数理解析研究所講究録
1535巻 2007年 72-81



# クラス A 作用素等の Quasinilpotent part

棚橋浩太郎　東北薬科大学
内山　敦　　仙台電波高専
I.H. Jeon, Seoul National University of Education
I. H. Hyoun Kim, Seoul National University

**[目標]** ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のクラス $A$ 作用素、$(p,k)$-quasihyponormal 作用素等の quasinilpotent part を調べる。

**[本論]**

複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 $T$ を考える。$T$ が quasinilpotent とはスペクトル半径が 0、つまり、

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=0$$

であることをいう。これは $\sigma(T)=\{0\}$ と同値である。また、$T-\lambda$ の quasinilpotent part は

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda)=\{x\in\mathcal{H}:\lim_{n\to\infty}\|(T-\lambda)^n x\|^{\frac{1}{n}}=0\}$$

で定められる。

$T$ が quasinilpotent であることと $\mathcal{H}_0(T)=\mathcal{H}$ であることは同値であることが知られている。また、一般に

$$\ker(T-\lambda)\subset\mathcal{H}_0(T-\lambda)$$

であるが $\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ は閉とは限らない。しかし $T$ が hyponormal, つまり、

$$TT^*\le T^*T$$

ならば

$$\|(T-\lambda)x\|\le\|(T-\lambda)^n x\|^{\frac{1}{n}}\quad(\|x\|=1)$$

が成り立つので $\ker(T-\lambda)=\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ であることがわかり、よって $\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ は閉である。

この論文の目的は hyponormal 作用素を拡張したクラス $A$, $(p,k)$-quasihyponormal 作用素等の quasinilpotent part を調べることである。

まず、古田、伊藤、山崎 [4] によって導入されたクラス $A$ 作用素、つまり、

$$|T|^2\le|T^2|$$

を満たす作用素を考える。クラス $A$ 作用素は様々なよい性質をもつ。次にその性質をまとめておく。

**[補題 1]**([3], [12], [16]) $T$ はクラス $A$ 作用素とする。

(1) $T$ は Bishop's property $(\beta)$ をもつ、つまり、もし 開集合 $D$ 上の analytic funcion $f_n(z)$ が $D$ 上広義一様に $(T-z)f_n(z) \to 0$ なら $D$ 上広義一様に $f_n(z) \to 0$ である。

(2) restriction $T|_{\mathcal{M}}$ もクラス $A$ 作用素である。

(3) もし $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ が孤立点なら $\lambda$ の Riesz idempotent $E_\lambda$ は自己共役で $E_\lambda \mathcal{H} = \ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*$ である。

(4) $T = U|T|$ と極分解して $T(1,1) = |T|U|T|$ とおくと

$$\||T^2| - |T|^2\| \leq \|T(1,1) - T(1,1)^*\| \leq \frac{1}{\pi}\text{meas } \sigma(T)$$

となる。もし、 meas $\sigma(T) = 0$ なら $T$ は normal である。

クラス $A$ 作用素の quasinilpotent part は次の定理で与えられる。

**[定理 2]** $T$ はクラス $A$ 作用素とすると任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)$$

である。

**[証明]** 閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して glocal spectral subspace を

$$\mathcal{X}_T(F) = \{x \in \mathcal{H} | \exists \text{analytic} f(z) : (T-z)f(z) = x \text{ on } \mathbb{C} \setminus F\}$$

で定める。このとき

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \mathcal{X}_T(\{\lambda\})$$

であることが知られている。([1] Theorem 2.20)
補題より $T$ は $(\beta)$ をもつので [10] Proposition 1.2.19 より $\mathcal{X}_T(F)$ は閉で

$$\sigma(T|_{\mathcal{X}_T(F)}) \subset F$$

となる。よって $\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ は閉で、補題 1 より $T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}$ はクラス $A$ 作用素である。ここで

$$\sigma(T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}) \subset \{\lambda\}$$

