数理解析研究所講究録
1534巻 2007年 24-37

コンパクトKAC環の極小作用の分類について

戸松玲治
東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1. 序

増田俊彦氏(九州大)との共同研究[6]を概観します．定義や細かい議論は後回しにしてまず主結果を紹介します．以後$\mathcal{R}$でhyperfinite II_1-factorを表します．コンパクトKac環$\mathbb{G}$の極小作用の研究の前に，双対離散Kac環$\widehat{\mathbb{G}}$の自由作用に関して次の一意性定理を導きます．

Theorem 1.1. $\widehat{\mathbb{G}}$を従順離散Kac環とする．すると$\mathcal{R}$への自由作用たちは互いにコサイクル共役である．

ここで作用α, βが共役であるとは，ある自己同型θが$\alpha\circ\theta=(\theta\otimes\mathrm{id})\circ\beta$となるように存在することを意味します．またそれらがコサイクル共役であるとは，α-cocycleによって摂動した後にβと共役になることを意味します．従順離散群の$\mathcal{R}$への自由作用の一意性[7]は，この定理の特別な場合として含まれます(III型の場合はまだ証明できていません)．次に$\mathbb{G}$の極小作用を研究します．2次コホモロジー消滅定理(Theorem 2.4)を使えば，極小作用は自由作用の双対作用であることが分かります．自由作用は定理1から互いにコサイクル共役なので，その双対作用は互いに共役となります．

Theorem 1.2. $\mathbb{G}$を従順な双対をもつコンパクトKac環とする．すると$\mathcal{R}$への極小作用たちは互いに共役である．

$\mathbb{G}$がコンパクト群ならばその双対はいつも従順なので，次がなりたちます．

Theorem 1.3. $\mathbb{G}$をコンパクト群とする．すると$\mathcal{R}$への極小作用たちは互いに共役である．

なおこの結果はOcneanu[8], Popa-Wassermann[9](コンパクトLie群)により報告されています．以降$\mathbb{G}$はコンパクト群と仮定して，自由作用の一意性に至るまでのアウトラインを重点的に説明します．ここではあくまで大体の雰囲気を伝えることを目的としており，厳密に正しい評価を与えていないのでご注意ください．また取り扱う対象には(超積環を除いて)可算性を仮定します．

記号一覧

M, N: von Neumann環(以降vN環)
$U(M)$: Mのユニタリ群
$\mathrm{Mor}(M,N)$: vN環MからNへの単位的かつ忠実な正則$*$準同型の集合
$\mathcal{R}$: hyperfinite II_1-factor
$S \Subset T$: SはTの有限部分集合
$|x|_\phi := \phi(|x|)$, ϕは荷重

2. コンパクト群の双対

2.1. コンパクト群の双対

$\mathbb{G}$をコンパクト群とします．$\mathbb{G}$の双対をKac環でつかまえることにします(Kac環の一般論については[1]を参照してください)．$\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$を既約表現全体をユニタリ同値関係で割ったものとします．$\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$の元は同値類なのですが，その代表元を一つずつ取り出してきてそれらがなす集合と$\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$を同一視します．表現$\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$の表現空間(必ず有限次元)を$H_\pi$と表します．$d_\pi = \dim H_\pi$，1次元自明表現は**1**と書きます．そこで$B(H_\pi)$たちの直和vN環を用意します．これを非可換空間である双対$\widehat{\mathbb{G}}$上の関数環だと思い込むために$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$という記号を使います:

$$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} B(H_\pi).$$

各$B(H_\pi)$の行列単位を$\{e_{\pi_{i,j}}\}_{i,j \in I_\pi}$のように表します．$1_\pi$を$B(H_\pi)$の単位元とします．また$x \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$の$\pi$成分を$x_\pi$と書きます．$x \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$で$x_\pi \neq 0$となる$\pi$が有限個ならば，$x$は有限台をもつ(finetely supported)と言います．

コンパクト群の双対は離散群の一般化とも考えられます．離散群の積に相当するのは，表現$\pi, \rho \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$のテンソル積表現です．しかし一般に$\pi \otimes \rho$はいくつかの既約表現に分解する点が離散群の場合とは大きく異なっています．$\widehat{\mathbb{G}}$の積構造は次で定義される余積(coproduct) $\Delta \in \mathrm{Mor}(L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}), L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$によって定式化します．

$$\Delta(x) = \sum_{\pi,\rho,\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{S \in \mathrm{ONB}(\sigma, \pi \otimes \rho)} S x_\sigma S^*.$$

すると余結合性$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$を満たします．ここで$(\sigma, \pi \otimes \rho)$はintertwinerたちのなすHilbert空間で，$\mathrm{ONB}(\sigma, \pi \otimes \rho)$はその適当な直交基底です．和が基底の選び方に依存しないのは明らかでしょう．

次に$\widehat{\mathbb{G}}$上のHaar測度に相当する荷重$\varphi\colon L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to \mathbb{C}$を定義します．

$$\varphi = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} d_\pi \mathrm{Tr}_\pi .$$

ここで，Tr_πは$B(H_\pi)$上の非正規化トレースを表します．するとφは次の両側不変性を満たします．

$$(\omega \otimes \varphi)(\Delta(x)) = \omega(1)\varphi(x) = (\varphi \otimes \omega)(\Delta(x)), \quad \forall \omega \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})_*^+,\ x \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})_+.$$

通常のHaar測度のように両側不変荷重は定数倍を除き一意的であることが知られています．

三つ組み$\widehat{\mathbb{G}} = (L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}), \Delta, \varphi)$は**離散Kac環**とよばれるものの一種です．一般の離散Kac環とコンパクト群の双対からできるものとの違いは，余積Δが余可換($\Delta(x) = \Delta(x)_{21}$ということ)かどうかです．コンパクト群双対の余積は余可換ですし(フリップユニタリがintertwinerになるから)，逆に離散Kac環の余積が余可換であれば，コンパクト群双対と同型であることが知られています．以下では余積の余可換性は全く使わないので，一般の離散Kac環を扱っていると思っても問題ありません．

ちなみに左(右でも同じことがいえます)正則表現$\{\lambda_r\}_{r \in \mathbb{G}}$で生成されるvN群環$L(\mathbb{G})$は余積構造$\Delta_L \in \mathrm{Mor}(L(\mathbb{G}), L(\mathbb{G}) \otimes L(\mathbb{G}))$, $\Delta_L(\lambda_r) = \lambda_r \otimes \lambda_r$と不変荷重(Planchrel荷重)をもつ離散Kac環で，$L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$と同型になります(Peter-Weyl定理からしたがう)．

2.2. $\widehat{\mathbb{G}}$ の従順性

$\widehat{\mathbb{G}} = (L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}), \Delta, \varphi)$ をコンパクト群の双対とします．すると (非正則) 状態 $m\colon L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to \mathbb{C}$ が次を満たすように存在します．

$$m((\omega \otimes \mathrm{id})(\Delta(x))) = \omega(1)m(x), \quad \forall\omega \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})_*,\ x \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}).$$

このような m は左不変平均 (left invariant mean) と呼ばれます．一般に左不変平均を持つ離散 Kac 環は**従順**(amenable) であると呼ばれます [10]．今の場合その存在は可換群の従順性を導く手順と同じように (余可換性から)，角谷-Markov 固定点定理から従います．状態 m を正則状態で近似しておいて Day-Namioka トリックを使えば，Følner 型条件を導けます:

Lemma 2.1. 任意の $\varepsilon > 0$, 有限台中心射影 $F \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ に対して次を満たすような有限台中心射影 $K \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ が存在する．

$$|(F \otimes 1)\Delta(K) - F \otimes K|_{\varphi\otimes\varphi} < \varepsilon |F|_\varphi |K|_\varphi.$$

K が (F, ε) に対してこの条件を満たすとき，K は (F, ε)-**不変**であると言います [8].

