数理解析研究所講究録
1530巻 2007年 1-4

非可換超積に関する問題について

江田 勝哉

一般に超積を非可換化しようという話しではなく、群の非可換無限積、つまり、自由積の無限化と準同型写像と関係した話しである。以下 B_i $(i \in I)$ を群とする。また $F \Subset I$ は F が I の有限部分集合であることを意味する。

普通の積を、可換な場合の積と呼ぶが、それを

$$\Pi_{i\in I}B_i = \varprojlim(\Pi_{i\in F}B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)$$

と見ることにより、群の自由積は

$$\varprojlim(*_{i\in F}B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)$$

のように無限化することができる (Higman [7])。Higman はこの群を unrestricted free product と呼んでいる。この群は位相幾何では shape group と呼ばれる群に対応する。その部分群

$$\times_{i\in I}B_i = \bigcap_{F_0 \Subset I} *_{i\in F_0}B_i * \varprojlim(*_{i\in F}B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I \setminus F_0)$$

は、I が可算の場合、基本群に対応する。非可算の場合、Cannon-Conner[1] の Big fundamental group に対応する。この群の要素は無限語と関係し、I が非可算の場合でも可算サポートをもつ部分群が基本群に対応する [4]。 とくに、$\times_{n<\omega}\mathbb{Z}$ は Hawaiian Earring の基本群となる。

可換の積の場合準同型写像を考えると有限個の可算完備 ultrafilter $\mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_n$ が存在して、

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{i\in I}B_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\
\Pi_{i\in I}B_i/\mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_{i\in I}B_i/\mathcal{U}_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

となる [6]。念のため書いておくが、これは準同型写像の行く先が slender 群といわれる群のときにのみ成立することで、自明なことではない。

$$\mathcal{F} = \{X | \exists X_i (X_i \in \mathcal{U}_i \& \bigcup_{i=1}^{n} X_i \subseteq X)\}$$

とおけば、

$$\Pi_{i\in I}B_i/\mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_{i\in I}B_i/\mathcal{U}_n = \Pi_{i\in I}B_i/\mathcal{F}$$

となる。I の濃度は最小の可測濃度未満であるならば、$\mathcal{U}_i$ は principal filter となり、有限集合 $\{i_1, \cdots, i_n\}$ が存在し、$\mathcal{F} = \{X \subseteq I : \{i_1, \cdots, i_n\} \subseteq X\}$ となるので

$$\Pi_{i \in I} B_i / \mathcal{F} = B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_n}$$

が成立する。この非可換化が成立して

$$\begin{tikzcd} \varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\ \varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{F} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

が成立する [5]。I の濃度は最小の可測濃度未満であるならば、$\mathcal{F} = \{X \subseteq I : \{i_1, \cdots, i_n\} \subseteq X\}$ となるので、

$$\varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{F} = B_{i_1} * \cdots * B_{i_n}$$

となり、可換の場合と同じようにわかるやすい形となる。しかし $\mathcal{U}_i$ が principal でない場合、$\varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{F}$ は $\varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{U}_1 * \cdots * \varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{U}_n$ とはならないので、複雑になる可能性が高い。しかし、まずは、$n = 1$ のとき、つまり $\mathcal{F}$ が ultrafilter $\mathcal{U}$ で、$B_i = \mathbb{Z}_i \cong \mathbb{Z}$ のとき、$\varprojlim(*_{i \in F} B_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{F}$ がどのようなものになるかを問題にすべきであろう。ここでは、その問題を扱う。

たとえば、$\mathcal{U}$ が κ 上の normal ultrafilter であるならば $X \subseteq [\kappa]^n$ について

$$X \in \mathcal{U}^n \leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{U}([Y]^n \subseteq X)$$

で定義される ultrafilter がある。このときは、

$$\begin{aligned} &\varprojlim(*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset I)/\mathcal{U} \\ &\cong \{x \in \varprojlim(*_{i<n} \mathbb{Z}_i, p_{n,n+1} : n < \omega) \mid x \text{ is homogeneous}\} \end{aligned}$$

となる、ここで、x が homogeneous であることの定義および先の説明のため、いくつかの notion の定義をする。$F_0 \Subset I$ について $p_{F_0} : \varprojlim(*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset \omega) \to *_{i \in F_0} \mathbb{Z}_i$ を projection とすれば $p_{FG} \circ p_G = p_F$ が成立する。$F, G \Subset \omega$ が $|F| = |G|$ であるとき $e_{FG} : F \to G$ を順序同型写像とする。 $e_{FG}(a_i) = a_{e_{FG}(i)}$ とすれば e_{FG} は $*_{n \in F} \mathbb{Z}_n$ 上の同型写像に拡大される。$F, G \Subset \omega$ で $|F| = |G|$ であるときつねに、$e_{FG}(p_F(x)) = p_G(x)$ が成立するとき x を homogeneous と呼ぶ。

