数理解析研究所講究録
1534巻 2007年 7-13

Tensor Products on Normed Ideals

京都大学大学院理学研究科 太田 崇啓 (Takahiro Ohta)
Graduate School of Science,
Kyoto University

ここでは対称ノルム Φ から構成される行列ノルム空間 $H(\Phi)$ が作用素空間になるのは Φ が Schatten ノルムのときに限ることを示す.

このため対称ノルム Φ に対し以下のような条件を考える.

(*) $\exists c \geq 0,\ \|x \otimes y\|_\Phi \leq c\|x\|_\Phi\|y\|_\Phi,\quad \forall\, x,\ y$

(**) $\exists c \geq 0,\ \|x \otimes y\|_\Phi \geq c\|x\|_\Phi\|y\|_\Phi,\quad \forall\, x,\ y.$

これらを考える背景として作用素空間に関する Pisier の仕事の一般化を以下に述べる. 作用素空間とは, ある Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素のなす空間 $B(H)$ の閉部分空間のことをいう. 言い換えると, Banach 空間 E と, E の元を成分とする行列 $M_n(E)$, $n \in \mathbb{N}$ 上にノルム $\|\cdot\|_n$ で $\|\cdot\|_1$ がもとの E 上のノルムと一致したものがあるとしたとき, さらに E からある $B(H)$ への埋め込み $j : E \to B(H)$ があってこれが行列構造も含めて等長, すなわち $M_n(B(H)) = B(H^n)$ とみたときに $id_n \otimes j : M_n(E) \to M_n(B(H))$ が全ての n に対して等長であるようなものが存在するときに $(E, \|\cdot\|_n)$ を作用素空間という.

行列ノルム空間 $(E, \|\cdot\|_n)$ に対し上のような埋め込み j が存在することは以下の2条件が成り立つことと同値である. これは Ruan の公理と呼ばれる.

(M1) $\left\|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\right\|_{m+n} = \mathrm{Max}\{\|x\|_m, \|y\|_n\},\ \ x \in M_m(E),\ y \in M_n(E), m, n \in \mathbb{N}$,

(M2) $\|axb\|_n \leq \|a\|\|x\|_m\|b\|,\ x \in M_m(E),\ \ a \in M_{n\times m},\ b \in M_{m\times n}, m, n \in \mathbb{N}$,
ここで $M_{m\times n} = M_{m\times n}(\mathbb{C})$ であり, axb は行列としての積を意味する.

ここで用いられる重要な作用素空間として列 Hilbert 空間 R と行 Hilbert 空間 C を挙げる. これらの基となる Banach 空間は可分 Hilbert 空間 H で, H の正規直交基底のひとつを $(\xi_i)_{i\geq 1}$ としたとき, 行列 $T_i,\ i = 1, \ldots, n$ をとったときそれぞれの空間上の行列ノルムは

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes T_i\right\|_R = \left\|\sum_{i=1}^n T_i T_i^*\right\|^{1/2},\quad \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i \otimes T_i\right\|_C = \left\|\sum_{i=1}^n T_i^* T_i\right\|^{1/2},$$

で与えられる．これらの作用素空間の複素補間を考える．E_0, E_1 が Banach 空間の両立対とする．$0 < \theta < 1$ に対し複素補間空間を $(E_0, E_1)_\theta$ とかく．E_0, E_1 が作用素空間で基となる空間が両立対ならば，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $M_n((E_0, E_1)_\theta)$ を $(M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta$ と同一視することで作用素空間の複素補間空間が構成できる．

ここで Pisier の結果 [1, Theorem 8.4] を述べそれを一般化することを試みる．K を可分 Hilbert 空間とする．有限和 $T = \sum_i \xi_i \otimes T_i$ を代数的テンソル積 $H \otimes B(K)$ の元とする．Pisier は補間空間 $R(\theta) = (R, C)_\theta$ $(0 \leq \theta \leq 1)$ 上の行列ノルムが

$$\left\|\sum_i \xi_i \otimes T_i\right\|_{R(\theta)\otimes_{\min} B(K)} = \sup\left\{\left\|\sum_i T_i x T_i^*\right\|_p^{1/2} : x \in \mathfrak{S}_p,\ x \geq 0,\ \|x\|_p \leq 1\right\},$$

であることを示した (ここで $p = \theta^{-1}$, $\mathfrak{S}_p$ は Schatten p-クラス)．この右辺の Schatten p-ノルムを一般の作用素イデアル上の対称ノルムで置き換えたときを考える．

ここで作用素イデアルについて解説しておく．$\mathfrak{S}$ を $B(H)$ の両側イデアルとする．$\mathfrak{S}$ 上の関数 $\|\cdot\|_s$ が対称ノルムであるとは以下の 3 条件をみたすときをいう:

(1) $\|\cdot\|_s$ は $\mathfrak{S}$ 上のノルム;
(2) x がランク 1 の作用素ならば，$\|x\|_s = \|x\|$;
(3) $\|axb\|_s \leq \|a\|\|x\|_s\|b\|$ $(\forall a, b \in B(H),\ \forall x \in \mathfrak{S})$.