2.3. $\widehat{\mathbb{G}}$ のコサイクル作用

第一目標は $\widehat{\mathbb{G}}$ の自由作用の一意性を導くことです．途中でコサイクル作用に遭遇することになるので定義をしておきます．

Definition 2.2. M を vN 環，$\alpha \in \mathrm{Mor}(M, M \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ そして $u \in U(M \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ をとる．組 (α, u) が次を満たすとき，$\widehat{\mathbb{G}}$ の M への**コサイクル作用**であるという．

(1) $(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha = \mathrm{Ad}\, u \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \alpha$,

(2) $(u \otimes 1)(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(u) = (\alpha \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(u)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(u)$,

(3) $u_{\mathbf{1},\pi} = 1 \otimes e_1 \otimes 1_\pi$, $u_{\pi,\mathbf{1}} = 1 \otimes 1_\pi \otimes e_1$, $\forall\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$.

記号 $\alpha_\pi \in \mathrm{Mor}(M, M \otimes B(H_\pi))$ を $\alpha_\pi = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{pr}_\pi) \circ \alpha$ と定めます．

ここで，pr_π は標準的射影 $L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \to B(H_\pi)$ のことです．定義から α_1 は恒等写像 id ですが $(M \otimes B(H_1) = M)$，$\pi \neq \mathbf{1}$ については α_π は M から $M \otimes B(H_\pi)$ への準同型であることしか分かりません．ここに群作用とは異なった難しさがあります．たとえば $\widehat{\mathbb{G}}$(コサイクル) 作用が中心や中心列環 M_ω を保存するという保障はありません．

用語 u を *2-cocycle* と言います．固定点環 M^α を次で定めれば

$$M^\alpha = \{x \in M \mid \alpha(x) = x \otimes 1\},$$

定義から $u \in (M^{\alpha\prime} \cap M) \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ です．

$v \in U(M \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ による u の**摂動**(perturbation)$\widetilde{u}$ は次で定義されます

$$\widetilde{u} = (v \otimes 1)(\alpha \otimes \mathrm{id})(v)u(\mathrm{id} \otimes \Delta)(v^*).$$

(v のことを摂動とも言います.) このとき $(\mathrm{Ad}\, v \circ \alpha, \widetilde{u})$ はコサイクル作用となります:

$$(\alpha, u) \xrightarrow{v} (\mathrm{Ad}\, v \circ \alpha, \widetilde{u})$$

最初に v，次に w で摂動してできるコサイクル作用は，一度に wv で摂動したコサイクル作用に等しいということはとても大事なポイントです:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha, u) & \xrightarrow{v} & (\alpha^1, u^1) \\ {\scriptstyle wv}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ (\alpha^2, u^2) & = & (\alpha^2, u^2). \end{array}$$

コサイクル作用 (α, u) についてもし $u = 1$ なら，α を $\widehat{\mathbb{G}}$ の**作用**(action) 又は $\mathbb{G}$ の**余作用**(coaction) と言います．もしもある $v \in U(M \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ が u を $\widetilde{u} = 1$ と摂動するときには, u は *2-coboundary* であると言います.

作用 α に対して $v \in U(M \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ が次の条件を満たすとき *1-cocycle* 又は *α-cocycle* と言います.

$$(v \otimes 1)(\alpha \otimes \mathrm{id})(v) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(v).$$

α-cocycle v の $w \in U(M)$ による摂動は $\widetilde{v} = (w \otimes 1)v\alpha(w^*)$ と定義されます．もしもある $w \in U(M)$ があって $\widetilde{v} = 1$ と摂動するときには, v は *1-coboundary* であると言います. 以後 1-coboudary $(w \otimes 1)\alpha(w^*)$ を $\partial_\alpha(w)$ と書きます:

$$\partial_\alpha(w) = (w \otimes 1)\alpha(w^*).$$

2-cocycle や 1-cocycle が「1 に近い」ということをしばしば「小さい」と表現します.

さてコサイクル作用の自由性を導入しましょう.

Definition 2.3. (α, u) を $\widehat{\mathbb{G}}$ の vN 環 M へのコサイクル作用とする．次の条件が任意の $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \setminus \mathbf{1}$ についてなりたつとき，(α, u) は**自由**(free) であるという.

もしも $a \in M \otimes B(H_\pi)$ が

$$a(x \otimes 1_\pi) = \alpha_\pi(x)a, \quad \forall x \in M$$

を満たせば，$a = 0$ である.

自由性は各準同型 α_π, $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ についての条件であって，2-cocycle u についての条件ではありません．したがってそれは摂動で安定な性質であることに注意してください. 目標は次の自由なコサイクル作用の 2 コホモロジー消滅定理です.

Theorem 2.4. (α, u) を $\widehat{\mathbb{G}}$ の hyperfinite II_1-factor $\mathcal{R}$ への自由なコサイクル作用とする. このとき u は 2-coboudary である.

実際にはもっと精密なバージョン，評価つき消滅定理 (u が 1 に近ければ，摂動 v も 1 に近くとれるということ) を証明できます [6].

さて有限群についてこの主張を確かめてみましょう．Γ を有限群，(α, u) を II_1 型 vN 環 M へのコサイクル作用とします．ここでは自由性，hyperfinite 性や factoriality は仮定しません (後で超積 M_ω 内で次の補題を使う)．まず $B(\ell_2(\Gamma)) \subset M$ とみて (II_1 型だから可能)，各 $r \in \Gamma$ についてユニタリ $w_r \in M$ を $\alpha_r(x) = \mathrm{Ad}\, w_r(x)$, $x \in B(\ell_2(\Gamma))$ となるべくとれます．それで $(w_r^*)_r$ で (α, u) を摂動することで，始めから $B(\ell_2(\Gamma)) \subset M^\alpha$ としておいて問題ありません．それゆえ $M = N \otimes B(\ell_2(\Gamma))$ と分解すれば，α は N を固定します．よって $u_{r,s} \in N$, つまり (α, u) は N へのコサイクル作用でもあります.

