数理解析研究所講究録
1535 巻 2007 年 109-111

一般化された安藤・日合の定理によるフルタ不等式の一般化

前橋工科大学　亀井栄三郎

1．安藤一日合の定理からフルタ不等式へ　A, B は Hibert space 上の positive operators とします。まず久保・安藤 [14] によって導入された作用素平均 (α-power mean) の定義を与えておきます。

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

安藤・日合 [1],[10] は次のような定るを示しました [3],[5]。

Ando-Hiai Theorem: *For* A, $B > 0$,

(AH) $$A \natural_\alpha B \leq I, \ \Rightarrow \ A^r \natural_\alpha B^r \leq 1 \ \textit{holds for} \ r \geq 1.$$

私達はこの定理を次のように一般化しました。

Theorem A. *For* $\alpha \in (0, 1)$ *fixed,*

(GAH) $$A \natural_\alpha B \leq I \implies A^r \natural_{\frac{\alpha r}{(1-\alpha)s+\alpha r}} B^s \leq I \ \text{ for } r, s \geq 1.$$

今回はこの定理の有効性について紹介します。まずフルタ不等式 ([6],[7],[9]) についてです。

Furuta inequality: *If* $A \geq B \geq 0$, *then for each* $r \geq 0$,

(F) $$A^{\frac{p+r}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

holds for p *and* q *such that* $p \geq 0$ *and* $q \geq 1$ *with* $(1+r)q \geq p+r$.

これを α-power mean を使って表すと次のようになります [2],[11]。

(F) $$A \geq B \geq 0 \ \Rightarrow \ A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A \ \text{ for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 0.$$

私達の結果は次です [11],[12]。

(SF) $$A \geq B \geq 0 \ \Rightarrow \ A^{-r} \natural_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \ (\leq A) \ \text{ for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 0.$$

前回私達が示した結果は、(AH) から (SF) が導かれ、よって (F) がえられる、更に (F) から (AH) も導くことができる、というものでした。

ここでまず、(GAH) を使うと (F) は直ちに導かれることを示しておきます。

Proposition.

$$(GAH) \quad \textit{implies} \quad (F).$$

Proof. Since $A \geq B \geq 0$ is equivalent to $A^{-1} \natural_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq I$, (GAH) leads

$$A^{-(r+1)} \natural_{\frac{\frac{r+1}{p}}{(1-\frac{1}{p})+\frac{r+1}{p}}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq I \ \text{ for } r \geq 0, \ p \geq 1.$$

This is equivalent to

$$A^{-(r+1)} \sharp_{\frac{r+1}{p+r}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq I.$$

So we have

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A.$$

2．フルタ不等式の一般化 (AH) から安藤・日合 [1] は次の (AH_0) を示しました。

(AH_0) $\quad A^{-1} \sharp_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq I \;\Rightarrow\; A^{-r} \sharp_{\frac{1}{p}} (A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^r \leq I$ for $p \geq 1$ and $r \geq 1$.

(AH_0) これを受け古田は (AH_0) と (F) を繋ぐ次のようなフルタ不等式の一般化を与えました ([8],[9])。

Grand Furuta inequality： *If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for each $1 \leq p$ and $0 \leq t \leq 1$,*

(GF) $$A^{-r} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^{\frac{-t}{2}}B^pA^{\frac{-t}{2}})^s \leq A^{1-t}$$

holds for $t \leq r$ and $1 \leq s$.

この不等式に関しても私達の得ている結果は次のような形です ([3],[113],[14])。

(SGF) $$A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq B \ (\leq A)$$

holds for $t \leq r$ and $1 \leq s$.
ここで $\natural$ は α-power mean と区別して次のように定義します。

$$A \natural_r B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^r A^{\frac{1}{2}} \text{for} r \notin [0,\ 1]$$

この不等式 (GF) の重要性は $t = 1, r = s$ のとき (AH_0), $t = 0, s = 1$ のとき (F) となることです。
ここでは、(GAH) を使うことで (SF), (AH_0) を繋ぐ不等式として次を与えておきます。

Theorem. *If $A \geq B \geq 0$ and A is invertible, then for each $1 \leq p$ and $0 \leq t \leq 1$,*

$$A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq A^t \sharp_{\frac{1-t}{p-t}} B^p$$

holds for $t \leq r$ and $1 \leq s$.

Proof. if $A \geq B \geq 0$, then $A^t \geq B^t$ for $t \in [0,\ 1]$ by the Löwner-Heinz inequality. For $p \geq t > 0$, $B^t \leq A^t$ which is equivalent to $A^{-t} \sharp_{\frac{t}{p}} A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}} \leq I$. By (GAH), we have

$$A^{-tr_1} \sharp_{\frac{\frac{tr_1}{p}}{(1-\frac{t}{p})s+\frac{tr_1}{p}}} (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^s \leq I \quad \text{for } r_1,\ s \geq 1$$

Let $r_1 = \frac{r}{t}$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{r}{(p-t)s+r}} (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^s = (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^s \sharp_{\frac{(p-t)s}{(p-t)s+r}} A^{-r} \leq I.$$

This is equivalent to

$$(A^t \natural_s B^p) \sharp_{\frac{(p-t)s}{(p-t)s+r}} A^{-r+t} \leq A^t.$$

Hence we have the conclusion by the following calculations.

$$\begin{aligned}
& A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) = (A^t \natural_s B^p) \sharp_{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s+r}} A^{-r+t} \\
= \ & (A^t \natural_s B^p) \sharp_{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s}} ((A^t \natural_s B^p) \sharp_{\frac{(p-t)s}{(p-t)s+r}} A^{-r+t}) \\
\leq \ & (A^t \natural_s B^p) \sharp_{\frac{(p-t)s-(1-t)}{(p-t)s}} A^t \\
= \ & A^t \sharp_{\frac{1-t}{(p-t)s}} (A^t \natural_s B^p) = A^t \sharp_{\frac{1-t}{p-t}} B^p.
\end{aligned}$$

References

[1] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, Linear Alg. and Its Appl., 197(1994), 113-131.

[2] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990), 67-72.

[3] M.Fujii and E.Kamei, Ando-Hiai inequality and Furuta inequality, Linear Algebra Appl.,416(2006), 541-545.

[4] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Algebra Appl., 179(1993), 161-169.

[5] M.Fujii, E.Kamei and R.Nakamoto, An analysis on the internal structure of the celebrated Furuta inequality, preprint.

[6] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.

[7] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989), 126.

[8] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and Its Appl., 219(1995), 139-155.

[9] T.Furuta, Invitatin to Linear Operators, Taylor & Francis, London and New York, (2001).

[10] F.Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, Linear Operators Banach Center Publications, vol.38, 1997.

[11] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon., 33(1988), 883-886.

[12] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, Math. Japon., 49(1999), 65-71.

[13] E.Kamei, Parametrzed grand Furuta inequality, Math. Japon., 50(1999), 79-83.

[14] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

Maebashi Institute of Technology, Kamisadori, Maebashi, Gunma, 371-0816, Japan
e-mail: kamei@maebashi-it.ac.jp