さらに，$(\mathfrak{S}, \|\cdot\|_s)$ が Banach 空間であるとき，これを作用素イデアルという．ここでは有限ランク作用素全体が $(\mathfrak{S}, \|\cdot\|_s)$ で稠密な作用素イデアルを考えることにする．このとき，$x \in \mathfrak{S}$ に対し $\|x\|_s$ は $|x|$ の固有値を降順に並べたもの $((s_i(x))_{i\geq 1}$ とかく) によってのみ決まる．以降，対称ノルム Φ に対しそれから決まる作用素イデアルを $\mathfrak{S}_\Phi$ とかく．また，対称ノルム Φ に対しその共役対称ノルム Φ^* が

$$\|x\|_{\Phi^*} = \sup_{\|y\|_\Phi \leq 1} |\operatorname{Tr}(xy)|$$

で定義される．例えば，Schatten p-ノルム $(1 \leq p \leq \infty)$ は対称ノルムで

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(x)^p\right)^{1/p}$$

である．

Pisier の話に戻って，有限和 $T = \sum_i \xi_i \otimes T_i \in H \otimes B(K)$ に対し $B(K)$ 上の作用素 ρ_T を

$$\rho_T(x) = \sum_i T_i x T_i^*,\ x \in B(K)$$

で定義する. このとき ρ_T は基底 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ の取り方に依らない. 2つの対称ノルム Φ と Ψ で $\Psi \leq \Phi$ なものに対し, $T \in H \otimes M_n$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\Phi,\Psi}$ を

$$\|T\|_{\Phi,\Psi} = \|\rho_T \colon \mathfrak{S}_\Phi \to \mathfrak{S}_\Psi\|^{1/2}$$

と定義する. このようにしてできた行列ノルム空間 $(H \otimes M_n, \|\cdot\|_{\Phi,\Psi})$ を $H(\Phi,\Psi)$ とかく. $\Phi = \Psi$ のとき, 簡単のため $H(\Phi,\Phi)$ を $H(\Phi)$ とかく. この空間は Ruan の公理のうち (M2) をみたす. また, Φ がトレースノルムかまたは Ψ が作用素ノルムのときは $H(\Phi,\Psi)$ は作用素空間になることがわかっている. すべての $H(\Phi,\Psi)$ が作用素空間であるとは限らない. $H(\Phi)$ が作用素空間なのは Φ が Schatten ノルムのとき, つまり $R(\theta)$ の形に限ることを述べる.

定理 1. Φ と Ψ を対称ノルムで $\Phi \geq \Psi$ とする. 行列ノルム空間 $H(\Phi,\Psi)$ が作用素空間ならば, 任意の $x, y, z \in \mathfrak{S}_\Phi$ に対し

$$\frac{\|x \otimes y\|_\Psi}{\|x\|_\Psi} \leq \frac{\|z \otimes y\|_\Phi}{\|z\|_\Phi}$$

が成り立つ. 特に, $\Phi = \Psi$ のとき, これは Φ が積ノルム ($\|x \otimes y\|_\Phi = \|x\|_\Phi \|y\|_\Phi$) であることを意味している.

証明. x, y, z が有限ランクの正値対角行列のときに示せばよい. $n \in \mathbb{N}$, に対し, $x = \mathrm{diag}(x_i)$, $y = \mathrm{diag}(y_j)$, $z = \mathrm{diag}(z_i) \in M_n$ とする. また, 正値対角行列 $w = \mathrm{diag}(w_j)$ に対し $T = \sum_{i,j=1}^n \xi_{ij} \otimes (z_i w_j)^{1/2} e_{ij}$ とおく. ここで, e_{ij} は (i,j)-成分のみ 1 で他は 0 の単位行列を表す. このとき $\rho_T(x) = \sum_{i,j}(z_i w_j) x_j e_{ii}$ でありゆえに

$$\|\rho_T\| = \sup_x \frac{\|\langle x, w\rangle z\|_\Psi}{\|x\|_\Phi} = \|w\|_{\Phi^*} \|z\|_\Psi$$

