数理解析研究所講究録
1536 巻 2007 年 109-121

Structure of invariant dynamical systems embedded in the N-vortex motion on sphere with pole vortices

坂上 貴之 (Takashi Sakajo), 北海道大学 (Hokkaido University),
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

1 イントロダクション

本報告では，球面上にある渦点系の運動を考える．渦点の従う運動方程式は非圧縮性流体の Euler 方程式において，渦度が δ 関数的に存在していると仮定した時に得られ，ハミルトン形式で書ける常微分方程式系でもある．また，渦点系は Euler 方程式の厳密解を与えているだけでなく，数学的な扱いも比較的簡単であるため，渦構造に着目した現実の流体運動の記述などにもよく用いられる近似モデルである．特に我々の考えている球面上の渦点系は地球流体との関係でも用いられている．

今，地球の回転の効果として球面の北極と南極に渦点（極渦という）を固定し，それぞれの強さを Γ_1 と Γ_2 と仮定する．この時，同じ強さ $\Gamma^{(N)}$ を持つ N 個の渦点が球面極座標表示で位置 (Θ_m, Ψ_m) にある時，それらの従う方程式は次のようになる．

$$\dot{\Theta}_m = -\frac{\Gamma^{(N)}}{4\pi}\sum_{j\neq m}^{N}\frac{\sin\Theta_j\sin(\Psi_m-\Psi_j)}{1-\cos\Theta_m\cos\Theta_j-\sin\Theta_m\sin\Theta_j\cos(\Psi_m-\Psi_j)}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_m &= -\frac{\Gamma^{(N)}}{4\pi\sin\Theta_m}\sum_{j\neq m}^{N}\frac{\cos\Theta_m\sin\Theta_j\cos(\Psi_m-\Psi_j)-\sin\Theta_m\cos\Theta_j}{1-\cos\Theta_m\cos\Theta_j-\sin\Theta_m\sin\Theta_j\cos(\Psi_m-\Psi_j)} \\ &\quad +\frac{\Gamma_1}{4\pi}\frac{1}{1-\cos\Theta_m}-\frac{\Gamma_2}{4\pi}\frac{1}{1+\cos\Theta_m}, \qquad m=1,2,\cdots,N.\end{aligned} \tag{2}$$

方程式 (1) と (2) の解は時間大域的に存在することが知られている [5] ので，これらの方程式の右辺をそれぞれ F_m, G_m と表すことにすると，渦点系の運動は $2N$ 次元の相空間 $\mathbb{P}_N \equiv [0,\pi]^N \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^N$ における力学系を定める．

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{F}(\vec{x}).$$

ただし，$\mathbb{F}:\mathbb{P}_N \to \mathbb{R}^{2N}$ は点 $\vec{x}\in\mathbb{P}_N$ に対する写像を定めている．

$$\mathbb{F}:(\Theta_1,\cdots,\Theta_N,\Psi_1,\cdots,\Psi_N)\mapsto(F_1,\cdots,F_N,G_1,\cdots,G_N).$$

また，この方程式はハミルトン系であり，そのハミルトニアンは以下で与えられている [11].

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\left(\Gamma^{(N)}\right)^2}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\sum_{m<j}^{N}\log(1-\cos\gamma_{mj}) \\ &\quad -\frac{\Gamma_1\Gamma^{(N)}}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\log(1-\cos\Theta_m)-\frac{\Gamma_2\Gamma^{(N)}}{4\pi}\sum_{m=1}^{N}\log(1+\cos\Theta_m). \end{aligned} \tag{3}$$

なお，このハミルトン系には z 軸周りの回転に対する系の不変性に対応した不変量 $I = \sum_{m=1}^{N}\cos\Theta_m$ が存在しているので，二体渦点の問題は完全可積分である.