なので、補題 1 より $T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}$ は normal になる。
もし、$\sigma(T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}) = \emptyset$ なら $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \{0\}$ であるから $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ となる。
また、もし、$\sigma(T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}) = \{\lambda\}$ なら $T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)} = \lambda$ であるから $\mathcal{H}_0(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)$ となる。従って $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)$ が得られる。 **[証明終]**

[**注意**] もし $\lambda \neq 0$ なら $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)^*$ である。更に、もし $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ が孤立点なら $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*$ である。しかし $\lambda = 0$ なら $\ker(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)^*$ は成立しない。([16], [17])

次に $(p,k)$-qusihyponormal 作用素 $T$, つまり、

$$T^{*k}((T^*T)^p - (TT^*)^p)T^k \geq 0$$

を満たす作用素を考える。この作用素は韓国の若い数学者 I.H. Kim [8] によって導入された。定義からすぐわかるように、これは $p$-hyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$,

$$(T^*T)^p - (TT^*)^p \geq 0$$

$p$-quasihyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$,

$$T^*((T^*T)^p - (TT^*)^p)T \geq 0$$

の自然な拡張である。

次に $(p,k)$-qusihyponormal 作用素の性質をまとめておく。

[**補題 3**]([8] [13] [14]) $T$ は $(p,k)$-quasihyponormal 作用素とする。

(1) 値域 ran $T^k$ が dense でないなら

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\text{ran}\, T^k] \oplus \ker T^{*k}$$

と分解したとき $T_1$ は $p$-hyponormal 作用素、$T_3^k = 0$、$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$ となる。ただし [ran $T^k$] は値域 ran $T^k$ の閉包である。

(2) restriction $T|_{\mathcal{M}}$ も $(p,k)$-quasihyponormal 作用素である。

[**補題 4**] $(p,k)$-qusihyponormal 作用素 $T$ は Bishop's property $(\beta)$ をもつ。

[**証明**] $D$ 上の analytic function $f_n(z)$ が $D$ 上広義一様に $(T-z)f_n(z) \to 0$ とする。補題 3 より

$$\begin{pmatrix} T_1 - z & T_2 \\ 0 & T_3 - z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n1}(z) \\ f_{n2}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_1 - z)f_{n1}(z) + T_2 f_{n2}(z) \\ (T_3 - z)f_{n2}(z) \end{pmatrix} \to 0.$$

である。ここで $T_3^k = 0$ なので $T_3$ は $(\beta)$ をもつから、$f_{n2}(z) \to 0$ が得られる。よって $(T_1 - z)f_{n1}(z) \to 0$ である。一方 $T_1$ は $p$-hyponormal なので、クラス $A$ で

ある。よって補題 1 から $(\beta)$ をもつ。よって $f_{n1}(z) \to 0$ となり、 $f_n(z) \to 0$ が得られる。 **[証明終]**

**[補題 5]** $T$ は $(p,k)$-quasihyponormal で、もし、$T|_{[\mathrm{ran}\ T^k]}$ が normal ならば $[\mathrm{ran}\ T^k]$ は $T$ を reduce する。

**[証明]** $\mathrm{ran}\ T^k$ が dense なら $T$ は $p$-hyponormal である。この場合は既に示されているから、not dense としてよい ([14])。補題 3 より

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad H = [\mathrm{ran}\ T^k] \oplus \ker T^{*k}$$

と分解しておく。ここで $[\mathrm{ran}\ T^k]$ への直交射影を $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、ハンセンの不等式 [5] から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (T_1^*T_1)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (QT^*TQ)^p \geq Q(T^*T)^pQ \geq Q(TT^*)^pQ \\ &\geq Q(TQT^*)^pQ = \begin{pmatrix} (T_1T_1^*)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $T_1 = T|_{[\mathrm{ran}\ T^k]}$ は normal であるから

