数理解析研究所講究録
1530巻 2007年 82-95

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset の保存と reflection について

名古屋大学情報科学研究科 共同研究員
酒井 拓史

概 要

ω_2 以上の regular cardinal κ と $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal λ に対して, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset の $<\kappa$-closed forcing での保存の様子と stationary reflection principle について議論する.

1 序論

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の以下のタイプの stationary reflection principle は巨大基数理論の重要な命題としてこれまで幅広く研究されてきた.

定義 1.1 κ を regular uncountable cardinal, λ を κ 以上の ordinal とする. stationary な $T \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して, $\mathsf{SR}(T)$ を以下の stationary reflection principle とする:

$\mathsf{SR}(T)$ $\equiv$ 任意の stationary な $S \subseteq T$ に対し, 以下を満たす $W \subseteq \lambda$ が存在する:

(i) $|W| = \kappa \subseteq W$

(ii) $S \cap \mathcal{P}_\kappa W$ は ($\mathcal{P}_\kappa W$ で) stationary.

この stationary reflection principle は supercompact cardinal を何らかの forcing で κ^+ に崩壊したときにしばしば成立し, それ自身多くの興味深い帰結を持つ. 例えば, (十分大きい λ に対して) $\mathsf{SR}(\mathcal{P}_{\omega_1}\lambda)$ が成立すれば $2^\omega \leq \omega_2$, Chang's conjecture が成立し, また NS_{ω_1} が presaturated になる.

ここではどのような $T \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して $\mathsf{SR}(T)$ が成り立ちうるかについて考える. この問題は以下の事実によって, $<\kappa$-closed forcing での $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset の保存と関係してくる (後で使うので証明も与えておく. Lévy collapse, Col, については 第 2 節参照.):

事実 1.2 κ を regular uncountable cardinal とし, δ, λ を $\kappa < \delta \leq \lambda$ で δ が λ-supercompact cardinal であるとする. G を V 上 の $\mathrm{Col}(\kappa, \delta)$-generic filter とし，$T \in V[G]$ を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset で，以下が $V[G]$ で成り立つものとする：

> 任意の stationary な $S \subseteq T$ と $<\kappa$-closed forcing $\mathbb{P}$ に対して
> $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary"

このとき $V[G]$ で $\mathsf{SR}(T)$ が成立する．

<u>証明</u> $V[G]$ で stationary な $S \subseteq T$ を任意に取る．定義 1.1 の (i),(ii) を満たす W が存在することを示す．

V で U を $\mathcal{P}_\delta\lambda$ の normal measure, M を $\mathrm{Ult}(V,U)$ の transitive collapse, $j: V \to M$ を ultrapower map としておく．H を $V[G]$ 上 $\mathrm{Col}(\kappa, [\delta, j(\lambda)))$-generic filter とすると，$V[G][H]$ で，$j: V \to M$ は $j^*: V[G] \to M[G][H]$ に自然に拡張される．j^* も j で表すことにする．また ordinal の $<\kappa$-列全体の class はここに出たすべてのモデルで absolute であることに注意しておく．

$j(S)$ は $M[G][H]$ で $\mathcal{P}_\kappa j(\lambda)$ の stationary subset であるが ($\kappa < \mathrm{crit}(j) = \delta$)，$j(S) \cap \mathcal{P}_\kappa j``\lambda$ が $M[G][H]$ で stationary であることをまず見る．まず各 $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対しては $j(x) = j``x$ であることに注意すると

$$j(S) \cap \mathcal{P}_\kappa j``\lambda \supseteq \{j(x) \mid x \in S\} = \{j``x \mid x \in S\}$$

である．一方 T に対する仮定より S は $V[G][H]$ で $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset であり，よって $\{j``x \mid x \in S\}$ は $V[G][H]$ で $\mathcal{P}_\kappa j``\lambda$ の stationary subset になる．よって $j(S) \cap \mathcal{P}_\kappa j``\lambda$ は $V[G][H]$ で stationary であり，$M[G][H] \subseteq V[G][H]$ であるので $M[G][H]$ でも stationary となる．

ここで $M[G][H]$ では $|j``\lambda| = \kappa \subseteq j``\lambda$ であることに注意する．よって $M[G][H]$ では $|W| = \kappa \subseteq W$ かつ $j(S) \cap \mathcal{P}_\kappa W$ が stationary となる $W \subseteq j(\lambda)$ が存在する．よって，j の elementarity より，$V[G]$ でも $|W| = \kappa \subseteq W$ かつ $S \cap \mathcal{P}_\kappa W$ となる $W \subseteq \lambda$ が存在する． □

$\mathcal{P}_{\omega_1}\lambda$ の stationary subset はすべて $<\omega_1$-closed forcing で保存されるので次が成立する：

- λ-supercompact cardinal を Lévy collapse で ω_2 にすると，$\mathsf{SR}(\mathcal{P}_{\omega_1}\lambda)$ が成立する．

$\kappa \geq \omega_2$ の場合は少し状況が複雑になる．まず，$\lambda \geq \kappa^+$ のときは $\mathsf{SR}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$ は成立しないことが Shelah-Shioya [8] によって示されている．また，$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ であれば $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subsets の $<\kappa$-closed forcing での保存の様子もよく分かっており，部分的に SR が成り立ちうることが分かっている．大まかには次のようになる：

$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ ならば，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の元の $<\kappa$-列が λ の元でコードでき，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の元にこのコードに関する internally approachability が定義できる．このとき $T_{\kappa\lambda}$

を internally approachable な $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の元全体とすると，任意の stationary な $S \subseteq T_{\kappa\lambda}$ は $<\kappa$-closed forcing で stationary であることが保存される．よって次が成り立つ：

- κ を regular uncountable cardinal とし，δ, λ を $\kappa < \delta \leq \lambda$ で δ は λ-supercompact cardinal，λ は $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ なる cardinal であるとする．このとき G を $\mathrm{Col}(\kappa, \delta)$-generic filter とすると，$V[G]$ では $\mathsf{SR}(T_{\kappa\lambda})$ が成立する．($V[G]$ では $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ であることに注意.)

