉非有界部分集合  $C$  がとれて, 各  $\alpha \in C \cap S_{\omega_2}^\omega$  については, 十分大きな任意の  $\xi < \omega_1$  について  $F_\alpha^\xi \in D$  となる. 一方,  $E \cap S_{\omega_2}^\omega$  は定常なので,  $E \cap C \cap S_{\omega_2}^\omega$  は空でなく,  $\alpha \in E \cap C \cap S_{\omega_2}^\omega$  なる  $\alpha$  については,  $F_\alpha^\xi \in S'$  なる任意に大きい  $\xi < \omega_1$  が存在する. よって  $S' \cap D \neq \emptyset$  である.  $\square$

主張 2 どの  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  についても  $S' \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  は  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  の定常部分集合ではない.

(主張 2 の証明)  $\alpha \notin E$  なら  $S \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  がすでに定常でないのよい.  $\alpha \in E$  のとき,  $S' \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  の元のうち  $\alpha$  に共終なもの全体は  $\{F_\alpha^\xi \mid \xi \in T_\alpha\}$  に他ならないが,  $T_\alpha$  が  $\omega_1$  で定常でないので, この集合も  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  で定常でなく, 従って  $S' \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  も定常でない.  $\square$

さて,  $S'$  は  $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_2$  で定常なので,  $\text{WRP}(\omega_2)$  より (極限) 順序数  $\alpha$  が存在して  $S' \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  が  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  で定常となるが, 主張 2 より  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  ではないので  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  である. このときより大きい  $S \cap \mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  も  $\mathcal{P}_{\omega_1}\alpha$  で定常だから  $\alpha \in E$ , よって (1) が示せた.  $\square$ (定理 2)

### 3 $\lambda^*$ の特徴付け

定理 2 のようなことが示せたので,  $\lambda^*$  がどの程度弱い主張であるのかは興味あるところであるが, 次に紹介するように  $\lambda^*$  と同値な, 見通しのよい命題を得ることができた.

**定理 6.** 次は互いに同値である:

- (1)  $\lambda^*$ .
- (2)  $d(\mathcal{C}_{\omega_1}, \supseteq) = \aleph_2$  (つまり,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1}$ ,  $|\mathcal{X}| = \omega_2$  が存在して, 任意の  $C \in \mathcal{C}_{\omega_1}$  に対して  $D \subseteq C$  なる  $\mathcal{X} \in D$  がとれる. ただし,  $\mathcal{C}_{\omega_1}$  は  $\omega_1$  上の閉非有界フィルターを表す).

特に,  $\lambda^*$  は  $2^{\omega_1} = \omega_2$  の系である.

*Proof.* (1)  $\Rightarrow$  (2):  $d(\mathcal{C}_{\omega_1}, \supseteq^*) > \omega_2$  を仮定し,  $\langle F_\alpha = \langle F_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle \mid \alpha \in S_{\omega_2}^\omega \rangle$  を定義

1 (1) をみたく任意のものとする. 各  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  に対し,

$$D_\alpha = \omega_1 \cap \{F_\alpha^\xi \cap \omega_1 \mid \xi < \omega_1\}$$

とおくと,  $D_\alpha$  は  $\omega_1$  の閉非有界部分集合になる. 仮定より,  $\omega_1$  の閉非有界部分集合  $D$  で, 任意の  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  と任意の  $\beta < \omega_1$  に対して  $D_\alpha \setminus \beta \not\subseteq D$  であるようなものがとれる. このとき,  $D = \{x \in \mathcal{P}_{\omega_1 \omega_2} \mid x \cap \omega_1 \in D\}$  は  $\mathcal{P}_{\omega_1 \omega_2}$  の閉非有界部分集合であり, 任意の  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  について,  $\langle F_\alpha^\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$  のどの終切片も  $D$  に含まれることはない.

(2)  $\Rightarrow$  (1): (2) を仮定し,  $\{D_\gamma \mid \gamma < \omega_2\}$  を  $\omega_1$  の閉非有界部分集合の族で,  $\omega_1$  の任意の閉非有界部分集合  $D$  に対し  $D_\gamma \subseteq D$  なる  $\gamma < \omega_2$  がとれるものとする. 各  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  に対し, 狭義単調増大列  $\langle \alpha_n \rangle_{n < \omega}$  で  $\sup_{n < \omega} \alpha_n = \alpha$  なるものを選んでおく. さらに, 列  $\mathcal{G} = \langle g_\alpha \rangle_{\alpha \in S_{\omega_2}^\omega}$  で各  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  について  $g_\alpha$  が  $\omega_1$  から  $\alpha$  への全単射であるものを選んでおく. 各  $\alpha \in S_{\omega_2}^\omega$  に対し, 次のように定義する:

$$D_\alpha' = \Delta_{\alpha < \omega_1} D_{g_\alpha(\alpha)}, \quad F_\alpha = \langle \bigcup_{n < \omega} g_{\alpha_n}''(D_{\alpha'}(\xi)) \mid \xi < \omega_1 \rangle$$

(ただし  $D_{\alpha'}(\xi)$  は  $D_{\alpha'}$  の昇順で  $\xi$  番目の要素を表す). このとき  $D_{\alpha'}$  は  $\omega_1$  の閉非有界部分集合であり,  $\langle F_\alpha \mid \alpha \in S_{\omega_2}^\omega \rangle$  は定義 1 (1) をみたしている.