このような球面上の N 渦点系は非線形のハミルトン力学系として様々な研究が行われている.(そのサーベイについては [11] を参照）たとえば，極渦のない状況では三体問題は完全可積分であり，その運動の詳細な解析が論文 [5, 6, 14] で行われている．また，四体問題もある条件下では完全可積分であり，その運動の記述は [18] で最近与えられている．その一方で，N 渦点がその相対的な位置を変えない相対定常状態の分類や，その安定性の研究なども活発である [9, 10, 12]．中でも今回扱う N 個の渦点が同一緯度に等間隔で並んだ配置（以後 N 渦点環とよぶ）の研究は，そのようなコヒーレントな渦構造が球面上の流体運動において顕著に見られる [4, 13, 15] ことから，多くの研究が行われている [1, 2, 3, 7, 16, 17]．さらに，最近ではハミルトニアンの群作用不変性に着目し，系に現れる周期解の構造を調べる研究なども進んでいる [8, 21].

さて，N 渦点方程式は球面上の Euler 方程式を渦点法によって離散化した時にも得られる．したがって，この Euler 方程式の近似解として渦点系を見る場合，その近似の精度を上げるためには，N の数を非常に大きくとらねばならない．しかし，そのような系の運動を数学的に記述することは一般に困難であるため，通常は系に特殊な対称性を仮定して，考える次元を落として運動を考えることが多い．実際，論文 [16] と [17] では，ある対称性を仮定して N 渦点系を二次元系に縮約し，その数学的研究から N 渦点環の安定多様体と不安定多様体の大域的な遷移を明らかにし，不安定化した N 渦点環の運動の一部を記述することに成功している.

そこで，本論文では N 渦点系に埋め込まれた低次元の縮約系を系統的に求める方法について考察する．第二章では論文 [16, 17] で得られている N 点渦点環の線形安定性解析の結果を概括し，以後の縮約系の記述の基礎とする．第三章と第四章ではそれぞれ z 軸まわりの離散 p シフト変換と，北極と南極を１８０度入れ替える極反転変換により縮約系を得る方法について解説し，それらを応用して $N=6$ から $N=12$ までに含まれる縮約系のリストを与える．最後の章では今後の研究の方向について議論する．なお，本論文の内容は論文 [19, 20] で示された結果のみをまとめたものであるが，証明についてはこれらの原論文を参考にしていただきたい.

2 線形安定性解析からの準備

ここでは，論文 [16, 17] で行われた N 渦点環の線形安定性解析の結果を簡単にまとめる．N 渦点環は以下で定義される.

$$\Theta_m=\theta_0, \qquad \Psi_m=\frac{2\pi m}{N}, \qquad m=1,2,\cdots,N. \tag{4}$$

これは，方程式 (1) と (2) の相対定常解であり一定速度 $V_0(N)$ で経度方向に回転している．

$$V_0(N) = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{4\pi \sin^2\theta_0} + \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi)\cos\theta_0}{4\pi\sin^2\theta_0} - \frac{1}{2N}\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}.$$

この相対定常解に以下のような微少摂動を加える．

$$\Theta_m(t) = \theta_0 + \epsilon\theta_m(t), \qquad \Psi_m(t) = \frac{2\pi m}{N} + V_0(N)t + \epsilon\varphi_m(t), \qquad |\epsilon| \ll 1. \tag{5}$$

この時，摂動 θ_m と φ_m の線形化方程式は以下のようになる．

$$\dot{\theta}_m = \frac{\Gamma^{(N)}}{4\pi\sin\theta_0}\sum_{j\neq m}^{N}\frac{\varphi_m - \varphi_j}{1-\cos\frac{2\pi}{N}(m-j)}, \quad \dot{\varphi}_m = \frac{\Gamma^{(N)}}{4\pi\sin^3\theta_0}\sum_{j\neq m}^{N}\frac{\theta_m - \theta_j}{1-\cos\frac{2\pi}{N}(m-j)} + B_N\theta_m. \tag{6}$$

パラメータ B_N は

$$B_N = -\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma^{(N)}N - \Gamma^{(N)})(1+\cos^2\theta_0)}{4\pi\sin^3\theta_0} - \frac{(\Gamma_1-\Gamma_2)\cos\theta_0}{2\pi\sin^3\theta_0} \tag{7}$$

で与えられている．この線形化方程式 (6) の固有値は以下のように与えられる．

定理 1. $m = 0, 1, \cdots, N-1$ に対して，線形化方程式の固有値は $\lambda_m^{\pm} \pm \sqrt{\xi_m\eta_m}$ で与えられる．ただし，

$$\xi_m = \frac{m(N-m)}{4\pi\sin\theta_0}, \qquad \eta_m = \frac{m(N-m)}{4\pi\sin^3\theta_0} + B_N. \tag{8}$$