各 $r \in \Gamma$ について M のユニタリ $u_{r,\cdot} \in N \otimes \ell_\infty(\Gamma)$ を考えます．そして $\lambda_r \in B(\ell_2\Gamma)$ を左正則表現として，$v_r := (1 \otimes \lambda_r)u_{r,\cdot}^* \in U(M)$ とおきます．すると,

$$\begin{aligned} v_r\alpha_r(v_s)u_{r,s}v_{rs}^* &= v_r(1 \otimes \lambda_s)\alpha_r(u_{s,\cdot}^*)u_{r,s}v_{rs}^* = v_r(1 \otimes \lambda_s)u_{r,s\cdot}u_{rs,\cdot}^*v_{rs}^* \\ &= v_r(1 \otimes \lambda_s)u_{r,s\cdot}u_{rs,\cdot}^*u_{rs,\cdot}(1 \otimes \lambda_{rs}^*) = v_r(1 \otimes \lambda_s)u_{r,s\cdot}(1 \otimes \lambda_{rs}^*) \\ &= v_r u_{r,\cdot}(1 \otimes \lambda_r^*) = 1 \end{aligned}$$

となり，u をうまく 1 に摂動できることが分かりました．つまり u は 2-coboundary です. この証明では，自由性や hyperfinite 性ではなく，$B(\ell_2(\Gamma)) \subset M$ とみたことが重要なポイントでした．したがって我々の興味ある $\widehat{\mathbb{G}}$ コサイクル作用でも似たことをすれば消滅定理が従うと思われます．その際 $\ell_2(\Gamma)$ の代わりに φ による GNS 表現空間 $L^2(\widehat{\mathbb{G}})$ を考えるべきなのですが，このままでは無限次元なので都合よくありません．ここで従順性を使っ

て全体を有限なパートで近似してみます．すなわち始めに誤差$\varepsilon > 0$と$\mathcal{F} \Subset \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$を用意しておきます．$\mathcal{F} \times \mathcal{F}$上で$u$を1に近くすることを目標にして，$\mathcal{F}, \varepsilon$に対してあまり動かない中心射影$K \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$をとってきます．そして$B(KL^2(\widehat{\mathbb{G}})) \subset M$とみて類似した議論を行うと，次のことが分かります．

Lemma 2.5. (α, u)を$\widehat{\mathbb{G}}$のII_1型vN環Mへのコサイクル作用とする．このとき任意の$\varepsilon > 0$, $F \Subset \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$について，ある$v \in U(M \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$が存在して

$$(v_\pi \otimes 1_\rho)\alpha_\pi(v_\rho)u_{\pi,\rho}(\mathrm{id} \otimes_\pi \Delta_\rho)(v^*) \sim_\varepsilon 1 \otimes 1_\pi \otimes 1_\rho \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F}.$$

ここで誤差はトレースノルムで測っています．また$\alpha_\pi(v_\rho)$は$(\alpha_\pi \otimes \mathrm{id})(v_\rho)$を略記したものです．このように$\otimes$, idをしばしば省略します．つまり自由性なしに，どんな2-cocycleも任意の有限集合上，任意の誤差で1に近く摂動できることが分かりました．有限集合を$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \cdots, \cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n = \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$と広げ，誤差を$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots, \varepsilon_n \to 0$と下げながらこの摂動をどんどん繰り返していくことを考えましょう:

$$(\alpha, u) = (\alpha^0, u^0) \xrightarrow{v^1} (\alpha^1, u^1) \xrightarrow{v^2} (\alpha^2, u^2) \xrightarrow{v^3} \cdots.$$

するとnステップ目にできるコサイクル作用(α^n, u^n)は次のような性質を持っています．

(1) $u^n_{\pi,\rho} \sim_{\varepsilon_n} 1$, $\forall \pi, \rho \in \mathcal{F}_n$,
(2) (α^n, u^n)は(α, u)を$\overline{v}^n = v^n v^{n-1} \cdots v^1$で摂動したもの．

ここで次の性質を(厳密な書き方ではないですが)示せたと仮定しましょう．

性質1: 小さい2-cocycle uをさらに小さく摂動するユニタリvは小さくとれる．

するとv^nがu^{n-1}の小ささから$\mathcal{F}_n$上($\mathcal{F}_{n-1}$等少しくらい番号が遅れていてもよい)で1に近く取れるため，$\{\overline{v}^n\}_n$は収束列となります．すると収束先$\overline{v}$は明らかに(α, u)を作用に摂動します:

$$(\alpha, u) \xrightarrow{\overline{v}} (\mathrm{Ad}\, v \circ \alpha, 1).$$

つまりuが2-coboundaryであることを示せます．

ではuは$\mathcal{F} \times \mathcal{F}$上1に近いとして(性質1は仮定せず)もう一度スタートしましょう．$\mathcal{F}$よりも大きな$\mathcal{F}^1$を取ります．先の補題によれば，あるユニタリvが存在して

$$(v_\pi \otimes 1_\rho)\alpha_\pi(v_\rho)u_{\pi,\rho}(\mathrm{id} \otimes_\pi \Delta_\rho)(v^*) \sim 1 \otimes 1_\pi \otimes 1_\rho, \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F}^1 \tag{2.1}$$

となるのでした．ここで$u_{\pi,\rho} \sim 1$なので

$$(v_\pi \otimes 1_\rho)\alpha_\pi(v_\rho)(\mathrm{id} \otimes_\pi \Delta_\rho)(v^*) \sim 1 \otimes 1_\pi \otimes 1_\rho, \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F}.$$

よって先ほど取ってきたvは**近似的1コサイクル**であるわけです．ここでつぎの性質を仮定してみます．

性質2: 近似的1コサイクルは近似的に消滅させることができる．

すなわちある$w \in U(M)$があって，

$$(w \otimes 1_\pi)v_\pi \alpha_\pi(w^*) \sim 1 \otimes 1_\pi, \quad \forall \pi \in \mathcal{F}.$$

このときvの代わりに$v^1 := (w \otimes 1_\pi)v_\pi \alpha_\pi(w^*)$について$(\alpha, u)$を$(\alpha^1, u^1)$に摂動してみます．このとき$u^1$は次のように求められます．

$$u^1 = (w \otimes 1 \otimes 1)(v \otimes 1)\alpha(v)u(\mathrm{id} \otimes \Delta)(v)(w^* \otimes 1 \otimes 1).$$

ここで w ではさまれた中身は u を v で摂動したものに他ならないことに注意してください (1-coboundary は 2-cocycle の摂動には本質的に影響しないということ). したがってトレースの性質から (2.1) はそのまま u^1 に対して成り立ちます.

$$u^1_{\pi,\rho} \sim 1 \otimes 1_\pi \otimes 1_\rho, \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F}^1.$$

そして v^1 の決め方から

$$v^1_\pi \sim 1, \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F}.$$

これは性質 1 にほかなりません. 選び直した v^1 は狭い $\mathcal{F}$ 上の評価ですが, u の新しい摂動先では広い $\mathcal{F}^1$ 上の評価であることが大切です. これで帰納法にかけられます. よって性質 2 から 2 コホモロジー消滅が従うことが分かりました. 群作用の研究において, 1 コサイクルを小さくするための道具の一つとして, ロホリン補題とシャピロ補題が利用されてきました. $\widehat{\mathbb{G}}$ 自由 (コサイクル) 作用に対して, 何らかの形でロホリン型定理を示すことが全編を通じて最重要ポイントです.

3. 2 次コホモロジー消滅定理

これからしばらく $\widehat{\mathbb{G}}$ 作用のロホリン型定理とは何かを一般的に議論します.