$\varprojlim(*_{i<n} \mathbb{Z}_i, p_{n,n+1} : n < \omega)$ とくに、$\times_{i<\omega} \mathbb{Z}_i$ に homogeneous な要素が $2^{\aleph_0}$ ある。つまり、$\mathcal{U}^n$ がすべて ultrafilter となるような ultrafilter $\mathcal{U}$ に対しては、$\varprojlim(*_{i \in F} \mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset \kappa)/\mathcal{U}$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ となる。

可換のとき常に、$\mathbb{Z}$ と同型になるという状況であるのに対し、非可換の場合これとは全く異なる状況である。一般に principal でないとき、非可換の場合には $\mathbb{Z}$ と同型にならないということが成立すると思っているが、よくわからない。もっと強く、「上記の $\mathcal{U}^n$ が ultrafilter とならないときには $\varprojlim(*_{i\in F}\mathbb{Z}_i, p_{FG} : F \subseteq G \Subset \kappa)/\mathcal{U}$ の濃度が κ 以上になる」という予想をしている。(これが問題 1)

2 番目の問題は、上に書いた Big fundamental group との関係の問題で、非可換超積と直接は関係はないが、素直な問題なのでここに、書いておく。

L を compact, connected, densely, linearly odered set とする (L は順序位相で考えている)。このとき、$L \times L$ は fixed point property をもつか? L が可分のときは、単位区間となるから、これは、 Brouwer の不動点定理として有名。問題は一般に、成立するということ。

残りのところに、homogeneous elements が $2^{\aleph_0}$ あることの証明を書く。

$\times_{i<\omega}\mathbb{Z}_i$ に homogeneous な要素が $2^{\aleph_0}$ あることを示すので、$\mathcal{U}^n$ がすべて ultrafilter となるような ultrafilter $\mathcal{U}$ に対しては、$\times_{i<\kappa}\mathbb{Z}_i/\mathcal{U}$ の濃度が $2^{\aleph_0}$ あることになる。

与えられた語 W に対して W_n を $\overline{W_n} = \overline{W}$ で $W(\alpha) = a_i^m$ のとき $W_n(\alpha) = a_{i+n}^m$ と定義する。そして

$$V \equiv W_0 a_0 W_0^- W_1 a_1 W_1^- \cdots W_{n-1} a_{n-1} W_{n-1}^- W_n a_n W_n^- \cdots$$

とする。

$\overline{W}$ を有理数全体の順序とし W が既約であれば $W_{n-1}^- W_n^-$ も既約となり、それにより、V も既約である。$F = \{n_0, \cdots, n_k\}$ (ただし $n_0 < \cdots < n_k$) とする。F が n を含まなければ $p_F(W_n a_n W_n^-) = e$ であることに注意すると

$$p_F(V) = W_{n_0} a_{n_0} W_{n_0}^- W_{n_1} a_{n_1} W_{n_1}^- \cdots W_{n_{k-1}} a_{n_{k-1}} W_{n_{k-1}}^- W_{n_k} a_{n_k} W_{a_{n_k}}^- .$$

が成立することがわかる。(右辺が既約語であるとは限らないことは注意すべきである。)

V が homogeneous element を定義していることは、$e_{FG}(p_F(V)) = p_G(V)$ をチェックすればよいが、それは上式から明らかである。一方 $\overline{W}$ が有理数全体の順序となる既約語 W は $2^{\aleph_0}$ あるので $\times_{n<\omega}\mathbb{Z}_n$ の homogeneous elements も $2^{\aleph_0}$ ある。

References

[1] J. W. Cannon and G. R. Conner, *The big fundamental group, big hawaiian earrings, and the big free groups*, Topology Appl. **106** (2000), 273–291.

[2] G. R. Conner and K. Eda, *Free subgroups of free complete products*, J. Algebra **250** (2002), 696–708.

[3] K. Eda, *A note on subgroups of F^N*, Abelian group theory (R. Göbel and E. Walker, eds.), LMN, vol. 1006, Springer-Verlage, 1983, pp. 171–174.
[4] ———, *Free σ-products and noncommutatively slender groups*, J. Algebra **148** (1992), 243–263.
[5] K. Eda and S. Shelah, *The non-commutative specker phenomenon in the uncountable case*, J. Algebra **252** (2002), 22–26.
[6] P. Eklof and A. Mekler, *Almost free modules: Set-theoretic methods*, North-Holland, 1990.
[7] G. Higman, *Unrestricted free products, and variety of topological groups*, J. London Math. Soc. **27** (1952), 73–81.
[8] S. Shelah and L. Struengmann, *The failure of the uncountable non-commutative specker phenomenon*, J. Group Theory **4** (2001), 417–426.

早稲田大学理工学術院, 東京都新宿区大久保 169-8555
E-mail address: `eda@waseda.jp`