関係式 (8) から $\lambda_m^{\pm} = \lambda_{N-m}^{\pm}$ がすぐにわかるので，渦点の数が偶数すなわち $N = 2M$ であれば，二重 0 固有値 $\lambda_0^{\pm} = 0$，二重固有値 $\lambda_m^{\pm}$ $(m = 1, \cdots, M-1)$ と単純固有値 $\lambda_M^{\pm}$ が存在し，一方で N が奇数 $N = 2M+1$ の時，二重 0 固有値 $\lambda_0^{\pm}$ と二重固有値 $\lambda_m^{\pm}$ $(m = 1, \cdots, M)$ が存在している．また，$i < j$ に対して，$(\lambda_i^{\pm})^2 < (\lambda_j^{\pm})^2$ なる大小関係が成立しているので，N 渦点の安定性は，最大固有値 $\lambda_M^{\pm}$ のそれと一致していることに注意する．次に，この固有値に対する固有ベクトルは具体的に以下のようになる．

定理 2. $m = 1, \cdots, M = [N/2]$ （$[x]$ はガウス記号）に対して，$\vec{\psi}_m^{\pm}$ と $\vec{\phi}_m^{\pm}$ を次で定義する．

$$\begin{aligned}\vec{\psi}_m^{\pm} &= {}^t\Big(\sqrt{\xi_m}, \sqrt{\xi_m}\cos\frac{2\pi}{N}m, \cdots, \sqrt{\xi_m}\cos\frac{2\pi}{N}(N-1)m, \\ &\qquad \pm\sqrt{\eta_m}, \pm\sqrt{\eta_m}\cos\frac{2\pi}{N}m, \cdots, \pm\sqrt{\eta_m}\cos\frac{2\pi}{N}(N-1)m\Big),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_m^{\pm} &= {}^t\Big(0, \sqrt{\xi_m}\sin\frac{2\pi}{N}m, \cdots, \sqrt{\xi_m}\sin\frac{2\pi}{N}(N-1)m, \\ &\qquad 0, \pm\sqrt{\eta_m}\sin\frac{2\pi}{N}m, \cdots, \pm\sqrt{\eta_m}\sin\frac{2\pi}{N}(N-1)m\Big).\end{aligned} \tag{10}$$

この時，これらのベクトルは固有値 $\lambda_m^{\pm}$ に対する固有ベクトルである．なお，$\lambda_M^{\pm}$ に対応する固有ベクトルは，その重複度に応じて $N = 2M$ の時は $\vec{\psi}_M^{\pm}$ のみ，$N = 2M+1$ の時は $\vec{\phi}_M^{\pm}$ と $\vec{\psi}_M^{\pm}$ である．さらに，これらのベクトルはすべて線形独立である．

以下で我々はN渦点系を定める$2N$次元の実相空間$\mathbb{P}_N$の中に埋め込まれた低次元縮約力学系の特徴付けを与えるのに，これらの固有ベクトルを用いたい．一方でη_mはB_Nの値によっては負となることがあり，その時は固有ベクトルが複素ベクトルなので，これらは適切ではないように見える．しかし，この二つのベクトルから線形独立な実ベクトルを$(\vec{\phi}_m^+ + \vec{\phi}_m^-)/2$や$(\vec{\phi}_m^+ - \vec{\phi}_m^-)/2\mathrm{i}$によって再構成して，それを改めて基底として用いることが可能なので，その点は問題はないことに注意する．また，上の定理で与えられている線形独立な固有ベクトルの数は$2N-2$であり，$2N$次元の相空間を表現するためには，さらに二つの独立なベクトルが必要になる．これらを与えているのが以下の補題である．

補題 3. ベクトル$\vec{\zeta}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2N}}\,{}^t(1,1,\cdots,1,\pm1,\pm1,\cdots,\pm1)$は$(\vec{\psi}_m^{\pm},\vec{\zeta}^{\pm}) = 0$, $(\vec{\phi}_m^{\pm},\vec{\zeta}^{\pm}) = 0$を満たす．

