数理解析研究所講究録
1535 巻 2007 年 25-30

解析関数からなる関数空間の等距離線形作用素について

山形大学名誉教授　岡安 隆照 (Takateru Okayasu)
Professor Emeritus, Yamagata University

1. 関数環の間の等距離線形写像

n 次元複素空間 C^n の空でないコンパクト部分集合 K 上で連続で, K の内部 K° で解析的な複素数値関数が作るバナッハ空間を $A(K)$ によって表す. これは関数の点毎の積を積として環をなす. 一般に, コンパクトハウスドルフ空間 X 上の複素数値連続関数の全体が作る環の閉部分環で, 恒等関数 1 をもち X の点を分離するもの (と代数同型であるもの) を関数環と呼ぶ. $A(K)$ は, C^n の空でない開集合 G 上の H^∞ 空間 $H^\infty(G)$ と並ぶ最も重要な関数環である. この稿では主として $A(K)$ の型の 2 つのバナッハ空間の間の等距離線形写像について論ずる.

K を複素平面上のコンパクト集合とするとき $A(K)$ の代数同型 ψ が次の形をもつことはよく知られている: K の内部 K° で解析的な K の位相同型 η が一意に存在して, 任意の $f \in A(K)$ に対して

$$\psi(f) = f \circ \eta, \quad f \in A(K)$$

が成り立つ. K が C^n の閉単位球 B_n であっても同様である (Rudin [8]).

ところで, コンパクトハウスドルフ空間 X の部分集合 Γ が X 上の関数環 A の境界, Silov 境界, Choquet 境界であるとは, それぞれ, 任意の $f \in A$ が Γ で最大絶対値を実現するときに, それが最小の閉境界であるときに, 点 $x \in X$ における点汎関数

$$\tau_A(x)(f) = f(x), \quad f \in A$$

が x における Dirac 測度 δ_x に限られるような x から成るときに, いう. 関数環 A は唯一の Silov 境界をもつ. それを Σ_A によって表す. A の Choquet 境界を Π_A によって表す.

関数環の等距離線形写像は, 一般に, 次の定理が述べるとおりの構造をもつ:

定理 1.1 (Nagasawa [4], Cf. Hoffman [2]). 関数環 A_1 から関数環 A_2 の上への等距離線形写像 η に対して, A_1 から A_2 の上への代数同型 ψ が一意に存在して,

$$\psi(f) = \phi(1)\psi(f), \quad f \in \ A_1$$

が成り立つ. このとき, $\phi(1)$ は A_2 で可逆であり, A_2 の Silov 境界 Σ_{A_2} の任意の y に対して $|\phi(1)| = 1$ が成り立つ.

よって, 関数環から関数環の上への等距離線形写像の研究は, 関数環から関数環の上への同型の研究に帰する. 特に, ϕ が $A(K)$ 上の等距離線形写像ならば ϕ は次の形をもつことがわかる:

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \eta), \quad f \in A(K).$$

ϕ が $A(\boldsymbol{B}_n)$ 上の等距離線形写像であっても同様である (Rudin [8]).

2. 関数空間から連続関数の空間への等距離線形写像

コンパクトハウスドルフ空間 X 上の複素数値連続関数の全体が作るバナッハ空間 $C(X)$ の部分空間 M に対してその境界, Silov 境界, Choquet 境界の概念を関数環の対応する概念と同様に定める. 記号も踏襲する: M の Silov 境界が一意に定まるときそれを Σ_M によって表し, M の Choquet 境界を Π_M によって表す. バナッハ空間 $C(X)$ の, 恒等関数 1 を含み, X の点を分離する部分空間を X 上の関数空間と呼ぶ. 関数空間の Silov 境界はその Choquet 境界の閉包である.

関数空間から連続関数のバナッハ空間への等距離線形写像は, 次の定理が述べるとおりの構造をもつ:

定理 2.1 (Holsztyński [3], Novinger [6]). X_1, X_2 をコンパクトハウスドルフ空間, M_1 を X_1 上の関数空間, ϕ を M_1 から $C(X_2)$ への等距離線形写像, M_2 を M_1 の ϕ による像とすれば, Π_{M_2} の閉包 $\bar{\Pi}_{M_2}$ から Σ_{M_1} の上への連続写像 η が一意に存在して

$$\phi(f)(y) = \phi(1)(y)f(\eta(y)), \quad y \in \bar{\Pi}_{M_2}, \ \ f \in M$$

が成り立つ. このとき,

$$|\phi(1)(y)| = 1, \quad y \in \bar{\Pi}_{M_2}$$

である. また, η は Π_{M_2} を Π_{M_1} の上に写す.