$\langle F_\alpha \mid \alpha \in S_{\omega_2}^\omega \rangle$  が  $\lambda^*$  列であることを示すため,  $C$  を  $\mathcal{P}_{\omega_1 \omega_2}$  の任意の閉非有界部分集合とする.  $\theta$  を十分大きな正則基数とし,  $\mathcal{A}$  を  $\langle H_\theta, \in, \mathcal{G}, C \rangle$  をスコーム化して得られる構造とする. このとき任意の  $N \in \mathcal{P}_{\omega_1} H_\theta$ ,  $\mathcal{A} \upharpoonright N \prec \mathcal{A}$  について  $N \cap \omega_2 \in C$  が成り立つことに注意. 今,

$$E^0 = \{\alpha \in S_{\omega_2}^\omega \mid \text{Sk}^{\mathcal{A}}(\alpha) \cap \omega_2 = \alpha\}$$

とおくと,  $E^0$  は  $S_{\omega_2}^\omega$  の  $\omega$  閉な非有界部分集合である.  $\alpha \in E^0$  に対し

$$C_\alpha = \{\xi < \omega_1 \mid \alpha \cap \text{Sk}^{\mathcal{A}}(g_\alpha''\xi) = g_\alpha''\xi \wedge \omega_1 \cap g_\alpha''\xi = \xi\}$$

とおくと,  $C_\alpha$  は  $\omega_1$  の閉非有界部分集合である. ここで写像  $f : E^0 \rightarrow \omega_2$  を任意の  $\alpha \in E^0$  について  $D_{f(\alpha)} \subseteq C_\alpha$  なるようにとり,

$$E^1 = \{\alpha \in S_{\omega_2}^\omega \cap \text{l.p.} E^0 \mid f''\alpha \subseteq \alpha\}$$

とおくと,  $E^1$  も  $S_{\omega_2}^\omega$  の  $\omega$  閉な非有界部分集合である. 各  $\alpha \in E^1$  に対し, 狭義単調増大列  $\langle \alpha_n' \mid n < \omega \rangle \subseteq E^0$  を  $\sup_{n < \omega} \alpha_n' = \alpha$  かつ各  $n < \omega$  に対し  $\alpha_n < \alpha_{n+1}'$  となるように選ぶ. このとき, 十分大きな  $\zeta < \omega_1$  がとれて次が成り立つ:

$$(3) \quad D_{\alpha'} \setminus \zeta \subseteq \bigcap_{n < \omega} C_{\alpha_n'}$$

$$(4) \forall n < \omega [\alpha_n' \in g_{\alpha_{n+1}'}''\zeta],$$

$$(5) \forall n < \omega [\alpha_n \in g_{\alpha_{n+1}'}''\zeta].$$

このとき各  $\xi \in D_{\alpha'} \setminus \zeta$  について (3) より次が成り立つ:

$$\forall n < \omega [\alpha_n' \cap \text{Sk}^A(g_{\alpha_n'}''\xi) = g_{\alpha_n'}''\xi \wedge \omega_1 \cap \text{Sk}^A(g_{\alpha_n'}''\xi) = \xi]. \quad (6)$$

同じ  $\xi$  たちについて, (6), (4) および初等性の議論により, 各  $n < \omega$  について次を得る:

$$\alpha_n' \cap g_{\alpha_{n+1}'}''\xi = \alpha_n' \cap \text{Sk}^A(g_{\alpha_{n+1}'}''\xi) = g_{\alpha_n'}''(\omega_1 \cap \text{Sk}^A(g_{\alpha_{n+1}'}''\xi)) = g_{\alpha_n'}''\xi.$$

よって特に  $g_{\alpha_n'}''\xi$  は  $g_{\alpha_{n+1}'}''\xi$  の始切片である. そこで  $Z_\xi = \bigcup_{n < \omega} g_{\alpha_n'}''\xi$  とおけば, 再び (6) によって

$$\omega_2 \cap \text{Sk}^A(Z_\xi) = \alpha \cap \text{Sk}^A(Z_\xi) = Z_\xi$$

が得られ, 従って  $Z_\xi \in \mathcal{C}$  となる. 他方, (5) と初等性の議論から各  $n < \omega$  について

$$\alpha_n \cap Z_\xi = \alpha_n \cap g_{\alpha_{n+1}'}''\xi = g_{\alpha_n}''\xi$$

も得られ, これより  $\bigcup_{n < \omega} g_{\alpha_n}''\xi = Z_\xi \in \mathcal{C}$  が従う. これは  $F_\alpha$  のある終切片が  $\mathcal{C}$  に含まれるということに他ならない.  $\square$