3 シフト変換による縮約

まず，$(\Theta_1,\cdots,\Theta_N,\Psi_1,\cdots,\Psi_N) \in \mathbb{P}_N$上の経度方向の角度$2\pi p/N$の回転$r_p : \mathbb{P}_N \to \mathbb{P}_N$と渦点のラベルの付け替え変換$s_p : \mathbb{P}_N \to \mathbb{P}_N$を以下のように定義する．

$$r_p : \Theta'_m = \Theta_m, \qquad \Psi'_m = \Psi_m + \frac{2\pi}{N}p \mod 2\pi, \qquad \text{for } m = 1,\ldots,N,$$

$$\begin{aligned} s_p:\ & \Theta'_m = \Theta_{N-p+m}, & \Psi'_m = \Psi_{N-p+m}, & \quad \text{for } m = 1,\ldots,p, \\ & \Theta'_m = \Theta_{m-p}, & \Psi'_m = \Psi_{m-p}, & \quad \text{for } m = p+1,\ldots,N. \end{aligned}$$

これに対してpシフト変換σ_pを$\sigma_p = r_p \circ s_p$で定義する．具体的に表示すると，

$$\begin{aligned} \sigma_p:\ & \Theta'_m = \Theta_{N-p+m}, & \Psi'_m = \Psi_{N-p+m} + \tfrac{2\pi p}{N}, & \quad \text{for } m = 1,\ldots,p, \\ & \Theta'_m = \Theta_{m-p}, & \Psi'_m = \Psi_{m-p} + \tfrac{2\pi p}{N}, & \quad \text{for } m = p+1,\ldots,N. \end{aligned} \tag{11}$$

のようになる．一方，ベクトル場に対するpシフト写像$\Sigma_p : (F_m, G_m) \mapsto (F'_m, G'_m)$を次で与える．

$$\begin{aligned} \Sigma_p:\ & F'_m = F_{N-p+m}, & G'_m = G_{N-p+m}, & \quad \text{for } m = 1,\ldots,p, \\ & F'_m = F_{m-p}, & G'_m = G_{m-p}, & \quad \text{for } m = p+1,\ldots,N. \end{aligned} \tag{12}$$

この時，次の補題が成立する．

補題 4. 任意の点$\vec{x} \in \mathbb{P}_N$に対して，$\Sigma_p\mathbb{F}(\vec{x}) = \mathbb{F}(\sigma_p\vec{x})$.

次の命題は軌道のσ_p不変性が時間保存される関係であることを示している．

命題 5. $N = pq$, $p,q \in \mathbb{N}$とする．初期時刻において$\sigma_p\vec{x}(0) = \vec{x}(0)$ならば，方程式*(1)*と*(2)*の解はすべての時刻に対して$\sigma_p\vec{x}(t) = \vec{x}(t)$を満たす．

この命題で与えられているσ_p不変な軌道は以下の関係を満たしている；$k = 0,\ldots,q-1$かつ$m = 1,\ldots,p$に対して

$$\Theta_{kp+m}(t) = \Theta_m(t), \qquad \Psi_{kp+m}(t) = \Psi_m(t) + \frac{2\pi}{q}k. \tag{13}$$

この関係 (13) は $(\Theta_{kp+m}, \Psi_{kp+m})(k=1,\ldots,q-1)$ にある渦点の運動が渦点 (Θ_m, Ψ_m) のそれによって自動的に決定されることを意味している．言い換えれば N 個の渦点を挙動の同じ p 個の渦点からなる q 個のクラスタに分割できることになる．したがって，このような σ_p 不変な力学系は $2p$ 次元の縮約力学系を定義しているものと期待できる．しかしながら，上の命題は単に σ_p 不変性が初期値において満たされていれば，それが時間発展を通じて保持されることだけを主張しているだけなので，本当に $2p$ 次元の力学系が定義されるかはわからない．そこで，我々は第二章で与えられた線形安定性解析によって得られた固有ベクトルを用いてこの縮約力学系の相空間を実際に与えることにする．そのためには以下の補題が必要である．

補題 6. $N=pq$, $p,q\in\mathbb{N}$ とする．ベクトル $\vec{\psi}^{\pm}_{kq}$ と $\vec{\phi}^{\pm}_{kq}$ $(p\le kq\le M)$，および $\vec{\zeta}^{\pm}$ は s_p 不変である． さらに，この s_p 不変なベクトルの数は $2p$ である．