M_1, M_2 をそれぞれ $\boldsymbol{C}^m$, $\boldsymbol{C}^n$ の空でないコンパクト部分集合 K_1, K_2 上の関数空間, η を K_2 から $\boldsymbol{C}^m$ への写像とする. K_2 の η による像が K_1 に含まれ, 任意の $f \in M_2$ に対して $f \circ \eta$ が M_1 に属するとき, η は M_1 の関数に右から作用して M_2 の関数を生み出すという (ことにする). また, K_1 上の座標関数 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ が M_1 に属するとき, M_1 から M_2 への写像 ψ に対して

$$z_j \circ \tilde{\psi} = \psi(z_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

とおく.

定理 2.2. M_1, M_2 を, それぞれ, $\boldsymbol{C}^m$, $\boldsymbol{C}^n$ の空でないコンパクト部分集合 K_1, K_2 上の関数空間で, M_1 は K_1 上の座標関数を含むとする. また, ψ を M_1 から M_2 の上への単位を保存する等距離線形写像とする. このとき, $\tilde{\psi}$ が M_1 の関数に右から作用して M_2 の関数を生み出すならば,

$$\psi(f) = f \circ \tilde{\psi}, \quad f \in M_1$$

が成り立つ. 更に, $\tilde{\psi}$ は一対一で, Σ_{M_2} を Σ_{M_1} に写し, Π_{M_2} を Π_{M_1} に写す. 加えて, もしも K_2 上の座標関数が M_2 に属し, $(\psi^{-1})^{\sim}$ が M_2 の関数に右から作用して M_1 の関数を生み出すならば, $\tilde{\psi}(K_2) = K_1$, $\tilde{\psi}^{-1} = (\psi^{-1})^{\sim}$ が成り立つ.

証明 (Cf. [5]). 任意の $\zeta \in \Pi_{M_1}$ に対して

$$\tau_{M_2}(\zeta) \circ \psi = \tau_{M_1}(\xi)$$

を満たす $\xi \in \Pi_{M_1}$ が一意に存在し ([6]), ζ が Π_{M_2} を走るとき Π_{M_1} 全体を走る. $z_j(\tilde{\psi}(\zeta)) = \psi(z_j)(\zeta) = z_j(\xi)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$ だから $\tilde{\psi}(\zeta) = \xi$ が成り立つ. よって, 任意の $f \in M_1$ に対して

$$\psi(f)(\zeta) = f(\xi) = (f \circ \tilde{\psi})(\zeta), \quad \zeta \in \Pi_{M_2}$$

が成り立つ. よって ([1], [7]), 任意の $f \in M_1$ に対して

$$\psi(f) = f \circ \tilde{\psi}$$

が成り立つことがわかる.

残りの部分の証明は易しい. QED

3. K_1, K_2 が1次元の場合

定理2.2から直ぐに次の定理が得られる:

定理 3.1. K_1, K_2 を複素平面上の空でないコンパクト集合とし, ψ を $A(K_1)$ から $A(K_2)$ の上への代数同型とする. このとき

$$\psi(f) = f \circ \tilde{\psi}, \quad f \in A_1$$

が成り立つ. 更に $\tilde{\psi}$ は一対一で, K_2 を K_1 の上に, Σ_{A_2} を Σ_{A_1} の上に, Π_{A_2} を Π_{A_1} の上に写す. また $\tilde{\psi}^{-1} = (\psi^{-1})^{\sim}$ が成り立つ.