3.1. ロホリン型定理

離散 Kac 環作用のロホリン型定理はどんな形をしているかを想像するため, 有限群 Γ が vN 環 N に作用しているケースを考えましょう. 作用を α で書くことにします. α がロホリン性質をもつとは, 次の条件を満たすべく単位の分解 $\{e_r\}_{r\in\Gamma}$ を N 内に取れることを意味します [5].

$$\alpha_r(e_s) = e_{rs}, \quad \forall r, s \in \Gamma.$$

この式を Hopf 代数の言葉で書き直してみます. 次の射影 $E \in N \otimes \ell_\infty(\Gamma)$ を用意します.

$$E = \sum_{r\in\Gamma} e_r \otimes \delta_r,$$

ここで $\delta_r \in \ell_\infty(\Gamma)$ は $r \in \Gamma$ での特性関数です. $\ell_\infty(\Gamma)$ の余積を Δ, 左移動自己同型を ${}_r\Delta(x) = (\mathrm{ev}_r \otimes \mathrm{id})(\Delta(x))$ と定めます. $\Delta(x)(r,s) = x(rs)$ なので,

$${}_r\Delta(\delta_s) = \delta_{r^{-1}s}, \quad \forall r, s \in \Gamma.$$

このとき,

$$(\alpha_r \otimes \mathrm{id})(E) = \sum_{s\in\Gamma} \alpha_r(e_s) \otimes \delta_s = \sum_{s\in\Gamma} e_{rs} \otimes \delta_s \tag{3.1}$$

$$= \sum_{s\in\Gamma} e_s \otimes \delta_{r^{-1}s} = (\mathrm{id} \otimes {}_r\Delta)(E). \tag{3.2}$$

となり E は次の性質をもっていることが分かりました.

$$(\alpha_r \otimes \mathrm{id})(E) = (\mathrm{id} \otimes {}_r\Delta)(E), \quad \forall r \in \Gamma.$$

つまり E を通じて α と Δ が結びついているわけです. 逆にこういう射影で N 成分の総和が 1 になるとき, それらがロホリン型分解をあたえることになります.

一般の従順離散群 Γ のケースでは, ロホリン性質は次のようなものになります [7](実際にはもっと精密な仕組みが作られています).

> 任意の $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F} \Subset \Gamma$ をとる. $\mathcal{K} \Subset \Gamma$ を $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ 不変であるようにとる. すると, 射影 $E \in N \otimes \ell_\infty(\Gamma)$ が次を満たすべく存在する.
> (1) E の台は $\mathcal{K}$, つまり $E(1 \otimes \delta_r) = 0$, $r \notin \mathcal{K}$.
> (2) $|(\alpha_r \otimes \mathrm{id})(E) - (\mathrm{id} \otimes {}_r\Delta)(E)|_{\tau\otimes\varphi} < \varepsilon$.

最後の不等式にでてきたのはトレースノルムです (τ は N のトレース，φ は $\ell_\infty(\Gamma)$ のトレース荷重)．ここで $(\mathcal{F},\varepsilon)$ 不変な集合 $\mathcal{K}$ を考えたのは，式 (3.1) から (3.2) に相当する計算を遂行するためです．

これらのことから $\widehat{\mathbb{G}}$ 作用 $\alpha \in \mathrm{Mor}(N, N \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ がロホリン性質を持つということの定義には，次の性質を入れるべきでしょう．

性質 (R1): 任意の $\varepsilon > 0$, 有限台射影 $F \in Z(L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ をとる．有限台射影 $K \in Z(L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ を (F,ε) 不変であるようにとる．すると，射影 $E \in N \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ が次を満たすべく存在する．
(1) $E = E(1 \otimes K)$
(2) $(\mathrm{id} \otimes \varphi)(E) = 1$ (単位の分解)．
(3) $|(\alpha_F \otimes \mathrm{id})(E) - (\mathrm{id} \otimes {}_F\Delta)(E)|_{\tau\otimes\varphi\otimes\varphi} < \varepsilon |F|_\varphi$.

ここで α_F や ${}_F\Delta$ は F でカットしてできる準同型です．一つ問題なのは，単位の分解 (2) では正作用素の足し算が 1 になると言っているだけで，E の成分がどんな作用素からできているかは指定されていないことです．ここでロホリン性質とは「関数環のコピー」を N 内に作ることができるという性質であることを思い出しましょう．関数環 $L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ は行列環の直和ですから，E が次の性質を持っていれば関数環のコピーができていると言えます．

性質 (R2): E を次のように分解する．

$$E = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{i,j \in I_\pi} d_\pi^{-1} f_{\pi_{i,j}} \otimes e_{\pi_{i,j}}.$$

このとき，$\{f_{\pi_{i,j}}\}_{\pi,i,j}$ は次を満たす．

$$f_{\pi_{i,j}} f_{\rho_{k,\ell}} = \delta_{\pi,\rho}\delta_{j,k} f_{\pi_{i,\ell}}, \quad f_{\pi_{i,j}}^* = f_{\pi_{j,i}}.$$

つまり $\{f_{\pi_{i,j}}\}_{\pi,i,j}$ たちは π が異なるもの同士では直交しており，π が等しいもの同士では $M_{d_\pi}(\mathbb{C}) \cong B(H_\pi)$ をつくる行列要素となります．

Definition 3.1. $\alpha \in \mathrm{Mor}(N, N \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ を $\widehat{\mathbb{G}}$ 作用とする．α が性質 (R1), (R2) をもつとき**ロホリン性質**をもつという．(R1), (R2) を満たす射影 E をロホリン射影という．

3.2. シャピロ補題

引き続きロホリン性質をもつ作用 $\alpha \in \mathrm{Mor}(N, N \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ を考えます．$v \in U(N \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ を α-cocycle とします．群のケースのアナロジーで次の元を考えます．

$$\mu = (\mathrm{id} \otimes \varphi)(vE). \tag{3.3}$$

μ をシャピロ元 (Shapiro element) と呼ぶことにします．シャピロ元はどんな性質をもっているのか調べてみます．

$$\begin{aligned}
v\alpha_F(\mu) &= v(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi)((\alpha_F \otimes \mathrm{id})(v)(\alpha_F \otimes \mathrm{id})(E)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi)((v \otimes 1)(\alpha_F \otimes \mathrm{id})(v)(\alpha_F \otimes \mathrm{id})(E)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi)((\mathrm{id} \otimes {}_F\Delta)(v)(\alpha_F \otimes \mathrm{id})(E)) \\
&\sim_\varepsilon (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi)((\mathrm{id} \otimes {}_F\Delta)(v)(\mathrm{id} \otimes {}_F\Delta)(E)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi)((\mathrm{id} \otimes {}_F\Delta)(vE)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varphi)(vE) \otimes F = \mu \otimes F.
\end{aligned}$$

ここで $\sim_\varepsilon$ の変形は (R1) によるもので，最後の Δ が消えるのは φ の左不変性からです．また v が本当に α-cocycle でなくても，近似的に α-cocycle ならば同様に変形できることに