補題 6 から σ_p 不変な $2p$ 次元の $\mathbb{P}_N$ の線形部分空間が以下のように与えられる．

命題 7. $N=pq$, $p,q\in\mathbb{N}$ とする．この時，σ_p 不変な $\mathbb{P}_N$ の線形部分空間（$\mathbb{P}_N(\sigma_p)$ と書く）は

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\sum_k\left(a_k^+\vec{\psi}^+_{kq}+a_k^-\vec{\psi}^-_{kq}+b_k^+\vec{\phi}^+_{kq}+b_k^-\vec{\phi}^-_{kq}\right)+c^+\vec{\zeta}^++c^-\vec{\zeta}^-$$

で与えられる．ただし，$\vec{x}_0=\left(\theta_0,\theta_0,\cdots,\theta_0,0,\frac{2\pi}{N},\cdots,\frac{2\pi}{N}(N-1)\right)$ であり，$a_k^{\pm}$, $b_k^{\pm}$, $c^{\pm}$ は実係数である．

この σ_p 不変な線形部分空間の中心 x_0 は任意の位置 θ_0 にある N 渦点環配置に対して定義できることに注意する．論文 [16] では，直感的な考察に基づいて σ_2 不変な四次元縮約力学系を扱っているが，これがどんな θ_0 に対しても考えることができた理由はこのことによる．命題 7 より $\mathbb{P}_N(\sigma_p)$ に対する包含関係も明らかになる．

系 8. 自然数 p と q がともに N の約数であり，さらに p が q を割り切るとする．このとき，σ_p 不変な部分空間は σ_q 不変空間に含まれる．すなわち $\mathbb{P}_N(\sigma_p)\subset\mathbb{P}_N(\sigma_q)$ が成立する．

以上から，σ_p 不変な縮約力学系のハミルトニアンが得られる．

定理 9. $N=pq$, $p,q\in\mathbb{N}$ とする．σ_p 不変な縮約力学系は強さ $\Gamma^{(p)}$ を持つ p 渦点によって定義された以下のような平均化ハミルトニアンを持つハミルトン力学系である．

$$\begin{aligned}H &= -\frac{\left(\Gamma^{(p)}\right)^2}{4\pi}\sum_{m=1}^{p}\sum_{m<j}^{p}\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1}h\left(\Theta_m,\Theta_j,\Psi_m-\Psi_j-\frac{2\pi}{q}l\right)\\ &\quad-\frac{\Gamma_1'\Gamma^{(p)}}{4\pi}\sum_{m=1}^{p}\log(1-\cos\Theta_m)-\frac{\Gamma_2'\Gamma^{(p)}}{4\pi}\sum_{m=1}^{p}\log(1+\cos\Theta_m).\end{aligned}\tag{14}$$

ただし，$\Gamma^{(p)}=\Gamma^{(N)}q$ であり，Γ_1' と Γ_2' はそれぞれ以下のような修正された極渦である．

$$\Gamma_1'=\Gamma_1+\frac{1}{2}\Gamma^{(p)}\left(1-\frac{1}{q}\right),\qquad\Gamma_2'=\Gamma_2+\frac{1}{2}\Gamma^{(p)}\left(1-\frac{1}{q}\right).\tag{15}$$

このようなσ_p不変性から得られる縮約力学系でもっとも簡単なものは，Nが偶数の場合の四次元力学系$\mathbb{P}_N(\sigma_2)$である．この系は不変量Iが存在するために完全可積分系であり，解の挙動は上の定理で与えられた縮約ハミルトニアンの等高線をプロットすることによって理解できる．また，この不変力学系を張る固有ベクトルは$\vec{\psi}_M^{\pm}$と$\zeta^{\pm}$であり，実際にIで系を二次元に落とすと$\vec{\psi}_M^{\pm}$の張る二次元面内で運動が定義されるが，ここで，$\vec{\psi}_M^{\pm}$がN渦点環の安定性を定める単純固有値に対応する固有ベクトルであることを思い出すと，この縮約系はN渦点環が不安定化した時に現れる安定多様体および不安定多様体を含んでおり，その挙動の様子はこの縮約系の研究によってある程度わかる．この縮約系の詳細な研究は論文[16]で行われているが，ここでは$N=6$と$N=10$の時の$\mathbb{P}_6(\sigma_2)$および$\mathbb{P}_{10}(\sigma_2)$の縮約ハミルトニアンの等高線を図1にプロットしておく．N渦点環の安定多様体と不安定多様体の作るセパラトリックスの大域的構造が極渦の強さの変化に応じて遷移していく様子がわかる．なお，この二次元系の軌道のほとんどは周期軌道であるが，これは論文[21]で求められた周期軌道の一部に一致している．