証明. もしも $\zeta \in K_2$ かつ $\tilde{\psi}(\zeta) \notin K_1$ ならば, $(z - \tilde{\psi}(\zeta))f = 1$ を満たす $f \in A(K_1)$ が存在する. よって $0 = (\psi(z) - \tilde{\psi}(\zeta))(\zeta)\psi(f)(\zeta) = 1$. これは不都合. よって $\tilde{\psi}(K_2) \subset K_1$ である. したがって定理2.2によって

$$\psi(f) = f \circ \tilde{\psi}, \quad f \in A_1$$

が成り立つ. このとき $\tilde{\psi}$ は一対一で, Σ_{A_2} を Σ_{A_1} 上に, Π_{A_2} を Π_{A_1} の上に写す. いうまでもなく $(\psi^{-1})^{\sim}(K_1) \subset K_2$ である. したがって $\tilde{\psi}$ は K_2 を K_1 の上に写し, $\tilde{\psi}^{-1} = (\psi^{-1})^{\sim}$ が成り立つ. QED

更に次の定理が得られる:

定理 3.2. K_1, K_2 を複素平面上の空でないコンパクト集合とし, ϕ を $A(K_1)$ から $A(K_2)$ の上への等距離線形写像とすると, K_2 の内部 K_2° で解析的な K_2 から K_1 の上への位相同型 η が一意に存在して,

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \eta), \quad f \in A_1$$

が成り立つ. このとき, η は Σ_{A_2} を Σ_{A_1} の上に, Π_{A_2} を Π_{A_1} の上に写す.

証明. 実際, $\eta = \dfrac{\phi(z)}{\phi(1)}$ である. QED

4. K_1, K_2 が多次元の場合

前節で述べた方法はコンパクト集合, K_1, かつ/ または, K_2, が多重であるとき, すなわち, 複素平面上のコンパクト集合 $K^{(k)}$ によって $\prod_k K^{(k)}$ と書き得るとき, にも, 通用する. また, 凸であってもよい. 更に, 有理凸であってもよい. ここに, C^n のコンパクト部分集合 K が有理凸であるとは, それが, $\zeta \in C^n$ を定義域に含む任意の有理関数 f に対して

$$|f(\zeta)| \leq \sup_{\xi \in K} |f(\xi)|$$

を満たすすべての ζ を, 含むときにいう.

定理 4.1. K_1, K_2 をそれぞれ, C^m, C^n の空でないコンパクト集合とし, ψ を $A(K_1)$ から $A(K_2)$ の上への代数同型とする. このとき K_1 が多重, または有理凸, ならば

$$\psi(f) = f \circ \tilde{\psi}, \quad f \in A_1$$

が成り立つ. また $\tilde{\psi}$ は一対一で, Σ_{A_2} を Σ_{A_1} の上に, Π_{A_2} を Π_{A_1} の上に写す. 更に K_2 が多重, または有理凸, ならば, $\tilde{\psi}$ は K_2 を K_1 の上に写し, $\tilde{\psi}^{-1} = (\psi^{-1})^{\sim}$ が成り立つ.

定理 4.2. K_1, K_2 をそれぞれ, C^m, C^n の空でないコンパクト集合とし, ϕ を $A(K_1)$ から $A(K_2)$ の上への等長線形写像とする. このとき K_1 が多重, または有理凸, ならば

$$z_j \circ \eta \in A(K_2) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

を満たす K_2 から K_1 への位相同型 η が一意に存在して,

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \eta), \quad f \in A_1$$

が成り立つ. また, η は Σ_{A_2} を Σ_{A_1} の上に, Π_{A_2} を Π_{A_1} の上に写す. 更に, K_2 が多重, または有理凸, ならば, η は K_2 を K_1 の上に写し, K_2 上の座標関数 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ に対して

$$w_k \circ \eta^{-1} \in A(K_1) \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

が成り立つ.

証明は省く.

参考文献

1. G. Choquet, *Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes*, Semin. Bourbaki (Dec. 1956) 139.

2. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall Inc., 1962.

3. W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function*, Studia Math. **26**(1966), 133-136.

4. M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with application to rings of analytic functions*, Kôdai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 182-188.

5. 岡安 隆照, ある種の関数空間の等距離写像の構造, 数理解析研講究録 **1520** (2006), 44-47.

6. W. P. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math. **53** (1975), 273-276.

7. R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand Math. Studies **7**, 1966; 2nd ed., Lecture Notes in Math. **1757**, Springer, 2001.

8. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.