も注意してください．上式から μ は次を満たします．

$$v\alpha_F(\mu) \sim_\varepsilon \mu \otimes F.$$

もしも μ がユニタリになれば $(\mu^* \otimes F)v\alpha(\mu) \sim_\varepsilon 1 \otimes F$ となります．すなわち v を $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ の任意に大きな有限集合上で小さくできます．ですから問題は μ がユニタリになるように E をとれるかどうかです．これを新しい性質として (正確な記述ではないですが) 挙げておきます．

性質 (S): 任意の $\varepsilon > 0$, 有限台中心射影 $F \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ そして近似的 α-cocycle v に対して，シャピロ元 $\mu = (\mathrm{id} \otimes \varphi)(vE)$ がユニタリになるようなロホリン射影 E (F, ε とは (R1) の関係がある) が存在する．

ユニタリであるシャピロ元をシャピロユニタリ (Shapiro unitary) と呼びます．

3.3. 自由性とロホリン性質

さて前章まで続いた自由性の話に戻りましょう．ここから自由性と $\mathcal{R}$ の超有限性 (正確には McDuff 性) が効いてきます．(α, u) を $\widehat{\mathbb{G}}$ の $\mathcal{R}$ への自由コサイクル作用とします．

超積環 $\mathcal{R}^\omega$ と中心列環 $\mathcal{R}_\omega$ を考えましょう．代表列の項ごとに α をひっかけることで自然に $\alpha^\omega \in \mathrm{Mor}(\mathcal{R}^\omega, \mathcal{R}^\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ を誘導できます．α^ω は $\mathcal{R}_\omega$ を保たないかもしれないことに注意してください．(α^ω, u) は $\mathcal{R}^\omega$ へのコサイクル作用です．[7] のロホリン型定理の証明に大事な役割を果たした強自由性の概念を $\widehat{\mathbb{G}}$ コサイクル作用に導入しておきます．

Definition 3.2. $\beta \in \mathrm{Mor}(\mathcal{R}^\omega, \mathcal{R}^\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}))$ が**強自由**であるとは，任意の $\pi \neq \mathbf{1}$, 可算集合 $S \subset \mathcal{R}^\omega$ に対して次の条件がなりたつことをいう: $a \in \mathcal{R}^\omega \otimes B(H_\pi)$ が

$$a(x \otimes 1_\pi) = \beta_\pi(x)a, \quad \forall x \in S' \cap \mathcal{R}_\omega.$$

を満たせば，$a = 0$.

コサイクル作用の強自由性も自然に定義します．するとコサイクル作用の強自由性はユニタリ摂動について安定な性質です．また $\mathcal{R}$ の超有限性から強自由性と自由性の同値性が確かめられます．

Lemma 3.3.

$$(\alpha, u) \text{ は自由} \Longleftrightarrow (\alpha^\omega, u) \text{ は強自由}.$$

さて Lemma 2.5 を使い，始めから

$$u_{\pi,\rho} \sim_\varepsilon 1, \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F} \tag{3.4}$$

と仮定してスタートしましょう．

1. $\mathcal{R}_\omega$ へ移行する $\mathcal{R}$ の自己同型と同じく，各 α_π は次の意味で近似的に内部的 (approximately inner) であることが分かります．

$$\exists\, u^n \in U(\mathcal{R} \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})),\ n = 0, 1, \ldots, \text{ s.t.}$$

$$\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} u^n(x \otimes 1)u^{n*} \quad (\text{強収束}).$$

ここで超積環 $\mathcal{R}^\omega$ を考え, $(u^n)_n$ で代表されるユニタリを U と書くことにします ($U \in \mathcal{R}^\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$)．また $\gamma = \mathrm{Ad}\, U^* \circ \alpha^\omega$ とおきましょう．$w \in \mathcal{R}^\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ を

$$w = (U^* \otimes 1)\alpha^\omega(U^*)u(\mathrm{id} \otimes \Delta)(U)$$

とおけば，(γ, w) は $\mathcal{R}^\omega$ 上のコサイクル作用です:

$$(\alpha^\omega, v) \xrightarrow{U^*} (\gamma, w).$$

ところで $\mathcal{R}$ 上では $\alpha^\omega(x) = U(x \otimes 1)U^*$ なので，$\mathcal{R} \subset (\mathcal{R}^\omega)^\gamma$. これから w は $\mathcal{R}' \cap \mathcal{R}^\omega = \mathcal{R}_\omega$ に行列成分の値をとる 2-cocycle です．よって (γ, w) は $\mathcal{R}_\omega$ 上のコサイクル作用でもあります．

2. γ を作用に取りなおす　次にコサイクル作用 (γ, w) に Lemma 2.5 を適用してみます．$\mathcal{R}_\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ 内でユニタリ列 $\{v^n\}_{n=1}^\infty$ がとれて

$$\lim_{n\to\infty}(v^n \otimes 1)\gamma(v^n)w(\mathrm{id}\otimes\Delta)(v^{n*}) = 1.$$

と出来ます (強収束)．各 v^n の代表列を選んでおいてそれらから適当に index を選びとり (対角線論法を思い出してください)，新しいユニタリ $v \in \mathcal{R}_\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ を次のように選んできます．

$$(v \otimes 1)\gamma(v)w(\mathrm{id}\otimes\Delta)(v^*) = 1$$

よって超積内で 2-cocycle を消すことが出来ました:

$$(\gamma, w) \xrightarrow{v} (\mathrm{Ad}\, v \circ \gamma, 1).$$

つまり ($\mathcal{R}^\omega$ への) コサイクル作用 (α^ω, u) を vU^* で摂動したら $\mathcal{R}_\omega$ を保存する作用になったわけです．ここで $v \in \mathcal{R}_\omega \otimes L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ に注意すれば $\mathcal{R}$ 上で $\alpha^\omega(x) = Uv^*(x \otimes 1)(Uv^*)^*$ がわかります．したがって始めから U は u を消していると仮定してもよいのです:

$$(U^* \otimes 1)\alpha^\omega(U^*)u(\mathrm{id}\otimes\Delta)(U) = 1. \tag{3.5}$$

このとき $\gamma = \mathrm{Ad}\, U^* \circ \alpha^\omega$ は $\mathcal{R}_\omega$ を保存する作用となります．強自由性は摂動について安定ですから γ は強自由作用です．これでようやく [7] のロホリンタワーの構成を使える段階になりました．また $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 上 $u_{\pi,\rho} \sim 1$ であったので，$(U_\pi^* \otimes 1_\rho)\alpha_\pi^\omega(U_\rho^*)(\mathrm{id}\otimes_\pi\Delta_\rho)(U) \sim 1$. γ を使って表せば，

$$\gamma_\pi(U_\pi^*)(U_\pi^* \otimes 1_\rho)(\mathrm{id}\otimes_\pi\Delta_\rho)(U) \sim 1 \otimes 1_\pi \otimes 1_\rho, \quad \forall \pi, \rho \in \mathcal{F}. \tag{3.6}$$

