数理解析研究所講究録
1535巻 2007年 125-127

Banach 空間上の三角不等式について

山形大学工学部　高橋眞映　(Sin-Ei Takahasi)

1．動機。Hilbert 空間 H では，$\lambda, \mu, \nu, a, b \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ with $\lambda = \mu a^2 + \nu b^2$ を固定すると，Euler-Lagrange 型等式 (cf. [2])：

$$\frac{\|x\|^2}{\mu} + \frac{\|y\|^2}{\nu} - \frac{\|ax+by\|^2}{\lambda} = \frac{\|\nu bx - \mu ay\|^2}{\lambda\mu\nu} \quad (x, y \in H)$$

が成り立つ。従って，もし $\lambda\mu\nu > 0$ であれば第2型の三角不等式 (cf. [3, 4]) の一般化である

$$\frac{\|ax+by\|^2}{\lambda} \le \frac{\|x\|^2}{\mu} + \frac{\|y\|^2}{\nu} \quad (x, y \in H)$$

が成り立つ。それでは，一般の Banach 空間 X ではどうなるであろうかと言う自然な問題が生ずる。更にべきを1以上にすると，良く知られた不等式

$$\|x+y\|^p \le 2^{p-1}\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right) \quad (x, y \in X, p \ge 1)$$

が成り立つが，これは X 上の関数 $\|x\|^p$ が中点凸，従って凸であることを物語っている (cf. [1])。それ故

$$\|x+y\|^p \le (\alpha+\beta)^{p-1}\left(\frac{\|x\|^p}{\alpha^{p-1}} + \frac{\|y\|^p}{\beta^{p-1}}\right) \quad (x, y \in X, \alpha, \beta > 0, p \ge 1)$$

が成り立つ。このとき我々は上のような係数はどんな意味を持っているのであろうかと言う自然な疑問にぶつかる。

2．問題発見。$p > 0$ を固定して，集合

$$D_p = \left\{(a, b, \lambda, \mu, \nu) : \frac{\|ax+by\|^p}{\lambda} \le \frac{\|x\|^p}{\mu} + \frac{\|y\|^p}{\nu} \ (\forall x, y \in X)\right\}$$

を考える。ここに $a, b \in \boldsymbol{C}$, $\lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{R} : \lambda\mu\nu \ne 0$ である。このとき集合 D_p が決定できれば、1節で記述された係数の意味が分かるのではないかという期待感がある。

注意。$p < 0$ の場合は D_p を $\dfrac{\|ax+by\|^p}{\lambda} \le \dfrac{\|x\|^p}{\mu} + \dfrac{\|y\|^p}{\nu}$ が意味を持つ全ての $x, y \in X$ について成り立つような $(a, b, \lambda, \mu, \nu)$ の集合とすると，$D_p = \varnothing$ となるため意味がない。

3．結果。実は $p > 1$ のときは既に調査済み (cf. [6]) であり次の結果を得ている。

定理1．X を Banach 空間，p を1より大きい実数とする。このとき次が成り立つ。

(i) $D_p \cap \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0\} = \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0, |\lambda|^{1/(p-1)} \ge |\mu|^{1/(p-1)}|a|^{p'} + |\nu|^{1/(p-1)}|b|^{p'}\}$.

(ii) $D_p \cap \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0\} = \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0, |\lambda|^{1/(p-1)} \le |\mu|^{1/(p-1)}|a|^{p'} - |\nu|^{1/(p-1)}|b|^{p'}\}$.

(iii) $D_p \cap \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0\} = \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0, |\lambda|^{1/(p-1)} \le -|\mu|^{1/(p-1)}|a|^{p'} + |\nu|^{1/(p-1)}|b|^{p'}\}$.

注意1。(i) ~ (iii) 以外の場合については，trivial cases となる。

上の定理の証明は刑事コロンボの共通項の原理 (cf. [5, Theorem 1]) に従う。

いま ε_t を $t \in \boldsymbol{R}$ の符号, つまり $\varepsilon_t = \begin{cases} 1 & (t>0) \\ -1 & (t<0) \end{cases}$ とすると, 定理1は次の系を導く。

系2. X を Banach 空間, p を1より大きい実数, a, b を複素数, λ, μ, ν を $\lambda\mu\nu > 0$ を満たす実数とする。但し $\lambda > 0, \mu < 0, \nu < 0$ の場合は除く。このとき不等式

$$(*) \qquad \frac{\|ax+by\|^p}{\lambda} \le \frac{\|x\|^p}{\mu} + \frac{\|y\|^p}{\nu}$$

がすべて $x, y \in X$ に対して成り立つ為の必要十分条件は不等式

$$(**) \qquad \varepsilon_\lambda |\lambda|^{1/(p-1)} \ge \varepsilon_\mu |\mu|^{1/(p-1)} |a|^{p'} + \varepsilon_\nu |\nu|^{1/(p-1)} |b|^{p'}$$