となる. 一方, $S = T \oplus \cdots \oplus T$ を T の n-次直和とする. 作用素空間は (M1) をみたすので,

$$\|\rho_T\| \geq \frac{\|\rho_S(x \otimes y)\|_\Psi}{\|x \otimes y\|_\Phi}$$

である. $\|\rho_S(x \otimes y)\|_\Psi = |\langle x, w\rangle| \|z \otimes y\|_\Psi$ なので,

$$\|w\|_{\Phi^*} \|z\|_\Psi \geq \frac{|\langle x, w\rangle| \|z \otimes y\|_\Psi}{\|x \otimes y\|_\Phi}$$

が従う. w は任意なので, 上限をとると求める不等式が得られる. 最後の主張は, 定理の不等式で x または z をランク 1 の射影とすれば出る. □

この定理から $H(\Phi)$ が作用素空間ならば Φ は条件 $(*)$ と $(**)$ を $c = 1$ でみたす. このほかに条件 $(*)$ に至った R からの完全有界写像に関する定理がある.

定理 2. Φ と Ψ を対称ノルムで $\Phi \geq \Psi$ なものとし, $x \in B(H)$ とする. そのとき

$$\|x\|_{CB(R,H(\Phi,\Psi))} = \left(\sup_{a \in \mathfrak{S}_\Phi} \frac{\left\| |x|^2 \otimes a \right\|_\Psi}{\|a\|_\Phi} \right)^{1/2}$$

が成り立つ.

証明. $x = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ を正値対角行列とする. 定義から

$$\|x\|_{CB(R,H(\Phi,\Psi))} = \sup_{T \in R,\ a \in \mathfrak{S}_{\Phi,+},\ \|a\|_\Phi \leq 1} \left\{ \left\| \sum_i \lambda_i^2 T_i a T_i^* \right\|_\Psi^{1/2} \right\}$$

である. もし $\|T\|_R \leq 1$ ならば, $\|\sum_i T_i T_i^*\| \leq 1$ であるから, $(T_i^* T_j)_{ij} \leq I$ がでる. ゆえに

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 T_i a T_i^* \right\|_\Psi &= \left\| \begin{pmatrix} T_1 & \ldots & T_n \\ & & \\ & \bigcirc & \end{pmatrix} \mathrm{diag}(\lambda_1^2 a, \ldots, \lambda_n^2 a) \begin{pmatrix} T_1^* & & \\ \vdots & & \bigcirc \\ T_1^* & & \end{pmatrix} \right\|_\Psi \\ &= \left\| \mathrm{diag}(\lambda_1 a^{\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n a^{\frac{1}{2}}) (T_i^* T_j) \, \mathrm{diag}(\lambda_1 a^{\frac{1}{2}}, \ldots, \lambda_n a^{\frac{1}{2}}) \right\|_\Psi \\ &\leq \left\| |x|^2 \otimes a \right\|_\Psi . \end{aligned}$$

が従う. 逆を示すには, $\{T_i\}_{i=1}^n$ として $T_i^* T_j = \delta_{ij} I$ なるものをとればよい, ここで δ_{ij} は Kronecker delta である. □

この定理は Ψ が条件 $(*)$ をみたすなら $CB(R, H(\Phi, \Psi))$ は作用素イデアル $\mathfrak{S}_\Psi$ と同型であることをいっている. 次に行列ノルム空間 $H(\Phi)$ が作用素空間となるのは Φ が Schatten ノルムのときに限ることを示していく.

条件 $(*)$ と $(**)$ は Schatten ノルムと深い関係がある. 対称ノルム Φ に対し, 定数 p_Φ と q_Φ を

$$p_\Phi = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log n}{\log \|P_n\|_\Phi}, \quad q_\Phi = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\log \|P_n\|_\Phi}.$$

で定義する. ここで, P_n はランク n の任意の射影である. 明らかに $1 \leq p_\Phi \leq q_\Phi \leq \infty$ である.

補題 3. 作用素イデアル $\mathfrak{S}_\Phi$ が条件 $(*)$ または $(**)$ をみたすなら, 極限

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{\log \|P_n\|_\Phi} \in [1, \infty]$$

が存在する.

証明. 条件 (*) が成り立つときのみ示す. このとき, $m \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\|P_{m^k}\|_\Phi \le c^{k-1}\|P_m\|_\Phi^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

がいえる. $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ を $\mathbb{N}$ の任意の部分列としたとき, $\mathbb{N}$ の非減少列 $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ で $m^{k_i} \le t_i < m^{k_i+1}$ なものがとれる. ゆえに

$$\frac{\log t_i}{\log\|P_{t_i}\|_\Phi} \ge \frac{\log m^{k_i}}{\log\|P_{m^{k_i+1}}\|_\Phi} \ge \frac{k_i \log m}{k_i \log c + (k_i+1)\log\|P_m\|_\Phi}$$

となる. $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ は任意であったから,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log\|P_n\|_\Phi} \ge \frac{\log m}{c + \log\|P_m\|_\Phi}$$

が出, これより

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log\|P_n\|_\Phi} \ge \limsup_{m\to\infty} \frac{\log m}{\log\|P_m\|_\Phi}$$

となり極限が存在する. □

対称ノルム Φ に対し新しい対称ノルム

$$M_\Phi(x) = \sup_y \frac{\|x\otimes y\|_\Phi}{\|y\|_\Phi}$$

が定義される. また, 関数 N_Φ を

$$N_\Phi(x) = \inf_y \frac{\|x\otimes y\|_\Phi}{\|y\|_\Phi}$$

で定義する.