$$(TT^*)^p = \begin{pmatrix} (T_1^*T_1)^p & A \\ A^* & B \end{pmatrix}$$

と書くことができる。さて、$(TT^*)^{p/2} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix}$ と表すと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (T_1^*T_1)^{p/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (Q(TT^*)^pQ)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq Q(TT^*)^{\frac{p}{2}}Q \\ &= \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\geq Q(TQT^*)^{\frac{p}{2}}Q \\ &= \begin{pmatrix} (T_1^*T_1)^{\frac{p}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。よって

$$X = (T_1^*T_1)^{\frac{p}{2}}$$

である。一方、

$$(TT^*)^p = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} X^2 + YY^* & XY + YZ \\ Y^*X + ZY^* & Y^*Y + Z^2 \end{pmatrix}$$

でもあるから、

$$(T_1^*T_1)^p = X^2 + YY^* = X^2$$

となる。よって $Y = 0$ となり、

$$(TT^*)^{\frac{p}{2}} = \begin{pmatrix} (T_1^*T_1)^{\frac{p}{2}} & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

である。すると

$$\begin{aligned} TT^* &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^* & 0 \\ T_2^* & T_3^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1T_1^* + T_2T_2^* & T_2T_3^* \\ T_3T_2^* & T_3T_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^*T_1 & 0 \\ 0 & Z^{2/p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、$T_2T_2^* = 0$、従って $T_2 = 0$ が得られる。 **[証明終]**

**[補題 6]** $T$ は $(p,k)$-quasihyponormal で、もし、$T|_{\mathcal{M}}$ が injective normal ならば $\mathcal{M}$ は $T$ を reduce する。

**[証明]** 補題 3 に従って $T$ を

$$T = \begin{pmatrix} S & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$$

と分解する。ここで $S = T|_{\mathcal{M}}$ は injective normal である。さて $T^k = \begin{pmatrix} S^k & * \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ で $\ker S = \ker S^* = \{0\}$ である。よって

$$\mathcal{M} = [\mathrm{ran}\ S] = [\mathrm{ran}\ S^k] \subset [\mathrm{ran}\ T^k]$$

である。ここで $Q$ を $\mathcal{M}$ への直交射影とすると、仮定より

$$Q\left((T^*T)^p - (TT^*)^p\right)Q \geq 0$$

である。よって、ハンセンの不等式 [5] から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (SS^*)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= Q(TQT^*)^pQ \leq Q(TT^*)^pQ \\ &\leq Q(T^*T)^pQ \leq (QT^*TQ)^p = \begin{pmatrix} (S^*S)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $S$ は normal であるから、

$$Q(TT^*)^p Q = (SS^*)^p \oplus 0$$

となる。さて、 $0 < q \leq p$ とする。すると

$$\begin{aligned}(SS^*)^q \oplus 0 &= (Q(TT^*)^p Q)^{q/p} \\ &\geq Q(TT^*)^q Q \geq Q(TQT^*)^q Q = (SS^*)^q \oplus 0\end{aligned}$$

となる。ここで

$$Q(TT^*)^q Q = (SS^*)^q \oplus 0$$

だったから

$$(TT^*)^q = \begin{pmatrix} (SS^*)^q & X_q \\ X_q^* & Y_q \end{pmatrix}$$

と表せる。さて、$q = p/2$ とする。するとハンセンの不等式 [5] から

$$\begin{aligned}(SS^*)^p \oplus 0 = Q(TT^*)^p Q &= Q(TT^*)^q (TT^*)^q Q \\ &= \left((SS^*)^{2q} + X_q X_q^*\right) \oplus 0\end{aligned}$$

となるので $X_q = 0$ となる。従って

$$TT^* = \begin{pmatrix} SS^* & 0 \\ 0 & Y_q^{1/q} \end{pmatrix}$$

であるが、一方、

$$TT^* = \begin{pmatrix} S & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ A^* & B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SS^* + AA^* & AB^* \\ BA^* & BB^* \end{pmatrix}$$