4 極反転変換による縮約

ここでは球面の北極と南極を入れ替えるような極反転変換を導入し，その変換に対して不変な縮約力学系を構成する．まず，$N=2M+1$が奇数の場合について1番目の渦系の位置ベクトル(Θ_1,Ψ_1)を回転の軸とした極反転変換$\pi_o:\mathbb{P}_N\to\mathbb{P}_N$を以下の三段階で定義する．

(1) すべての渦点を経度方向に$-\Psi_1$だけ回転させ，(Θ_1,Ψ_1)にある渦点1がxz平面に来るように移動させる: $(\Theta_1,\cdots,\Theta_N,\Psi_1,\cdots,\Psi_N)\mapsto(\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_N,0,\cdots,\Psi_N-\Psi_1)$.

(2) それからx軸を中心に系をπだけ回転させる．(この変換で南極は北極に北極は南極になる)

$$\begin{aligned}&(\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_N,0,\Psi_2-\Psi_1,\cdots,\Psi_N-\Psi_1)\\ &\quad\mapsto(\pi-\Theta_1,\pi-\Theta_N,\cdots,\pi-\Theta_2,0,\Psi_1-\Psi_N,\cdots,\Psi_1-\Psi_2).\end{aligned}$$

(3) 最後に系を緯度方向にΨ_1だけ移動させる．

$$\begin{aligned}&(\pi-\Theta_1,\pi-\Theta_N,\cdots,\pi-\Theta_2,0,\Psi_1-\Psi_N,\cdots,\Psi_1-\Psi_2)\\ &\quad\mapsto(\pi-\Theta_1,\pi-\Theta_N,\cdots,\pi-\Theta_2,\Psi_1,2\Psi_1-\Psi_N,\cdots,2\Psi_1-\Psi_2).\end{aligned}$$

以上より，奇数個渦の極反転変換$\pi_o:(\Theta_m,\Psi_m)\to(\Theta'_m,\Psi'_m)$は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}&\Theta'_1=\pi-\Theta_1, && \Psi'_1=\Psi_1, &\\ &\Theta'_m=\pi-\Theta_{N-m+2}, && \Psi'_m=2\Psi_1-\Psi_{N-m+2}, &\text{for } m\neq 1.\end{aligned}\tag{16}$$

この変換に付随したベクトル場の変換$\Pi_o:(F_m,G_m)\to(F'_m,G'_m)$を以下のように与える．

$$\begin{aligned}&F'_1=-F_1, && G'_1=-G_1, &\\ &F'_m=-F_{N-m+2}, && G'_m=-G_{N-m+2}, &\text{for } m\neq 1.\end{aligned}$$