なお，ここで述べた internally approachability と forcing での stationary set の保存，及び stationary reflection の関係については，Foreman-Magidor-Shelah [4]，Foreman-Magidor [3]，Fuchino-Piper [5], Shioya [9] などで取り上げられている．また，本稿の第 3 節や第 5 節でも上と同様の議論をする．

ここで，λ が $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ なる singular cardinal である場合は $\lambda^{<\kappa} > \lambda$ となり $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の $<\kappa$-列は λ の元でコードできず，internally approachability がうまく定義できない．本稿では，κ が ω_2 以上の regular cardinal で λ が $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal である場合について，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subsets の $<\kappa$-closed forcing における保存の様子と stationary reflection principle について調べる．

ここでは $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ を 3 つに分けて考える．その分割を書き表す前に，internally approachability について復習しておく：

定義 1.3 集合 x と limit ordinal ζ に対し，

x は長さ ζ で internally approachable (i.a.)．

$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 長さ ζ の列 $\langle x_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ で，$\bigcup_{\xi<\zeta} x_\xi = x$ かつ任意の $\eta < \zeta$ に対し $\langle x_\xi \mid \xi < \eta \rangle \in x$ となるものが存在する．

ω_2 以上の regular uncountable cardinal κ と $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal λ に対して $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ を次のように $T^0_{\kappa\lambda}, T^1_{\kappa\lambda}, T^2_{\kappa\lambda}$ の 3 つに分割する．但し $\theta := (2^\lambda)^+$ とし Δ を $\mathcal{H}_\theta$ の well-ordering とする．

- $\overline{T}^0_{\kappa\lambda}$:= 次を満たす $M \in \mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta$ 全体の集合：

  (i) $\kappa, \lambda \in M \prec \langle \mathcal{H}_\theta, \in, \Delta \rangle$ かつ $M \cap \kappa \in \kappa$

  (ii) $\mathrm{cf}(\zeta) = \mathrm{cf}(\lambda)$ なる $\zeta < \kappa$ に対して M は長さ ζ で i.a.

  $T^0_{\kappa\lambda} := \{M \cap \lambda \mid M \in \overline{T}^0_{\kappa\lambda}\}$

- $\overline{T}^1_{\kappa\lambda}$:= 次を満たす $M \in \mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta$ 全体の集合：

  (i) $\kappa, \lambda \in M \prec \langle \mathcal{H}_\theta, \in, \Delta \rangle$ かつ $M \cap \kappa \in \kappa$

  (ii) $\mathrm{cf}(\zeta) \neq \mathrm{cf}(\lambda)$ なる $\zeta < \kappa$ に対して M は長さ ζ で i.a.

  $T^1_{\kappa\lambda} := \{M \cap \lambda \mid M \in \overline{T}^1_{\kappa\lambda}\}$

- $T^2_{\kappa\lambda} := \mathcal{P}_\kappa\lambda \setminus (T^0_{\kappa\lambda} \cup T^1_{\kappa\lambda})$

$T^0_{\kappa\lambda}, T^1_{\kappa\lambda}, T^2_{\kappa\lambda}$ はすべて $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で stationary で $\mathcal{P}_\kappa\lambda = T^0_{\kappa\lambda} \dot\cup T^1_{\kappa\lambda} \dot\cup T^2_{\kappa\lambda}$ となることに注意しておく．また $T^0_{\kappa\lambda}$ を少し小さくした $T^{0*}_{\kappa\lambda}$ を以下のように定める：

- $\overline{T}^{0*}_{\kappa\lambda}$:= 次を満たす $M \in \mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta$ 全体の集合：

  (i) $\kappa, \lambda \in M \prec \langle \mathcal{H}_\theta, \in, \Delta \rangle$

  (ii) M は長さ $\mathrm{cf}(\lambda)$ で i.a.

  $T^{0*}_{\kappa\lambda} := \{M \cap \lambda \mid M \in \overline{T}^0_{\kappa\lambda}\}$

第 5 節で見るように，$E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \in I[\kappa]$ ならば $T^{0*}_{\kappa\lambda} = T^0_{\kappa\lambda}$ であり，特に $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ ならば $T^{0*}_{\kappa\lambda} = T^0_{\kappa\lambda}$ である．($E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)}$，$I[\kappa]$ に関しては第 2 節参照．)

本稿では以下を示す．まず $T^0_{\kappa\lambda}$ に関しては次が成り立つ（第 5 節）：

定理 1.4 (1) κ を ω_2 以上の regular uncountable cardinal，λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal とし，任意の $\gamma < \lambda$ に対して $\gamma^{<\kappa} \leq \lambda$ であるとする．このとき，任意の stationary な $S \subseteq T^{0*}_{\kappa\lambda}$ と任意の $<\kappa$-closed forcing notion $\mathbb{P}$ に対して，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary"．

(2) $\omega_2 \leq \kappa < \delta < \lambda$ とし，κ を regular uncountable cardinal，δ を λ-supercompact cardinal，λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ なる singular cardinal とする．G を V 上の $\mathrm{Col}(\kappa, \delta)$-generic filter とすると $V[G]$ で $\mathsf{SR}(T^{0*}_{\kappa\lambda})$ が成立する．

また V で $E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \in I[\kappa]$ が成り立っているとすると，$V[G]$ では $\mathsf{SR}(T^0_{\kappa\lambda})$ が成立する．

次に $T^1_{\kappa\lambda}$ に関しては次が成立する（第 4 節）：

定理 1.5 κ を ω_2 以上の regular uncountable cardinal，λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal とし，$2^\lambda = \lambda^+$ であると仮定する．

(1) 任意の stationary な $T \subseteq T^1_{\kappa\lambda}$ に対して，stationary な $S \subseteq T$ で $\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ "S は nonstationary" となるものが存在する．

(2) 任意の stationary な $T \subseteq T^1_{\kappa\lambda}$ に対して，$\mathsf{SR}(T^1_{\kappa\lambda})$ は成立しない．

最後に，$T^2_{\kappa\lambda}$ に関しては reflection の様子はよく分かっていないが，stationary subset の保存に関しては次が容易に分かる（第 3 節）：