つまり U は ($\mathcal{R}^\omega$ 値ですが) 近似的 γ-cocycle なのです．

3. ロホリン型定理　γ の強自由性からロホリン型定理を導くことができます．

Theorem 3.4. $\mathcal{R}_\omega$ への作用 γ はロホリン性質をもつ．さらに性質 (S) ももつ．

構成の仕方は [7] と大体同じですが，一つ大きく異なる点があります．それはどうしても 2-cocycle を扱わなくてはならないことです．その違いを強調するために [7] のアイデアを紹介します．[7] のロホリン型定理はコサイクル作用について述べたものです．(β, w) を $\mathcal{R}_\omega$ への従順群 Γ の強自由コサイクル作用であるとします．このとき $\beta_r^{\pm 1}(u_{s,t})$, $r, s, t \in \Gamma$ で生成される vN 環 $S \subset \mathcal{R}_\omega$ を考えます．作り方から明らかなように $\beta_r^{-1}(S) \subset S$, $r \in \Gamma$ がなりたちます．ここで各 β_r は**自己同型なので**, $S' \cap \mathcal{R}_\omega$ を保存し，しかも $u_{r,s} \in S$ なので $\beta|_{S' \cap \mathcal{R}_\omega}$ は作用になります．コサイクル作用の話からうまく立ち回って作用の話にしてしまえるわけです．

一方我々のケースは自己同型でなくて準同型による作用やコサイクル作用を扱っているので，このように上手く話を書き直すことはできません．よって 2-cocycle (3.6) を本当に相手にしなければなりません．$\widehat{\mathbb{G}}$ 作用のロホリンタワーを構成する過程で一番難しい点です．そのため [7] と比べると目標達成には十分ですが，評価がかなり甘くなっています．

さてこの定理を (3.6) の近似的 γ-cocycle U に適用してみます．シャピロユニタリ μ は $U_F\gamma_F(\mu) \sim \mu \otimes F$ ($F \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ は台を $\mathcal{F}$ とする中心射影) を満たします (ここの $\sim$ は (3.4) から来るエラーです)．これを α^ω で書き直すと

$$\alpha_F^\omega(\mu)U_F \sim \mu \otimes F. \tag{3.7}$$

$\overline{U} = \alpha^{\omega}(\mu)U(\mu^* \otimes 1)$ とおくと，前にも触れた 1-coboundary 摂動の性質から，(3.5) は

$$(\overline{U}^* \otimes 1)\alpha^{\omega}(\overline{U}^*)u(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\overline{U}) = 1.$$

となります．よって $\overline{U}$ の代表列の先のほうを選べば，u をいくらでも 1 に近づけることができるし，(3.7) によって $\overline{U}_F \sim 1 \otimes F$ なので，摂動ユニタリも始めの $u_{\pi,\rho} \sim 1$ のエラー分ぐらいは 1 に近づけられるわけです．これで §2 性質 2 が導かれ，その結果 Theorem 2.4 が示されます．

4. Intertwining argument

2 コホモロジー消滅定理から次の二つの結果を導くことができます．一つ目は二つの自由作用を 1-cocycle を使って任意に近づけられるというものです．

Corollary 4.1. α, β を $\widehat{\mathbb{G}}$ の $\mathcal{R}$ への自由作用とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F} \Subset \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ そして $T \Subset \mathcal{R}^1$ に対して，α-cocycle v が次を満たすように存在する．

$$\beta_\pi(x) \sim_\varepsilon v_\pi \alpha_\pi(x) v_\pi^*, \quad \forall \pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}), x \in T.$$

二つ目は 1-cocycle を 1-coboundary で近似できる (有限台の不変性 δ のエラーで) というものですが，1-cocycle にある元たちとほとんど交換している場合 (誤差 ε)，摂動するユニタリにも概交換性を要求できるということも主張しています．

Corollary 4.2. α を $\widehat{\mathbb{G}}$ の $\mathcal{R}$ への自由作用とする．$\varepsilon, \delta > 0$，有限台中心射影 $F \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ そして $T \Subset \mathcal{R}^1$ を任意にとってくる．さらに有限台中心射影 $K \in L^\infty(\widehat{\mathbb{G}})$ を (F, δ)-不変かつ $K \geq e_1$ になるように選ぶ．K の台を $\mathcal{K}$ と書く．
このとき次を仮定する．

$$[v_\rho \otimes 1_{\overline{\rho}}, \alpha_\rho(\alpha_{\overline{\rho}}(x))] \sim_\varepsilon 0, \quad \forall \rho \in \mathcal{K}, x \in T.$$

すると次を満たす $w \in U(\mathcal{R})$ が存在する．

(1) $v_F \sim_\delta \partial_\alpha(w)(1 \otimes F)$.
(2) $[w, x] \sim_\varepsilon 0$.

上の仮定はテクニカルですが離散群作用の場合を考えてみると分かりやすいと思います．実際この場合 $\alpha_\rho(\alpha_{\overline{\rho}}(x)) = x$ なので単に v_ρ と x がほぼ交換していると仮定しているわけです．すると v をほとんど消滅させる w (シャピロユニタリの代表列の先の方) もそれらとほぼ交換しているのです．この二つをうまく用いて [2] で考案された "intertwining argument" を行い，二つの自由作用がコサイクル共役であることを示します．細部をつめるほど分かりにくくなる可能性があるため，大体の筋道を説明します．

α, β を $\widehat{\mathbb{G}}$ の $\mathcal{R}$ への自由作用とします．これから α, β の両方を 1-cocycle で摂動し続けて自由作用の列 $\{\gamma^n\}_{n=-1}^\infty$ を構成していきます．$\gamma^{-1} := \beta$, $\gamma^0 = \alpha$ とします．さて γ^{-1} から γ^n まで決まったとしましょう．次が列 $\{\gamma^n\}_{n=-1}^\infty$ を決める一般的なステップです．

- **一般的ステップ**: γ^{n-1} を $\mathcal{R}$ の十分大きな有限集合上 γ^n にとても近くなるように γ^{n-1}-cocycle v^{n+1} で摂動したものを γ^{n+1} とする．

ここで注意をいくつか述べておきます．まず γ^{n+1} と γ^{n-1} の近さは，適切に大きくなっていく有限台中心射影でカットして測るということ．また十分大きな有限集合 (T_n と書く) が出てきましたが，γ^n が決まった時点で設定しておくものです．したがって本当は T_n を次にどう膨らませるかも帰納的に定めなくてはなりませんが，ここでは明示せずに説明を続けることにします．また近さは $\varepsilon_n > 0$ と書き，ε_n がとても早いスピードで 0 に収束するものとしておきます．少々くどくなってしまいましたが，次の自由作用をそれまでのデータから適切に決めると思っておいてください．