だったから $A = 0$ である。 **[証明終]**

**[補題 7]** $T$ は $(p,k)$-quasihyponormal で $\sigma(T) = \{\lambda\}$ とする。このとき $\lambda \neq 0$ なら $T = \lambda$ であり、$\lambda = 0$ なら $T^k = 0$ である。

**[証明]** もし $T^k\mathcal{H}$ が dense なら $T$ は $p$-hyponormal である。従って、長、伊藤 [2] による $p$-hyponormal operator の Putnam 不等式より $T = \lambda$ である。

よって dense でないとしてよい。補題 3 から

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\mathrm{ran}\, T^k] \oplus \ker T^{*k}$$

と分解すると、$T_1$ は $p$-hyponormal, $T_3^k = 0$ で $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$ となる。この場合は $\lambda = 0$ になるので、再び $T_1 = 0$ となる。従って補題 5 より $T_2 = 0$ であるから

$$T^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_3^k \end{pmatrix} = 0$$

が得られる。 **[証明終]**

$(p,k)$-qusihyponormal 作用素の quasinilpotent part は次の定理で与えられる。

**[定理 8]** $T$ は $(p,k)$-qusihyponormal 作用素とする。このとき

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \begin{cases} \ker(T-\lambda) & \text{if } \lambda \neq 0, \\ \ker T^k & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

である。さらに、もし $\lambda \neq 0$ なら $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)^*$ である。

**[証明]** 補題 4 から $T$ は $(\beta)$ をもつので [10] Proposition 1.2.19 から $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \mathcal{X}_T(\{\lambda\})$ となり、$\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ は closed で $\sigma(T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}) \subset \{\lambda\}$ となる。$S = T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}$ とおくと補題 3 より $S$ は $(p,k)$-quasihyponormal である。

もし、$\sigma(S) = \sigma(T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}) = \emptyset$ なら、$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \{0\}$ であるから $\ker(T-\lambda) = \{0\}$ となる。

もし、$\sigma(S) = \{\lambda\}$ で $\lambda \neq 0$ なら、補題 7 から $S = \lambda$ となるので、$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(S-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)$ である。よって $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)$ が得られる。

もし、$\sigma(S) = \{0\}$ なら補題 6 より $S = \lambda^k$ で、$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker S^k \subset \ker T^k$ となる。よって $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker T^k$ が得られる。

更に、$\lambda \neq 0$ とする。この場合は $S = \lambda$ であるから、$S$ は normal で invertible になる。従って補題より $\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ は $T$ を reduce する。よって $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)^*$ が得られる。 **[証明終]**

**[注意]** この場合も、もし $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ が孤立点なら

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^*$$

である。しかし $\lambda = 0$ なら $\ker(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)^*$ は成立しない。([14])

**[系 9]** $T$ は algebraically $(p,k)$-qusihyponormal, つまり、定数でない多項式 $f(z)$ で $f(T)$ が $(p,k)$-qusihyponormal となるものが存在するとする。このとき、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda)^{nk} \quad (\text{ただし } n = \deg f)$$

が成り立つ。

**[証明]** 補題 4 より $f(T)$ が $(\beta)$ をもつので [10] Theorem 3.3.9 より $T$ も $(\beta)$ をもつ。よって $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \mathcal{X}_T(\{\lambda\})$ となり $\mathcal{H}_0(T-\lambda)$ は closed である。さて $S = T|_{\mathcal{H}_0(T-\lambda)}$ とおくと補題 3 より $S$ は $(p,k)$-quasihyponormal で $\sigma(S) \subset \{\lambda\}$ となる。ここで

$$f(z) - f(\lambda) = a(z-\lambda)^m \Pi_{j=1}^{n-m}(z-\lambda_j)$$

と分解する。ただし $1 \leq m \leq n, \lambda \neq \lambda_j$ とする。$x \in \mathcal{H}_0(T-\lambda)$ とすると定理8から