定理 1.6 κ を ω_2 以上の regular uncoutable cardinal とし λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal とする．このとき，$\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ "$(T^2_{\kappa\lambda})^V$ は nonstationary"．

2 準備

ここでは本稿で使う記法について説明する．集合論の基本的な記法については Jech [6] を参照のこと．

regular cardinal $\mu < \kappa$ に対して，$E^\kappa_\mu := \{\zeta \in \kappa \mid \mathrm{cf}(\zeta) = \mu\}$ とする．E^κ_μ は κ の stationary subset である．

$\mathcal{M}$ を definable な universe の well-ordering を持つ sturcture とする．このとき，$x \subseteq \mathcal{M}$ に対して，$\mathrm{Skull}^{\mathcal{M}}(x)$ で x の $\mathcal{M}$ での Skolem hull，つまり x を subset として含む $\mathcal{M}$ の elementary submodel のうち最小のものをさすことにする．

次に Lévy collapse に関する記法を説明する．regular cardinal κ と ordinal の集合 A に対し，$\mathrm{Col}(\kappa, A)$ を κ から A の各元に対する全射を付け加える forcing notion とする．つまり partial function $p : \kappa \times A \to \mathrm{On}$ で $|p| < \kappa$ かつ任意の $\langle \xi, \alpha \rangle \in \kappa \times A$ に対し $p(\xi, \alpha) \in \alpha$ となるもの全体に包含関係の逆で順序を入れたものである．$\mathrm{Col}(\kappa, A)$ は $<\kappa$-closed であることに注意しておく．

次に PCF 理論に関する記法をまとめる．PCF 理論の基礎に関しては Shelah [7]，Burke-Magidor [2]，Abraham [1] などを参照．

Γ を regular cardinal からなる無限集合とする．$J_{\mathrm{bd}}[\Gamma]$ を Γ の bounded subset 全体からなる Γ 上のイデアルのこととする．次に J を Γ 上のイデアルとする．各 $f, g \in \Pi\Gamma$ に対して，

- $f <_J g \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma \mid f(\gamma) < g(\gamma)\} \in J$
- $f \leq_J g \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \Gamma \setminus \{\gamma \in \Gamma \mid f(\gamma) \leq g(\gamma)\} \in J$

と定める．更に regular cardinal δ に対して，

$\mathrm{tcf}(\Pi\Gamma/J) = \delta \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\Pi\Gamma$ で $<_J$ に関して increasing かつ cofinal な長さ δ の列が存在する．

次はよく知られている：

事実 2.1 (Shelah [7]) λ を singular cardinal とする．このとき regular cardinal からなる集合 Γ で，$\sup\Gamma = \lambda$，$\mathrm{o.t.}\,\Gamma = \mathrm{cf}(\lambda)$ かつ $\mathrm{tcf}(\Pi\Gamma/J_{\mathrm{bd}}[\Gamma]) = \lambda^+$ となるものが存在する．

最後に Shelah によって定義された κ 上のイデアル $I[\kappa]$ の復習をしておく．κ を regular uncountable cardinal とする．κ の bounded subset の列 $\langle c_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ と，limit ordinal $\zeta \in \kappa$ に対して，

ζ は $\langle c_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ に関して approachable

$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ cofinal な $c \subseteq \zeta$ で，$\mathrm{o.t.}\,c = \mathrm{cf}(\zeta)$ かつ $\{c \cap \xi \mid \xi < \zeta\} \subseteq \{c_\xi \mid \xi < \zeta\}$ となるものが存在する．

$I[\kappa]$ を次を満たす $B \subseteq \kappa$ の全体とする：

> κ の bounded subset の列 $\langle c_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ と club $C \subseteq \kappa$ で，任意の $\zeta \in B \cap C$ が $\langle c_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ に関して approachable となるものが存在する．

$I[\kappa]$ は κ 上の normal ideal（必ずしも proper でない）となる．(Shelar [7] 参照．)

3 stationary set の保存の基本事項

ここでは $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set の $<\kappa$-closed forcing での保存に関する基本事項をまとめる．更に定理 1.6 を示す．

最初に，$<\kappa$-closed forcing では ground model の元の $<\kappa$-列は付け加わらないので，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 等は ground model と generic extension の間で absolute であることに注意しておく．

まず次はよく知られている：

補題 3.1 κ, θ を $\kappa \leq \theta$ なる regular uncountable cardinal とし，T を $\mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta$ の internally approachable な元全体の集合とする．

(1) 任意の stationary な $S \subseteq T$ と任意の $<\kappa$-closed forcing $\mathbb{P}$ に対して，$\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary"．

(2) G を V 上 $\mathrm{Col}(\kappa, \{|\mathcal{H}_\theta|\})$-generic filter とすると，$V[G]$ では T は ${\mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta}^V$ の club を含む．

<u>証明</u> $H := {\mathcal{H}_\theta}^V$ とする．

(1) S を T の stationary subset とし $\mathbb{P}$ を $<\kappa$-closed forcing notion とする．$p \in \mathbb{P}$ と $\mathcal{P}_\kappa H$ の club の $\mathbb{P}$-name $\dot{C}$ を任意に取る．$q \leq p$ と $x \in S$ で $q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$x \in \dot{C}$" となるものを見つければよい．V で議論する．

μ を十分大きな regular cardinal とし，Δ_μ を $\mathcal{H}_\mu$ の well-ordering とする．S は $\mathcal{P}_\kappa H$ で stationary ゆえ，$M \in \mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\mu$ で $M \cap H \in S$，$M \cap \kappa \in \kappa$ かつ $\kappa, \lambda, \mathbb{P}, p, \dot{C} \in M \prec \langle \mathcal{H}_\mu, \in, \Delta_\mu \rangle$ となるものが取れる．$q \leq p$ で $q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$M \cap H \in \dot{C}$" となるものを見つければよい．$\langle x_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ $(\zeta < \kappa)$ を $M \cap H$ の internally approachability の witness としておく．

$\xi < \zeta$ に関する帰納法で，p の下の降下列 $\langle p_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ と $\mathcal{P}_\kappa H$ の上昇列 $\langle y_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ を以下のように定める．$\xi < \zeta$ とし $\langle p_\eta \mid \eta < \xi \rangle$ と $\langle y_\eta \mid \eta < \xi \rangle$ が定まったとする．このとき $\langle p_\xi, y_\xi \rangle$ を以下を満たす組のうち Δ_μ に関して最小のものとする：

(i) 任意の $\eta < \xi$ に対し $p_\xi \leq p_\eta$．($\xi = 0$ のときは $p_0 \leq p$.)