すると $\{\gamma^{2m-1}(x)\}_m$, $\{\gamma^{2m}(x)\}_m$ はそれぞれ適当な集合上の元 x について (強位相で) 有界コーシー列になるので，完備性から収束先があります．その収束先が双方とも等しいことに注意して，$\gamma^\infty(x)$ と書きます．γ^∞ を $\mathcal{R}$ 上に拡張すると，$\widehat{\mathbb{G}}$ の作用になることが簡単に分かります (この時点では自由性は判りません)．以上の状況を図示しておきます:

$$\begin{tikzcd}
\alpha = \gamma^0 \arrow[r, equal] & \gamma^0 \arrow[r, "v^2"] & \gamma^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varepsilon^1"'] & \gamma^2 \arrow[r, "v^4"] & \gamma^4 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varepsilon^3"'] & \cdots \arrow[r] & \gamma^\infty \arrow[d, equal] \\
\beta = \gamma^{-1} \arrow[r, "v^1"] & \gamma^1 \arrow[r, equal] \arrow[u, "\varepsilon^0"] & \gamma^1 \arrow[r, "v^3"] & \gamma^3 \arrow[r, equal] \arrow[u, "\varepsilon^2"] & \gamma^3 \arrow[r, "v^5"] & \cdots \arrow[r] & \gamma^\infty
\end{tikzcd}$$

β の方の列を見てみると，

$$\begin{aligned}
\gamma^{2m+1} &= \operatorname{Ad} v^{2m+1} \circ \gamma^{2m-1} \\
&= \operatorname{Ad}(v^{2m+1} v^{2m-1} \cdots v^1) \circ \beta
\end{aligned}$$

となっています．問題はコサイクルたちの積 (β-cocycle になる) が収束するかどうか分からない点ですが，もしも α と γ^∞，β と γ^∞ がそれぞれコサイクル共役であるように摂動たちを適切に選ぶことができたら α と β がコサイクル共役であることがいえるわけです．

もう一度 $\gamma^1, \gamma^2, \ldots \gamma^{2m}$ が適切に決まってきたところからスタートしましょう．第 $2m$ ステップで γ^{2m} と有限集合 T_{2m} が決まりました．γ^{2m} は次を満たすようにとってあります．

$$\gamma^{2m-1}(x) \sim_{\varepsilon_{2m}} \gamma^{2m}(x), \quad \forall x \in T_{2m-1}.$$

次に Corollary 4.1 によって，γ^{2m-1}-cocycle v^{2m+1} を

$$\gamma^{2m}(x) \sim_{\varepsilon_{2m+1}} \operatorname{Ad} v^{2m+1} \gamma^{2m-1}(x) := \gamma^{2m+1}(x), \quad \forall x \in T_{2m}$$

となるように取ります．両者まとめると

$$\gamma^{2m-1}(x) \sim_{\varepsilon_{2m-1}} \operatorname{Ad} v^{2m+1} \circ \gamma^{2m-1}(x), \quad \forall x \in T_{2m-1}$$

となります．

これから (若干仮定が異なりますが) Corollary 4.2 を使って，v^{2m+1} を大きさの小さい部分と 1-coboudary 部分の積に表します．γ^{2m-1}-cocycle v^{2m+1} は，ある w_{2m+1} によってほとんど消すことができます:

$$v^{2m+1} \sim \partial_{\gamma^{2m-1}}(w_{2m+1}).$$

さらに w_{2m+1} は次の交換関係も満たすようにとれます．

$$[w_{2m+1}, x] \sim_{\varepsilon_{2m-1}} 0, \quad \forall x \in T_{2m-1}. \tag{4.1}$$

そこで新しく 1 に近いユニタリ

$$u^{2m+1} := v^{2m+1}\, \partial_{\gamma^{2m-1}}(w_{2m+1})^*$$

を用意しましょう．γ^{2m-1}-cocycle $\partial_{\gamma^{2m-1}}(w_{2m+1})$ で γ^{2m-1} を摂動したものを Γ^{2m-1} とかくことにします．すると u^{2m+1} は Γ^{2m-1}-cocycle です (1-cocycle の積だから)．またもとの大きさの分からなかった v^{2m+1} は

$$v^{2m+1} = u^{2m+1}\, \partial_{\gamma^{2m-1}}(w_{2m+1})$$

と分解されます．以上の状況をまとめておきます．

$$\begin{tikzcd}
\gamma^{2m-1} \arrow[r, "v^{2m+1}"] \arrow[d, "\partial_{\gamma^{2m-1}}(w_{2m+1})"'] & \gamma^{2m+1} \arrow[d, equal] \\
\Gamma^{2m-1} \arrow[r, "u^{2m+1}"] & \gamma^{2m+1}
\end{tikzcd}$$

そして有限集合 T_{2m} に v^{2m+1} の成分や w などを合併して新しいより大きな集合 T_{2m+1} を作ります．このように γ^{2m+2} 等を次々に取っていきます．

これらの摂動たちが適切なものたちであること，すなわち先ほどのコサイクル積の収束性の問題をうまく回避できることを説明します．β から始まる列について考えます．最初のあたりを見てみましょう:

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, "v^1"] & \gamma^1 \arrow[d, "\partial(w_3)"'] & & \\
& \Gamma^1 \arrow[r, "u^3"] & \gamma^3 \arrow[d, "\partial(w_5)"'] & \\
& & \Gamma^3 \arrow[r, "u^5"] & \gamma^5.
\end{tikzcd}$$

ここで作用 $\Gamma^{5,1}$ とその 1-cocycle $u^{5,3}$ を

$$\Gamma^{5,1} = \mathrm{Ad}(w_3 \otimes 1) \circ \Gamma^1 \circ \mathrm{Ad}\, w_3^*, \quad u^{5,3} = (w_5 \otimes 1) u^3 (w_5^* \otimes 1)$$

と定めます．すると次のように摂動を可換にします．

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^1 \arrow[r, "u^3"] \arrow[d, "\partial(w_5)"'] & \gamma^3 \arrow[d, "\partial(w_5)"'] \\
\Gamma^{5,1} \arrow[r, "u^{5,3}"] & \Gamma^3
\end{tikzcd}$$

$\overline{w}_5 = w_5 w_3$, $\overline{u}^5 = u^5 u^{5,3}$ とおき，$\partial(w_5)\partial(w_3) = \partial(w_5 w_3)$ を使って二つの図式を組み合わせると，

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, "v^1"] & \gamma^1 \arrow[d, "\partial(\overline{w}_5)"'] & \\
& \Gamma^{5,1} \arrow[r, "\overline{u}^5"] & \gamma^5.
\end{tikzcd}$$

$\overline{w}_n = w_n w_{n-2} \cdots w_3$ とおき，この変形を繰り返せば，作用 $\Gamma^{n,1}$ と 1-cocycle $\overline{u}^n$ があって

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, "v^1"] & \gamma^1 \arrow[d, "\partial(\overline{w}_n)"'] & \\
& \Gamma^{n,1} \arrow[r, "\overline{u}^n"] & \gamma^n.
\end{tikzcd}$$

となります．$\Gamma^{n,1}$ の定義から

$$\gamma^n = \mathrm{Ad}\,\overline{u}^n \circ \left(\mathrm{Ad}(\overline{w}_n \otimes 1) \circ \gamma^1 \circ \mathrm{Ad}\,\overline{w}_n^*\right) \tag{4.2}$$

と変形できます．ユニタリ列 $\{\overline{u}^n\}_n$ と (内部的) 自己同型列 $\{\mathrm{Ad}\,\overline{w}_n\}_n$ が収束することを確かめます．