## 4 一般化

$\lambda^*$  は次のようにより一般の  $\mathcal{P}_\kappa \lambda$  上の (tail) club guessing 型の命題に一般化できる. まず,  $\kappa$  が非可算正則基数,  $\kappa \leq \alpha$  のとき,  $A, B \subseteq \mathcal{P}_\kappa \alpha$  に対して次のように定める:

$$A \leq_{\kappa, \alpha}^* B \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{P}_\kappa \alpha [\{y \in A \mid y \supseteq x\} \subseteq B].$$

定義 7.  $\kappa, \lambda$  は非可算正則基数で  $\kappa \leq \lambda$  なるものとし,  $E$  を  $\lambda$  の定常部分集合とする. このとき, 列  $\mathcal{F} = \langle F_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$  で次をみたすものを  $\lambda^*(\kappa, E)$  列といい,  $\lambda^*(\kappa, E)$  列が存在する, という主張を  $\lambda^*(\kappa, E)$  で表す.

- (1) 各  $\alpha \in E$  について  $F_\alpha$  は  $\mathcal{P}_\kappa \alpha$  の閉非有界部分集合である.
- (2)  $\mathcal{P}_\kappa \lambda$  の任意の閉非有界部分集合  $D$  に対し,  $\lambda$  の閉非有界部分集合  $C$  が存在して, 各  $\alpha \in C \cap E$  に対し  $F_\alpha \leq_{\kappa, \alpha}^* D \cap \mathcal{P}_\kappa \alpha$  が成り立つ.

$\lambda^*$  は  $\lambda^*(\omega_1, S_{\omega_2}^\omega)$  に他ならない. 定理 3 の一般化として, 定常な任意の  $E \subseteq \lambda$  について,  $\lambda^*(\kappa, E)$  は  $\diamond_\lambda^*(E)$  から従うので,  $\lambda$  が ineffable でない限り, この形の命題は無矛盾である.

定理 6 の一般化として次が成り立つ.

定理 8.  $\kappa$  は非可算正則基数,  $\kappa \leq \lambda$  を基数とするとき, 次は同値である.

- (1)  $\lambda^*(\kappa, S_{\lambda^+}^{\leq \kappa})$
- (2)  $\text{cof}(C_{\kappa, \lambda}, \geq_{\kappa, \lambda}^*) = \lambda^+$  (つまり,  $C_{\kappa, \lambda}$  の大きさ  $\lambda^+$  の部分族  $\mathcal{C}$  が存在して, 任意の  $C \in C_{\kappa, \lambda}$  に対して  $D \leq_{\kappa, \lambda}^* C$  なる  $D \in \mathcal{C}$  がとれる. ただし,  $C_{\kappa, \lambda}$  は  $\mathcal{P}_{\kappa \lambda}$  の閉非有界部分集合全体によって生成される  $\mathcal{P}_{\kappa \lambda}$  上のフィルターを表す).

特に,  $\lambda^*(\kappa, S_{\lambda^+}^{\leq \kappa})$  は  $2^\lambda = \lambda^+$  より従う.

一方, 定理 5 の一般化は, 現状ではアレフ数有限の場合についてのみ得られている. 証明には仮定の追加とより複雑な技巧とを要する.

定理 9.  $2 \leq n < \omega$  について,  $\text{CH} + \lambda^*(\omega_1, S_{\omega_n}^\omega)$  の下で次が成り立つ:  $\mathcal{P}_{\omega_1 \omega_n}$  の任意の定常部分集合  $S$  に対し, 定常な  $S' \subseteq S$  でどんな  $\alpha \in S_{\omega_n}^\omega$  についても  $S' \cap \mathcal{P}_{\omega_1} \alpha$  は  $\mathcal{P}_{\omega_1} \alpha$  の定常部分集合でない.

定理 10.  $3 \leq n < \omega$  について,  $\text{CH} + \lambda^*(\omega_1, S_{\omega_n}^\omega)$  の下で  $\text{WRP}(\omega_n)$  は  $\text{RP}(\omega_n)$  を導く.

これらの定理に関しては, 次の問題が残っている.

- 問題. (1) 定理 9, 10 で CH は必要か?  
 (2) アレフ数無限の場合に類似の定理は成り立つか?

## 参考文献

- [1] S. Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [2] B. König, P. Larson and Y. Yoshinobu, *Guessing clubs in the generalized club filter*, 投稿中.
- [3] A. Dow, *Set Theory in Topology*, in: Recent progress in general topology, edited by M. Hušek et. and J. van Mill, North-Holland, 167-197, 1992.
- [4] M. Foreman, *Stationary Sets, Chang's conjecture and Partition theory*, DIAMAC series 58, 73-94, 2002.
- [5] M. Foreman and S. Todorcevic, *A new Löwenheim-Skolem theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 357, 1693-1715, 2005.