(ii) $y_\xi \supseteq x_\xi \cup \bigcup_{\eta<\xi} y_\eta$.

(iii) $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$y_\xi \in \dot{C}$".

$\mathbb{P}$ が $<\kappa$-closed であることより，$\{p_\xi \mid \xi < \zeta\}$ の lower bound $q \in \mathbb{P}$ を取る．$q \leq p$ で $q \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi \in \dot{C}$" である．よって $M \cap H = \bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi$ であることを示せばよい．

まず各 $\xi < \zeta$ に対して $y_\xi \supseteq x_\xi$ であるので $M \cap H = \bigcup_{\xi<\zeta} x_\xi \subseteq \bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi$. 一方，各 y_ξ は $\mathcal{H}_\mu$ で $\mathbb{P}, p, \dot{C}, \langle x_\eta \mid \eta < \xi\rangle$ をパラメーターとして $\langle \mathcal{H}_\mu, \in, \Delta_\mu\rangle$ で定義できるが，これらのパラメーターはすべて M に属し $M \prec \langle \mathcal{H}_\mu, \in, \Delta_\mu\rangle$ であるので $y_\xi \in M$ となる．更に $M \cap \kappa \in \kappa$ かつ $M \prec \langle \mathcal{H}_\mu, \in\rangle$ であることから $y_\xi \subseteq M$ となることが容易に分かる．よって $\bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi \subseteq M \cap H$ である．以上より，$M \cap H = \bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi$ である．

(2) $V[G]$ で議論する．まず $\bigcup G$ は κ から H への全射であることに注意する．また任意の $\xi < \kappa$ に対して $\langle \bigcup G``\eta \mid \eta < \xi\rangle \in H$ であることにも注意する．よって

$C :=$ 次を満たす $x \in \mathcal{P}_\kappa H$ 全体の集合：
- (i) $x \cap \kappa$ は κ 未満の limit ordinal かつ $x = \bigcup G``(x \cap \kappa)$.
- (ii) 任意の $\xi < x \cap \kappa$ に対して $\langle \bigcup G``\eta \mid \eta < \xi\rangle \in x$.

とすると C は $\mathcal{P}_\kappa H$ の club になる．また，各 $x \in C$ に対して $\langle \bigcup G``\xi \mid \xi < x \cap \kappa\rangle$ が x が i.a. であることの witness になる．i.a. であることは absolute であるので，$C \subseteq T$ となる． □

次も基本的である：

補題 3.2 κ を regular uncountable cardinal とし λ を κ 以上の ordinal とする．このとき任意の $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して以下は同値：

(1) $<\kappa$-closed forcing notion で $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は nonstationary " となるものが存在する．

(2) $\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ "S は nonstationary".

<u>証明</u> $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする．(1) ならば (2) を示せばよい．

(1) を仮定する．ordinal μ を十分大きくとる．このとき $V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\})}$ では V 上の $\mathbb{P}$-generic filter が取れるので，$\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\})}$ "S は nonstationary" となる．

ここで $\mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\}) \cong \mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\}) \times \mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\})$ なので，$V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\})}$ は $V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ の $<\kappa$-closed forcing extension であることに注意する．また $V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ では $|\lambda| = \kappa$ であるので，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary subset は $<\kappa$-closed forcing で保存される．よって S が $V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ で stationary ならば，S は

$V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\})}$ でも stationary である．いま S は $V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\mu\})}$ で nonstationary ゆえ，$V^{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ でも nonstationary である． □

補題 3.1 と補題 3.2 から次の系が出る．更に次の系から定理 1.6 が従う．

系 3.3 κ を regular uncountable cardinal, $\lambda \geq \kappa$ を ordinal, $\theta \geq \lambda$ を regular cardinal とする．このとき任意の $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して以下は同値：

(1) 任意の $<\kappa$-closed forcing notion $\mathbb{P}$ に対し $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "S は stationary".

(2) $\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ "S は stationary".

(3) $\{M \in \mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta \mid M \cap \lambda \in S \wedge M$ は i.a.$\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta$ で stationary.

<u>証明</u> (1) と (2) が同値であることは補題 3.2 からすぐ分かる．(1) と (3) が同地であることを示す．$S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とし，$\overline{S} := \{M \in \mathcal{H}_\kappa\mathcal{H}_\theta \mid M \cap \lambda \in S \wedge M$ は i.a.$\}$ とする．

まず (3) ならば (1) を示す．$\overline{S}$ が stationary であるとする．$\mathbb{P}$ を $<\kappa$-closed forcing notion とし G を $\mathbb{P}$-generic filter とすると，補題 3.1 (1) より $V[G]$ で $\overline{S}$ は stationary. $S \supseteq \{M \cap \lambda \mid M \in \overline{S}\}$ ゆえ，S は $V[G]$ で $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で stationary となる．

次に (1) ならば (3) の対偶を示す．$\overline{S}$ が nonstationary であるとする．V で $\overline{T}$ を $\mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta$ の internally approachable な元全体の集合とし，G を $\mathrm{Col}(\kappa, \{|\mathcal{H}_\theta|\})$-generic filter とすると，補題 3.1 (2) より，$V[G]$ では $\overline{T} \setminus \overline{S}$ は club を含む．よって $V[G]$ では $C := \{M \cap \lambda \mid M \in \overline{T} \setminus \overline{S}\}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の club を含むが，$C \cap S = \emptyset$ である．つまり $V[G]$ では S は nonstationary となる． □