これらの変換に対して，もし北極と南極の渦が等しい場合には以下の事実が成立する．

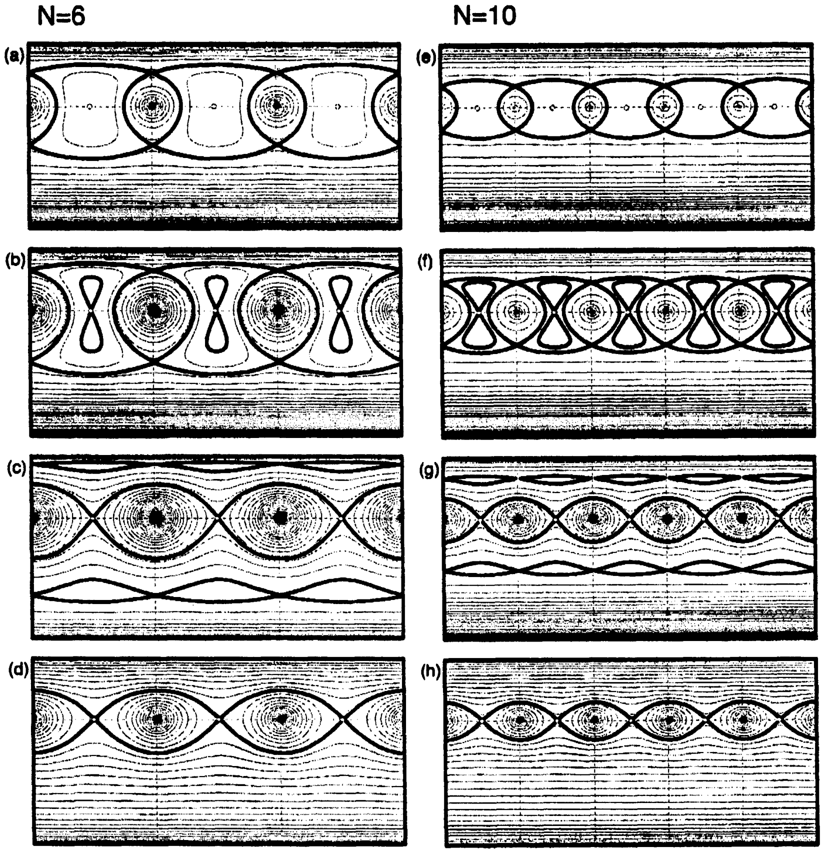

Figure 1: σ_2 に対する平均化ハミルトニアン (14) の等高線プロットと系のセパラトリックスの構造の遷移. 白丸は N 渦点環に対応する点を表している. (a-d) は $N=6$, (e-h) は $N=10$ の場合. なお両極の極渦の強さはともに同じとしており, それぞれの場合の極渦の強さは (a) 0.6π, (b) 0.2π, (c) -0.2π, (d) -0.6π, (e) 1.5π, (f) 0.6π, (g) 0.0, (h) -0.6π である.

補題 10. $N=2M+1$ とする．もし $\Gamma_1=\Gamma_2$ ならば，$\Pi_o\mathbb{F}(\vec{x})=\mathbb{F}(\pi_o\vec{x})$ が任意の $\vec{x}\in\mathbb{P}_N$ に対して成立する．

この補題から π_o 不変な初期値に対する軌道は，その不変性を維持し続けることがわかる．

補題 11. $N=2M+1$ かつ $\Gamma_1=\Gamma_2$ とする．もし初期時刻において $\pi_o\vec{x}(0)=\vec{x}(0)$ ならば，すべての時刻に対して $\pi_o\vec{x}(t)=\vec{x}(t)$ が成立する．

なお，π_o 不変な軌道は以下の関係式を満たすことに注意する．

$$\Theta_1=\frac{\pi}{2},\ \ \Psi_1=0,\ \ \Theta_m+\Theta_{N-m+2}=\pi,\ \ \Psi_m+\Psi_{N-m+2}=0,\ \ \text{for}\ \ m\neq 1. \tag{17}$$

前章と同様，π_o 不変な $\mathbb{P}_N$ の線形部分空間の存在が以下の補題により保証される．

補題 12. $N=2M+1$，$\Gamma_1=\Gamma_2$ かつ $\vec{x}_0=\left(\frac{\pi}{2},\cdots,\frac{\pi}{2},0,\frac{2\pi}{N},\cdots,\frac{2\pi}{N}M,-\frac{2\pi}{N}M,\cdots,-\frac{2\pi}{N}\right)$ とする．この時 $2M$ 次元の集合

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\sum_{k=1}^{M}\left(b_k^+\vec{\phi}_k^++b_k^-\vec{\phi}_k^-\right),\qquad b_k^\pm\in\mathbb{R}, \tag{18}$$

は π_o 不変な部分集合である．これを $\mathbb{P}_N(\pi_o)$ と書く．

この補題が示すように，$2M$ 次元の縮約力学系が定義できるのは，極渦がともに等しい場合のみである．また線形部分空間は赤道にある N 渦点環配置を中心に持つ時のみ不変である．これは任意の極渦の強さおよび任意の緯度にある N 渦点環に対して $\mathbb{P}_N(\sigma_p)$ が定義できた状況とは異なっている．