$\overline{u}^n$ については，次の図式

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{n-2,1} \arrow[r, "\overline{u}^{n-2}"] \arrow[d, "\partial(w_n)"'] & \gamma^{n-2} \arrow[d, "\partial(w_n)"'] & \\
\Gamma^{n-1,1} \arrow[r] & \Gamma^{n-2} \arrow[r, "u^n"] & \gamma^n
\end{tikzcd}$$

から

$$\overline{u}^n = u^n(w_n \otimes 1)\overline{u}^{n-2}(w_n^* \otimes 1)$$

という関係がなりたちます．ここで有限集合 T_{n-2} は第 $(n-2)$ ステップで γ^{n-2} を取り終わった際，それまでに決まっている十分な情報が入るようにセットしました．始めから T_{n-2} には u^{n-2} の成分が含まれているとしておきます．すると (4.1) と u^n が小さいことから次が分かります．

$$\overline{u}^n = u^n(w_n \otimes 1)\overline{u}^{n-2}(w_n^* \otimes 1) \sim u^n\overline{u}^{n-2} \sim \overline{u}^{n-2}.$$

したがって $\{\overline{u}^n\}_n$ はコーシー列になります．収束先を $\hat{u}^1$ と書きます．

次に $\{\mathrm{Ad}\,\overline{w}_n\}_n$ の収束を確かめます．T_n を $w_nT_{n-2}w_n^* \subset T_n$ も満たすように選んでおきます．このとき n が m よりも十分大きければ，上と同じ仕組みで

$$\mathrm{Ad}\,\overline{w}_n(x) = \mathrm{Ad}\,w_n(\mathrm{Ad}\,\overline{w}_{n-2}(x)) \sim \mathrm{Ad}\,\overline{w}_{n-2}(x), \quad \forall x \in T_m.$$

よって $\{\mathrm{Ad}\,\overline{w}_n\}_n$ もまた収束します．収束先を $\overline{\theta}_1$ と書きます．

各 $\overline{u}^n$ は $\Gamma^{n,1}$-cocycle なので

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\overline{u}^n) = (\overline{u}^n \otimes 1)\Gamma^{n,1}(\overline{u}^n).$$

$n \to \infty$ としてみると，$\lim_{n\to\infty} \Gamma^{n,1} = (\overline{\theta}_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma^1 \circ \overline{\theta}_1^{-1}$ から $\hat{u}^1$ は 1-cocycle になることが分かります．(4.2) で $n \to \infty$ としてみれば，

$$\gamma^\infty = \mathrm{Ad}\,\hat{u}^1 \circ (\overline{\theta}_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma^1 \circ \overline{\theta}_1^{-1}$$

となります．したがって γ^∞ と γ^1 はコサイクル共役，さらには β ともコサイクル共役となります．同様の議論を α に適用することで α と β がコサイクル共役であることが証明できます．これで Theorem 1.1 の証明が完了します．

Intertwining argument のポイントの一つは片方だけを摂動していくのではなく，両方とも摂動していくところにあります．たとえば β だけ摂動していけば最終的には $\gamma^\infty = \alpha$ に収束はしますが，途中の w_n たちの有限集合 T_{n-2} に対する交換性を導けません．α の摂動列を考えれば，T_n たちをより速く大きくし続けられるのです．

5. 極小作用の分類

$\mathbb{G}$ をコンパクト群の極小作用とは次の定義を満たすものです．

Definition 5.1. α を $\mathbb{G}$ の vN 環 M への作用とする．次の条件が成り立つ時，α は極小 (minimal) であると言う．

(1) $\alpha\colon \mathbb{G} \to \mathrm{Aut}(M)$ は単射準同型.
(2) $M^{\alpha\prime} \cap M = \mathbb{C}$.

上記 (1) の条件を次の条件 (full spectrum condition) で置き換えてもよいことが知られています．

(1') $M_\pi \neq 0 \quad \forall \pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$.

ここで M_π は M の $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ に対するスペクトル部分空間です．コンパクト Kac 環の極小作用の定義にはこちらを採用します．

さて Theorem 2.4 を使うと次を示せます．

Lemma 5.2. コンパクト群 $\mathbb{G}$ の $\mathcal{R}$ への極小作用は双対作用である．

極小作用 α が $\widehat{\mathbb{G}}$ の $\mathcal{R}^\alpha$ への作用 γ の双対 $\hat{\gamma}$ であるとします．すると $\mathcal{R}^{\alpha\prime} \cap (\mathcal{R}^\alpha \rtimes_\gamma \widehat{\mathbb{G}}) = \mathcal{R}^{\alpha\prime} \cap \mathcal{R} = \mathbb{C}$ から γ の自由性が従います．$\mathcal{R}^\alpha \cong \mathcal{R}$ への $\widehat{\mathbb{G}}$ の自由作用たちは互いにコサイクル共役であったため，その双対の極小作用たちは互いに共役です．したがって Theorem 1.3 が導かれます．

コンパクト Kac 環の極小作用の構成は [3] や [12] で論じられています．コンパクト Kac 環に余従順性の他に可換フュージョン則を仮定しておけば，その無限テンソル積作用はいつも極小的であることが分かっています [4], [11].

5.1. これからの課題

Kac 環については作用の「自由性」や「近似的内部性」を外して，もっと大きなクラスの作用を研究することが考えられます．また量子群については自由作用，極小作用が従順因子環上に構成されていない (存在しない？) ので，その点をはっきりさせることが大きな課題であると思われます．

References

[1] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Kac algebras and duality of locally compact groups*, Springer-Verlag, Berlin (1992).

[2] D. E. Evans and A. Kishimoto, *Trace scaling automorphisms of certain stable AF algebras*, Hokkaido Math. J. **26** (1997), no. 1, 211–224.

[3] T. Hayashi and S. Yamagami, *Amenable tensor categories and their realizations as AFD bimodules*, J. Funct. Anal. **172** (2000), no. 1, 19–75.

[4] M. Izumi, *Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions*, Adv. Math. **169** (2002), no. 1, 1–57.

[5] M. Izumi, *Finite group actions on C^*-algebras with the Rohlin property I*, Duke Math. J. **122** (2004), no. 2, 233–280.

[6] T. Masuda and R. Tomatsu, *Classification of minimal actions of a compact Kac algebra with amenable dual*, ArXiv:math.OA/0604348, to appear in Comm. Math. Phys.

[7] A. Ocneanu, *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras*, Lecture Notes in Mathematics **1138**, Springer-Verlag, Berlin (1985).

[8] A. Ocneanu, *Prime actions of compact groups on von Neumann algebras*, unpublished.

[9] S. Popa and A. Wassermann, *Actions of compact Lie groups on von Neumann algebras* (English. English, French summary), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), no. 4, 421–426.

[10] Z.-J. Ruan, *Amenability of Hopf von Neumann algebras and Kac algebras*, J. Funct. Anal. **139** (1996), no. 2, 466–499.

[11] R. Tomatsu, *A characterization of right coideals of quotient type and its application to classification of Poisson boundaries*, ArXiv:math.OA/0611327, to appear in Comm. Math. Phys.

[12] S. Vaes, *Strictly outer actions of groups and quantum groups*, J. Reine Angew. Math. **578** (2005), 147–184.