4 $T^1_{\kappa\lambda}$

ここでは定理 1.5 を少し一般化した以下を示す：

定理 4.1 κ を ω_2 以上の regular cardinal とし，λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる sigular cardinal とする．更に，regular cardinal からなる 集合 Γ と Γ 上の $\mathrm{cf}(\lambda)$-complete イデアル J で，$\sup\Gamma = \lambda$, $\mathrm{o.t.}\,\Gamma = \mathrm{cf}(\lambda)$ かつ $\mathrm{tcf}(\Gamma/J) = 2^\lambda$ なるものが存在すると仮定する．このとき以下が成立する．

(1) 任意の stationary な $T \subseteq T^1_{\kappa\lambda}$ に対して，stationary な $S \subseteq T$ で $\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ "S は nonstationary " となるものが存在する．

(2) 任意の stationary な $T \subseteq T^1_{\kappa\lambda}$ に対して，$\mathrm{SR}(T)$ は成立しない．

$2^\lambda = \lambda^+$ ならば，事実 2.1 より上の仮定を満たす Γ と J が存在するので，定理 1.5 は上の定理から導かれる．

この節は上の定理 4.1 の証明を行う．以下 κ を ω_2 以上の regular cardinal，λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal とし，定理 4.1 の仮定が成り立っているとする．仮定より 2^λ は regular cardinal であることに注意しておく．また $\theta = (2^\lambda)^+$ とし，Δ を $T^1_{\kappa\lambda}$ の定義に使った $\mathcal{H}_\theta$ の well-ordering とする．更に，Γ と J を定理 4.1 の仮定を満たし，$\min\Gamma > \kappa$ なるもののうち Δ に関して最小のものとする．$\langle f_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda\rangle$ を $\Pi\Gamma$ で $<_J$ に関して incereasing cofinal な 列のうち Δ に関して最小のものとする．

まず PCF 理論に関する準備をしておく．$|x| \leq \kappa$ なる 各 $x \subseteq \lambda$ に対して $\mathrm{ch}_x \in \Pi\Gamma$ を，各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $\mathrm{ch}_x(\gamma) = \sup(x \cap \gamma)$ なるものとする．また $\beta_x < 2^\lambda$ を $\mathrm{ch}_x \leq_J f_\beta$ なる最小の β とする．

補題 4.2 (Shelah [7]) $\zeta < \kappa$ を $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \mathrm{cf}(\zeta)$ なる limit ordinal とし，$\langle x_\xi \mid \xi < \zeta\rangle$ を $\subseteq$-increasing な $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の元の列とする．このとき $x := \bigcup_{\xi<\zeta} x_\xi$ とすると，$\beta_x = \sup_{\xi<\zeta} \beta_{x_\xi}$．

<u>証明</u> $\beta_x \geq \sup_{\xi<\zeta}\beta_{x_\xi}$ は明らか．$\beta_x \leq \sup_{\xi<\zeta}\beta_{x_\xi}$ を示す．$\beta^* := \sup_{\xi<\zeta}\beta_{x_\xi}$ とし，$\mathrm{ch}_x \leq_J f_{\beta^*}$ を示せばよい．2 つに場合分けして示す．

Case 1. $\mathrm{cf}(\lambda) < \mathrm{cf}(\zeta)$ のとき．

背理法で，$\mathrm{ch}_x \leq_J f_{\beta^*}$ でないとする．つまり $D := \{\gamma \in \Gamma \mid \sup(x\cap\gamma) > f_{\beta^*}(\gamma)\} \notin J$ とする．各 $\gamma \in D$ に対して $\sup(x \cap \gamma) = \sup_{\xi<\zeta}(\sup(x_\xi \cap \gamma))$ であるので，$\xi_\gamma < \zeta$ で $\sup(x_{\xi_\gamma} \cap \gamma) > f_{\beta^*}(\gamma)$ となるものが取れる．更に $|D| \leq |\Gamma| = \mathrm{cf}(\lambda) < \mathrm{cf}(\zeta)$ ゆえ，$\eta := \sup_{\gamma\in D}\xi_\gamma < \zeta$．このとき，各 $\gamma \in D$ に対して $\sup(x_\eta \cap \gamma) > f_{\beta^*}(\gamma)$ となり，$\mathrm{ch}_{x_\eta} \not\leq_J f_{\beta^*}$ となる．これは，$\beta^* = \sup_{\xi<\zeta}\beta_\xi \geq \beta_\eta$ に矛盾．

Case 2. $\mathrm{cf}(\lambda) > \mathrm{cf}(\zeta)$ のとき．

$B \subseteq \zeta$ を ζ で cofinal で $\mathrm{o.t.}\,B = \mathrm{cf}(\zeta)$ なるものととる．各 $\xi < B$ に対し $D_\xi := \{\gamma \in \Gamma \mid \sup(x_\xi \cap \gamma) \leq f_{\beta^*}(\gamma)\}$ とする．$\Gamma \setminus D_\xi \in J$ である．ここで，$D^* := \bigcap_{\xi\in B} D_\xi$ とすると $\mathrm{cf}(\lambda)$-completeness より $\Gamma \setminus D^* \in J$ である．また，各 $\gamma \in D^*$ に対して $\sup(x\cap\gamma) = \sup_{\xi\in B}(\sup(x_\xi \cap \gamma)) \leq f_{\beta^*}(\gamma)$ である．以上より，$\mathrm{ch}_x \leq_J f_{\beta^*}$．

□

系 4.3 (Shelah [7]) $M \in \overline{T}^1_{\kappa\lambda}$ とする．このとき，$\beta_{M\cap\lambda} = \sup(M \cap 2^\lambda)$．

<u>証明</u> まず $\beta_{M\cap\lambda} \geq \sup(M \cap 2^\lambda)$ を示す．$\Gamma, J, \langle f_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda\rangle \in M \prec \langle \mathcal{H}_\theta, \in\rangle$ であることに注意しておく．また $|\Gamma| \in M \cap \kappa \in \kappa$ より，$\Gamma \subseteq M$ となることにも注意しておく．