定理 4. 以下が成立.

$$N_\Phi(x) \le \|x\|_{q_\Phi} \le \|x\|_{p_\Phi} \le M_\Phi(x).$$

証明. $x = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_m \ge 0$ を対角行列とし,

$$x^{\otimes n} = \sum_{i=1}^N t_i e_i$$

x の n-次テンソル積のスペクトル分解とする. このとき $N \le \binom{m+n-1}{m-1}$ に注意. $p_j = \sum_{i=1}^j e_i$ とおくと, 任意の j に対し

$$\sum_{i=1}^n t_i e_i = \sum_{i=1}^n (t_j - t_{j-1}) p_j \ge t_j p_j$$

なので,

$$\operatorname*{Max}_j\{(t_j\|p_j\|_\Phi)^{1/n}\} \le \|x^{\otimes n}\|_\Phi^{1/n} \le N^{1/n}\operatorname*{Max}_j\{(t_j\|p_j\|_\Phi)^{1/n}\}$$

がいえる．この不等式を $\Phi = \Phi_p$ に用いると

$$\|x\|_p = \lim_{n\to\infty} \operatorname*{Max}_j \left\{ t_j^{1/n} (\operatorname{rank} p_j)^{1/(pn)} \right\}$$

となる．前の補題から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$D > 0$ で

$$\|p_j\|_\Phi \geq D(\operatorname{rank} p_j)^{1/(p+\varepsilon)}, \ \forall j \in \mathbb{N}$$

なるものが存在する．$\|x^{\otimes n}\|_\Phi \leq M_\Phi(x)^n$ なので，

$$\begin{aligned} M_\Phi(x) &\geq \|x^{\otimes n}\|_\Phi^{1/n} \\ &\geq \operatorname*{Max}_j \{(t_j \|p_j\|_\Phi)^{1/n}\} \\ &\geq \operatorname*{Max}_j \left\{ (Dt_j)^{1/n} (\operatorname{rank} p_j)^{1/\{(p+\varepsilon)n\}} \right\} \end{aligned}$$

がいえる．最後の部分は $n \to \infty$ のとき $\|x\|_{p+\varepsilon}$ に収束するので右の不等式が示される．左側も同様． □

この定理から，条件 $(*)$ が成り立つなら p を補題 3 のものとすると $\|x\|_p \leq c\|x\|_\Phi$ であり，条件 $(**)$ が成り立つなら $c\|x\|_\Phi \leq \|x\|_p$ である．とくに，Φ が積ノルムならば，Φ は Schatten p-ノルムである．このことと定理 1 から次の系を得る．

系 5. Φ を対称ノルムとする．行列ノルム空間 $H(\Phi)$ が作用素空間であるのは Φ が Schatten p-ノルム $(1 \leq p \leq \infty)$ のときに限る．

Φ と Ψ が異なる対称ノルムのときは状況が大きく異なる．定理 1 から $H(\Phi, \Psi)$ が作用素空間とすると，$p_\Psi = 1$ のときは Φ はトレースノルムでなければならないし，$q_\Phi = \infty$ のときは Ψ は作用素ノルムでなければならない．一般にはより多くの場合に $H(\Phi, \Psi)$ が作用素空間になる．

定義 1. Φ を対称ノルムとする．このとき新しい対称ノルム $\tilde{\Phi}$ が

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(s_1(x)^2, \ldots, s_n(x)^2, \ldots)^{1/2}$$

によって定まる．対称ノルム Φ が Q-ノルムであるとは，対称ノルム Ψ で $\tilde{\Psi} = \Phi$ なものが存在するときをいい，また，Φ が Q*-ノルムであるとは，Φ がある Q-ノルムの共役であるときをいう．

任意の Q-ノルムは Hilbert-Schmidt ノルム以下であって任意の Q*-ノルムは Hilbert-Schmidt ノルム以上であることに注意．

定理 6. Φ が Q*-ノルムで Ψ Q-ノルムであるとする．このとき $H(\Phi, \Psi)$ は作用素空間である．

参考文献

[1] G. Pisier, *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms*, Memoirs Amer. Math. Soc., 122, 1996