が成り立つ事である。

注意2。必要十分条件 (**) は, λ, μ, ν を固定すると, 点 $(|a|, |b|)$ は楕円型曲線又は双曲型曲線を境界とする領域に属する事を物語っており, $a, b \in \boldsymbol{C}$ を固定すると, 点 (λ, μ, ν) は楕円型曲面又は双曲型曲面を境界とする領域に属する事を物語っている。また (**) の等号が成り立つ事が (*) を最良にする条件である事も分かる。

ところで, $p=2$ のとき (#) の等号条件は丁度1節での条件 $\lambda = \mu a^2 + \nu b^2$ に他ならない。また $\lambda = (\alpha+\beta)^{p-1}$, $\mu = \alpha^{p-1}|a|^{-p}$, $\nu = \beta^{p-1}|b|^{-p}$ とすると、(*) の等号条件を満たし、このとき (*) は丁度1節で述べた $\|x+y\|^p \le (\alpha+\beta)^{p-1}\left(\frac{\|x\|^p}{\alpha^{p-1}} + \frac{\|y\|^p}{\beta^{p-1}}\right)$ に他ならない。またこれらの係数が作る点は, 上で述べた領域の境界に属し、それ故対応する不等式も最良となる。詳細は文献 [6] を見られたし。

さて我々は最良条件

$$(\#) \qquad \varepsilon_\lambda |\lambda|^{1/(p-1)} = \varepsilon_\mu |\mu|^{1/(p-1)} |a|^{p'} + \varepsilon_\nu |\nu|^{1/(p-1)} |b|^{p'}$$

のもとに (*) の等号条件を探す。次の定理がその解答である。

定理3. X を Banach 空間, p を1より大きい実数, a, b を非零複素数, λ, μ, ν を $\lambda\mu\nu > 0$ を満たす実数とする。但し $\lambda > 0, \mu < 0, \nu < 0$ の場合は除く。更に5組 $(a, b, \lambda, \mu, \nu)$ は条件 (#) を満たすと仮定する。このとき固定された $x, y \in X$ に対して, (*) の等号が成り立つ為の必要十分条件は次の2等式

$$\varepsilon_\lambda \|ax+by\| = \varepsilon_\mu \|ax\| + \varepsilon_\nu \|by\| \quad \text{and} \quad \frac{\|x\|^{p-1}}{|a\mu|} = \frac{\|y\|^{p-1}}{|b\nu|}$$

が成り立つ事である。

上の定理の証明に関しては, [5, Theorem 1] で得られ結果をうまく使い, 割りと複雑な計算をすることによって得られる。

次に $0 < p < 1$ の場合について考察すると以下の結果を得る。

定理4. X を Banach 空間, p を0と1の間の実数, a, b を非零複素数とする。このとき次が成り立つ。

(i) $D_p \cap \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0\} = \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0, \lambda \ge \max\{\mu|a|^p, \nu|b|^p\}\}$.

(ii) $D_p \cap \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0\} = \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0, |\mu||a|^p \ge \max\{|\lambda|, |\nu||b|^p\}\}$.

(iii) $D_p \cap \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0\} == \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0, |\nu||b|^p \ge \max\{|\lambda|, |\mu||a|^p\}\}$.

上の定理の証明に関しては, [5, Theorem 2] で得られ結果をうまく使うことによって得られる。

注意 3 。(i) ～ (iii) 以外の場合については, trivial cases となる。

注意 4 。次の 3 条件を考える。
①$[x=0, \lambda=\nu|b|^p]$,
②$[y=0, \lambda=\mu|a|^p$,
③$[ax+by=0, \mu|a|^p+\nu|b|^p=0]$.
このとき (*) の等号成立条件は次のようになる。
(i) $\lambda>0, \mu>0, \nu>0, ax+by\neq 0 \Rightarrow$ (*) の等号成立 $\Leftrightarrow$ ① or ②.
(ii) $\lambda<0, \mu<0, \nu>0, x\neq 0 \Rightarrow$ (*) の等号成立 $\Leftrightarrow$ ② or ③.
(iii) $\lambda<0, \mu>0, \nu<0, y\neq 0 \Rightarrow$ (*) の等号成立 $\Leftrightarrow$ ① or ③.
これは $0<p<1$ の場合の Minkowski の不等式を考察することによって, 容易に導かれる。

本報告は速報的意味合いを持ったものであり、証明等に関する詳細はしかるべき機会に譲りたい。

References

1. C. Niculescu and L.-E. Persson, Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, CMS Press, Springer 2006.

2. J. M. Rassias and M. J. Rassias, On the Ulam stability for Euler-Lagrange type quadratic functional equations, Austral. J. Anal. Appl., 2(2005), 1-10.

3. S. Saitoh, Various operators in Hilbert space introduced by transforms, Internat. J. Appl. Math., 1- 1(1999), 111-126.

4. S. Saitoh, Generalizations of the triangle inequality, J. Inequal. Pure Appl. Math. 4-3 (2003), Article 62, 1-5.

5. H. Takagi, T. Miura, T. Hayata and S.-E. Takahasi, A reconsideration of Hua's inequality, II, to appear in J. Inequal. Appl.

6. S.-E. Takahasi, J. M. Rassias, S. Saitoh and Y. Takahashi, Refined generalizations of the triangle inequality on Banach spaces, to appear in Math. Inequal. Appl.