$\beta \in M \cap 2^\lambda$ を任意に取る．このとき $f_\beta \in M$ であるが，$\Gamma \subseteq M$ より $f_\beta``\Gamma \subseteq M$ となる．よって $f_\beta \leq_J \mathrm{ch}_{M\cap\lambda}$ であるので，$\beta \leq \beta_{M\cap\lambda}$. β は $M \cap 2^\lambda$ から任意に取ったので，$\beta_{M\cap\lambda} \geq \sup(M \cap 2^\lambda)$ である．

次に $\beta_{M\cap\lambda} \leq \sup(M \cap 2^\lambda)$ を示す．$\langle M_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ $(\zeta < \kappa,\ \mathrm{cf}(\zeta) \neq \mathrm{cf}(\lambda))$ を M の internally approachability を witness するものとする．必要ならば各 M_ξ を $\bigcup_{\eta\leq\xi} M_\eta$ で置き換えることで，$\langle M_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ は $\subseteq$-increasing であるとしてよい．また各 $\xi < \zeta$ に対して $\beta_\xi := \beta_{M_\xi\cap\lambda}$ とする．

まず各 $\xi < \zeta$ に対して $M_\xi \in M$ ゆえ，elementarity より $\beta_\xi \in M \cap 2^\lambda$ となる．よって $\sup_{\xi<\zeta} \beta_\xi \leq \sup(M \cap 2^\lambda)$ である．一方 $\bigcup_{\xi<\zeta} M_\xi \cap \lambda = M \cap \lambda$ ゆえ，補題 4.2 より $\beta_{M\cap\lambda} = \sup_{\xi<\zeta} \beta_\xi$. よって $\beta_{M\cap\lambda} \leq \sup(M \cap 2^\lambda)$. □

次に，定理 4.1 を示すために stationary な $T \subseteq T^1_{\kappa\lambda}$ を任意にとり固定する．以下では，まず stationary な $S \subseteq T$ をうまくとり，その後で S が $<\kappa$-closed forcing で nonstationary になることと，S が reflect しないことを示す．

$\langle H_\alpha \mid \alpha \in 2^\lambda \rangle$ を ${}^{<\omega}\lambda$ から $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ への関数全体の enumeration とし，T の元の列 $\langle x_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda \rangle$ を α に関する帰納法で以下のように定める：

> $\alpha < 2^\lambda$ とし，$\langle x'_\alpha \mid \alpha < \alpha$ まで定まったとする．このとき $x_\alpha \in T$ を以下を満たすようとる：
>
> (i) x_α は H_α について閉じている．つまり，任意の $a \in {}^{<\omega}x$ に対して $H_\alpha(a) \subseteq x_\alpha$.
>
> (ii) $\beta_{x_\alpha} \gneq \sup_{\alpha'<\alpha} \beta_{x_{\alpha'}}$.

$\{x \in T \mid \beta_x \gneq \sup_{\alpha'<\alpha} \beta_{x_{\alpha'}}\}$ は stationary であるので，このような x_α は取れることに注意する．

ここで

$$S := \{x_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda\}$$

とする．このとき，任意の $H : {}^{<\omega}\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して，H について閉じた $x \in S$ が存在するので S は stationary である．S が $<\kappa$-closed forcing で nonstationary になることと，S が reflect しないことを示す前に，次に注意しておく：

補題 4.4 (1) $\{\beta_x \mid x \in S\}$ は 2^λ で nonstationary.

(2) $\zeta < \kappa$ を $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \mathrm{cf}(\zeta)$ なる limit ordinal とし，$\langle y_\xi \mid \xi < \zeta \rangle$ を S の元の strictly $\subseteq$-increasing な列とする．このとき $\bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi \notin S$.

<u>証明</u> (1) は $\langle x_\alpha \mid \alpha < 2^\lambda \rangle$ の作り方から明らか．(2) を示す．

各 $\xi < \zeta$ に対して，$\alpha_\xi < 2^\lambda$ を $x_{\alpha_\xi} = y_\xi$ なるものとし $\beta_\xi := \beta_{x_{\alpha_\xi}} = \beta_{y_\xi}$ とする．$y := \bigcup_{\xi<\zeta} y_\xi$ とすると補題 4.2 より $\beta_y = \sup_{\xi<\zeta} \beta_\xi$ である．$\alpha <$

$\sup_{\xi<\zeta}\alpha_\xi$ とすると $\beta_{x_\alpha} < \sup_{\xi<\zeta}\beta_\xi$ なので $x_\alpha \neq y$. また $\alpha \geq \sup_{\xi<\zeta}\alpha_\xi$ ならば $\beta_{x_\alpha} > \sup_{\xi<\zeta}\beta_\xi$ なので $x_\alpha \neq y$. よって $y \notin S$ である. □

まず S が $\mathrm{Col}(\kappa, \{\lambda\})$ で nonstationary になることを示す：

補題 4.5 $\Vdash_{\mathrm{Col}(\kappa,\{\lambda\})}$ "S は nonstationary".

証明 系 3.3 より, $\overline{S} := \{M \in \mathcal{P}_\kappa\mathcal{H}_\theta \mid M \cap \lambda \in S \wedge M$ は i.a.$\}$ が nonstationary であることを示せばよい.

まず $\bar{S} \setminus (\overline{T}^0_{\kappa\lambda} \cup \overline{T}^1_{\kappa\lambda})$ は nonstationary であることに注意する. また $\overline{S} \cap \overline{T}^0_{\kappa\lambda} = \emptyset$ であることは容易に分かる.

更に系 4.3 より

$$\{\sup(M \cap 2^\lambda) \mid M \in \overline{S} \cap \overline{T}^1_{\kappa\lambda}\} = \{\beta_{M\cap\lambda} \mid M \in \overline{S} \cap \overline{T}^1_{\kappa\lambda}\} \subseteq \{\beta_x \mid x \in S\}$$

である. よって補題 4.4 より $\{\sup(M \cap 2^\lambda) \mid M \in \overline{S} \cap \overline{T}^1_{\kappa\lambda}\}$ は 2^λ で nonstationary であり, よって $\overline{S} \cap \overline{T}^1_{\kappa\lambda}$ も nonstationary である.