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{H}_0(S-\lambda) &= \mathcal{X}_S(\{\lambda\}) = \mathcal{X}_{f(S)}(\{f(\lambda)\}) \\ &= \begin{cases} \ker(f(S)-f(\lambda)) & \text{if } f(\lambda) \neq 0 \\ \ker f(S)^k & \text{if } f(\lambda) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。従って

$$0 = (f(S)-f(\lambda))^k x = a\Pi_{j=1}^{n-m}(S-\lambda_j)^k (S-\lambda)^{mk} x$$

である。$S-\lambda_j$ は可逆であるから $(S-\lambda)^{nk}x = 0$ が得られる。 **[証明終]**

最近、 I.H. Jeon, I.H. Kim [7] は $T^*|T|^2T \leq T^*|T^2|T$ を満たす作用素を考えてその Riesz idempotent を調べた。ここでは、更に一般化して quasiclass $(A,k)$、つまり、

$$T^{*k}(|T^2| - |T|^2)T^k \geq 0$$

を満たす作用素の quasinilpotent part を考える。証明は [15] に譲るが、やはり定理 9 と同様の結果が得られる。

**[定理 10]** $T$ は quasiclass $(A,k)$ 作用素とする。このとき

$$\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \begin{cases} \ker(T-\lambda) & \text{if } \lambda \neq 0, \\ \ker T^{k+1} & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

である。さらに、もし $\lambda \neq 0$ なら $\mathcal{H}_0(T-\lambda) = \ker(T-\lambda) \subset \ker(T-\lambda)^*$ である。

# 参考文献


[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory with applications to multipliers*, Kluwer Academic Publishers (2004), Dordrecht, Boston, London.

[2] M. Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2435–2440.

[3] M. Chō and T. Yamazaki, *An operator transform from class A to the class of hyponormal operators and its application,* Integr. Equ. Oper. Theory, **53** (2005), 497–508.

[4] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes,* Scientiae Mathematicae, **1** (1998), 389–403.

[5] F. Hansen, *An operator inequality,* Math. Ann., **246**(1980), 249–250.

[6] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann., **123** (1951), 415–438.

[7] In Ho Jeon and In Hyoun Kim, *On operators satisfying* $T^*|T^2|T \geq T^*|T|^2T$, Linear Algebra and its Appli. to appear.

[8] In Hyoun Kim, *On* $(p,k)$*-quasihyponormal operators,* Math. Inequal. and Appl., **7**(2004), 629–638.

[9] An-Hyun Kim and In Hyoun Kim, *Essential spectra of quasisimilar* $(p,k)$*-quasihyponormal operators,* preprint.

[10] K.B. Laursen and M.M. Neumann, *An introduction to local spectral theory,* Oxford Science Publications (London Math. Soc. Mono. new series 20), (2000).

[11] K. Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen,* Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[12] S.M. Patel, M. Chō, K. Tanahashi, A. Uchiyama, *Putnam's inequality for class A operators and an operator transform by Chō and Yamazaki,* preprint.

[13] K. Tanahashi, S.M. Patel, A. Uchiyama, *On extensions of some Fuglede-Putnam type theorems involving* $(p,k)$*-quasihyponormal, spectral, and dominant operators,* preprint.

[14] K. Tanahashi, A. Uchiyama and M. Chō, *Isolated point of spectrum of* $(p,k)$*-quasihyponormal operators*, Linear Algebra and its Applications, **382**(2004), 221–229.

[15] K. Tanahashi, A. Uchiyama, I.H. Jeon and I.H. Kim, *Quasinilpotent part of class A or* $(p,k)$*-quasihyponormal operators*, preprint.

[16] A. Uchiyama, *Weyl's theorem for class A operators,* Math. Inequalities and Appl., **4**(2001), 143–150.

[17] A. Uchiyama, *On the isolated points of spectrum of paranormal operators,* Integr. Equ. Oper. Theory, **55**(2006), 145–151.

[18] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *On the Riesz idempotent of class $A$ operators,* Math. Inequalities and Applications, **5**(2002), 291–298.