以上より $\bar{S}$ は nonstationary である. □

最後に S が reflect しないことを示す：

補題 4.6 $W \subseteq \lambda$ を $|W| = \kappa \subseteq W$ なるものとする. このとき $S \cap \mathcal{P}_\kappa W$ は nonstationary.

証明 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $\sup(W \cap \gamma) \notin W$ であるとしてよい. そうでないとき $S \cap \mathcal{P}_\kappa W$ が nonstationary であることは容易に分かる.

まず, 任意の $\gamma \in W$ に対して $\mathrm{cf}(\sup(W \cap \gamma)) < \kappa$ である場合を考える. この場合 $\{x \in \mathcal{P}_\kappa W \mid \mathrm{ch}_x = \mathrm{ch}_W\}$ が $\mathcal{P}_\kappa W$ で club になるが, $\mathrm{ch}_x = \mathrm{ch}_W$ となる $x \in S$ は S の作り方から高々1つ. よってこの場合 $S \cap \mathcal{P}_\kappa W$ は nonstationary である.

よって $\gamma \in \Gamma$ で $\mathrm{cf}(\sup(W\cap\gamma)) = \kappa$ となるものが取れるとしてよい. このとき $|W| = \kappa$ ゆえ, $\mathcal{P}_\kappa W$ の $\subseteq$-increasing continuous cofinal な列 $\langle z_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ で $\langle \sup(z_\xi \cap \gamma) \mid \xi < \kappa\rangle$ が strictly increasing なものが取れる. $B := \{\xi < \kappa \mid z_\xi \in S\}$ とする.

$\zeta < \kappa$ が limit ordinal で $\sup(B \cap \zeta) = \zeta$ ならば $z_\zeta \notin S$ であることを見る. (このことから $S \cap \mathcal{P}_\kappa W$ が nonstationary であることが従う.) まず $\mathrm{cf}(\zeta) = \mathrm{cf}(\lambda)$ とすると $\mathrm{cf}(\sup(z_\zeta\cap\gamma)) = \mathrm{cf}(\lambda)$ となり $z_\zeta \notin T^1_{\kappa\lambda}$. よって $z_\zeta \notin S$ である. 一方 $\mathrm{cf}(\zeta) \neq \mathrm{cf}(\lambda)$ とすると, 補題 4.4 (2) より $z_\zeta = \bigcup_{\xi\in B\cap\zeta} z_\xi \notin S$ である. □

以上で定理 4.1 の証明が完了した.

5 $T^0_{\kappa\lambda}$

ここでは定理 1.4 を示す．この節の終わりまで κ を ω_2 以上の regular cardinal, λ を $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa < \lambda$ なる singular cardinal として固定する．更に $\theta = (2^\lambda)^+$ とし Δ を $\overline{T}^0_{\kappa\lambda}$ の定義にあらわれた $\mathcal{H}_\theta$ の well-ordering とする．

まず，序論でも少し述べた次を見ておく：

補題 5.1 $E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \in I[\kappa]$ ならば $T^{0*}_{\kappa\lambda} = T^0_{\kappa\lambda}$

<u>証明</u> $E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \in I[\kappa]$ とし $\overline{T}^{0*}_{\kappa\lambda} = \overline{T}^0_{\kappa\lambda}$ を示す．$\overline{T}^{0*}_{\kappa\lambda} \supseteq \overline{T}^0_{\kappa\lambda}$ を示せばよい．

κ の bounded subset の列 $\langle c_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ と club $C \subseteq \kappa$ を，任意の $\zeta \in E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \cap C$ が $\langle c_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ に関して approachable となるような組のうち Δ について最小のものとする．

$M \in \overline{T}^0_{\kappa\lambda}$ を任意にとる．M が長さ $\mathrm{cf}(\lambda)$ で internally approachable であることを示せばよい．まず $\langle M_\xi \mid \xi < \zeta\rangle$ ($\zeta < \kappa$, $\mathrm{cf}(\zeta) = \mathrm{cf}(\lambda)$) を M の internally approachability を witness するものとする．必要なら M_ξ を $\bigcup_{\xi' \leq \xi} M_{\xi'}$ で置き換えて，$\langle M_\xi \mid \xi < \zeta\rangle$ は $\subseteq$-increasing であるとしてよい．各 $\xi < \zeta$ に対して $\eta_\xi := \sup(M_\xi \cap \kappa)$ とすると $\eta_\xi < M \cap \kappa$ で，更に $\langle \eta_\xi \mid \xi < \zeta\rangle$ は $M \cap \kappa$ で cofinal となる．

次に $C \in M$ と $M \in \overline{T}^0_{\kappa\lambda}$ より $M \cap \kappa \in C \cap E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)}$ であることに注意する．$c \subseteq M \cap \kappa$ を cofinal で，o.t. $c = \mathrm{cf}(\lambda)$ かつ $\{c \cap \eta \mid \eta < M \cap \kappa\} \subseteq \{c_\xi \mid \xi < M \cap \kappa\}$ なるものとする．$\langle c_\xi \mid \xi < \kappa\rangle \in M$ ゆえ $\{c_\xi \mid \xi < M \cap \kappa\} \subseteq M$ で，各 $\eta < M \cap \kappa$ に対し $c \cap \eta \in M$ となる．

ここで各 $\nu < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $\xi_\nu < \zeta$ を η_ξ が c の ν 番目の元より大きくなるような最小の ξ とする．このとき $\langle \xi_\nu \mid \nu < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ は ζ で cofinal で，initial segment はすべて M の元となる．よって $\bigcup_{\nu < \mathrm{cf}(\lambda)} M_{\xi_\nu} = M$ で，また $\langle M_{\xi_\nu} \mid \nu < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ の initial segment はすべて M に属す．よって M は長さ $\mathrm{cf}(\lambda)$ で internally approachable で，$M \in \overline{T}^{0*}_{\kappa\lambda}$ である． □

定理 1.4 を示す：

<u>定理 1.4 の証明</u> (1) まず準備として，任意の $x \in T^{0*}_{\kappa\lambda}$ がある意味で internally approachable であることを見ておく．

まず，$\langle \gamma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ を λ で cofinal, increasing かつ $\gamma_0 \geq \kappa$ なるもののうち Δ に関して最小なものとし，

$$\Omega := \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\lambda)} {}^{\xi}(\mathcal{P}_\kappa \gamma_\xi)$$

により定める．定理の仮定より $|\Omega| = \lambda$ であることに注意する．$\varphi : \lambda \to \Omega$ を Δ に関して最小の全単射とする．

Claim 任意の $x \in T^{0*}_{\kappa\lambda}$ は φ に関して長さ $\mathrm{cf}(\lambda)$ で internally approachable, つまり $\langle x_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ で $\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} x_\xi = x$ かつ任意の $\zeta < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $\varphi^{-1}(\langle x_\xi \mid \xi < \zeta\rangle) \in x$ となるものが存在する.

Claim の証明 $x \in T^{0*}_{\kappa\lambda}$ とする. $M \in \overline{T}^{0*}_{\kappa\lambda}$ を $M \cap \lambda = x$ となるものとし $\langle M_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ を M の internally approachability を witness するものとする. 必要なら M_ξ を $\bigcup_{\xi'\leq\xi} M_{\xi'}$ で置き換えて, $\langle M_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ は $\subseteq$-increasing であるとしてよい.

ここで各 $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $x_\xi := M_\xi \cap \gamma_\xi$ とする. このとき明らかに $\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} x_\xi = x$ である. また $\langle \gamma_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle \in M$ であることに注意すると, 各 $\zeta < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $\langle x_\xi \mid \xi < \zeta\rangle \in M$ であることが分かる. 更に $\varphi \in M$ でもあるので, 各 $\zeta < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $\varphi^{-1}(\langle x_\xi \mid \xi < \zeta\rangle) \in M \cap \lambda = x$ である. □ (Claim)

(1) の証明に入る. 系 3.3 より $\{M \in \mathcal{P}_\kappa \mathcal{H}_\theta \mid M \cap \lambda \in S \wedge M$ は i.a.$\}$ が $\mathcal{P}_\kappa \mathcal{H}_\theta$ で stationary であることを示せばよい. $H : {}^{<\omega}\mathcal{H}_\theta \to \mathcal{H}_\theta$ を任意に取る. internally approachable な $M \in \mathcal{P}_\kappa \mathcal{H}_\theta$ で, H について閉じ $M \cap \lambda \in S$ となるものを見つければよい ($M \cap \lambda \in S$ より $M \cap \kappa \in \kappa$ となる).

S は stationary ゆえ, $\kappa, \lambda \in N \prec \langle \mathcal{H}_\theta, \in, \Delta, H\rangle$ で $N \cap \lambda \in S$ となるものが取れる. $\langle x_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ を $N \cap \lambda$ が φ に関して internally approachable であることを witness するものとする. 各 $\zeta < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $\langle x_\xi \mid \xi < \zeta\rangle \in N$ であることに注意しておく.

$\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$ に関する induction で, $N_\xi \in \mathcal{P}_\kappa \mathcal{H}_\theta$ を

$$x_\xi \cup \bigcup_{\eta<\xi} N_\eta \cup \{\langle N_\eta \mid \eta < \xi\rangle\}$$

の H による閉方とし, $M := \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} N_\xi$ とする. まず M は H について閉じており, $\langle N_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ が M が internally approachable であることを witness する. よって $M \cap \lambda \in S$ を示せばよい.

$M \cap \lambda = N \cap \lambda$ ($\in S$) を示す. まず $N \cap \lambda = \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} x_\xi \subseteq M \cap \lambda$ である. 一方で $\langle N_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ を定めた induction の initial segment はすべて N で遂行でき, よって各 $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$ に対して $N_\xi \in N$ である. 更に $|N_\xi| \in N \cap \kappa \in \kappa$ より $N_\xi \subseteq N$ となる. よって $M \cap \lambda = \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} N_\xi \cap \lambda \subseteq N \cap \lambda$ である.

以上で (1) の証明が完了した.

(2) $V[G]$ では, 任意の $\gamma < \lambda$ に対して $\gamma^{<\kappa} \leq \lambda$ となっていることに注意すると, (1) と事実 1.2 より (2) の前半が従う.

また V で $E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \in I[\kappa]$ が成り立っていれば, $V[G]$ でも $E^\kappa_{\mathrm{cf}(\lambda)} \in I[\kappa]$ が成り立ち, よって補題 5.1 より $V[G]$ では $T^{0*}_{\kappa\lambda} = T^0_{\kappa\lambda}$ となる. よってこの場合は $V[G]$ で $\mathrm{SR}(T^0_{\kappa\lambda})$ が成立する.

□ (定理 1.4)

参考文献

[1] U. Abraham, *Cardinal Arithmetic*, Handbook Set Theory into the 21st Century, M. Foreman and A. Kanamori eds. Kluwer Academic Publishers, 2006.

[2] M. Burke and M. Magidor, *Shelah's pcf theory and its applications*, Ann. Pure Appl. Logic **50** (1990), no.3, 207-254.

[3] M. Foreman and M. Magidor, *Large cardinals and definable counter examples to the continuum hypothesis*, Ann. of Pure and Appl. Logic **76** (1995), 47-97.

[4] M. Foreman, M. Magidor and S. Shelah, *Martin's Maximum, saturated ideals and nonregular ultrafilters, Part I*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 1, 1-47.

[5] S. Fuchino and G. Piper, *Destructivity of stationary subsets of* $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, Math. Logic Quarterly **51** (2006), no.6, 560-569.

[6] T. Jech, *Set Theory 3rd edition*, Springer-Verlag, Berlin et al., 2002.

[7] S. Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford Logic Guides **29**, Oxford University Press, 1994.

[8] S. Shelah and M. Shioya, *Nonreflecting stationary sets in* $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, Adv. Math. **199** (2006), 185-191.

[9] M. Shioya, *Some apprication of stationary reflection in* $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, 京都大学数理解析研究所講究録 1471（強制法と無限組み合わせ論）, 2006.