次に渦点の個数が偶数の時の極反転変換 $\pi_e:(\Theta_m,\Psi_m)\to(\Theta'_m,\Psi'_m)$ を奇数の場合と同様に，1 番目の渦点に対する回転として定義すると以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}&\Theta'_1=\pi-\Theta_1, &&\Psi'_1=\Psi_1,\\ &\Theta'_m=\pi-\Theta_{N-m+2}, &&\Psi'_m=2\pi+2\Psi_1-\Psi_{N-m+2}, \qquad \text{for}\ \ m\neq 1.\end{aligned}$$

この変換に付随するベクトル場の変換 $\Pi_e:(F_m,G_m)\to(F'_m,G'_m)$ も同様に

$$\begin{aligned}&F'_1=-F_1, &&G'_1=-G_1,\\ &F'_m=-F_{N-m+2}, &&G'_m=-G_{N-m+2}, \qquad \text{for}\ \ m\neq 1.\end{aligned}$$

と与える．これは奇数の場合に定義した Π_o と同様である．これらの変換に対して，これまでと同様の補題が成立する．

補題 13. $N=2M$ とする．もし $\Gamma_1=\Gamma_2$ ならば，すべての $\vec{x}\in\mathbb{P}_N$ に対して $\Pi_e\mathbb{F}(\vec{x})=\mathbb{F}(\pi_e\vec{x})$ が成立する．

補題 14. $N=2M$ かつ $\Gamma_1=\Gamma_2$ とする．もし初期時刻において $\pi_e\vec{x}(0)=\vec{x}(0)$ が成立すれば，$\pi_e\vec{x}(t)=\vec{x}(t)$ がすべての時刻で成立する．

π_e 不変な軌道は以下の関係式をみたす.

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Theta_m + \Theta_{N-m+2} = \pi, \quad \Psi_m + \Psi_{N-m+2} = 2\pi, \quad \text{for } m \neq 1. \tag{19}$$

これは π_o 不変な軌道の満たす関係式 (17) と若干異なるように見えるが, 変数 Ψ_m が $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ で定義されているので, 実は同じ関係式を与えていることに注意する. 一方で, 以下の補題で与えられるように π_e 不変な $\mathbb{P}_N$ の線形部分空間の次元は $2(M-1)$ となり奇数の場合と異なっている.

補題 15. $N = 2M$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$ かつ $\vec{x}_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \cdots, \frac{\pi}{2}, 0, \cdots, \frac{2\pi}{N}(N-1)\right)$ とする. この時, $2(M-1)$ 次元線形部分空間

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \left(b_k^+ \vec{\phi}_k^+ + b_k^- \vec{\phi}_k^-\right), \qquad b_k^\pm \in \mathbb{R}$$

は π_e に対して不変である, これを $\mathbb{P}_N(\pi_e)$ と書く.

以上の補題をすべてまとめると以下の定理を得る.

定理 16. 両極に固定された渦の強さが等しいと仮定する. この時, 極反転変換 π_e あるいは π_o によって不変な縮約力学系が存在する.

さらに, 前章の結果と本章の結果を同時に用いると, 合成写像 $\sigma_p\pi_e$ や $\sigma_p\pi_o$ に対して不変な縮約力学系も定義できる.

系 17. 極渦の強さが等しいとし, 渦点の数 N が偶数かつ p を約数に持つと仮定する. この時, もし $\sigma_p\pi_e\vec{x}(0) = \vec{x}(0)$ ならば, すべての時刻に対して $\sigma_p\pi_e\vec{x}(t) = \vec{x}(t)$ が成立し, 合成変換 $\sigma_p\pi_e$ に不変な $\mathbb{P}_N$ の線形部分空間 (これを $\mathbb{P}_N(\sigma_p\pi_e)$ と書く) は以下で与えられる.

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_k \left(b_k^+ \vec{\phi}_{kq}^+ + b_k^- \vec{\phi}_{kq}^-\right), \qquad b_k^\pm \in \mathbb{R}.$$

系 18. 極渦の強さが等しいとし, 渦点の数 N が奇数かつ p を約数に持つと仮定する. この時, もし $\sigma_p\pi_o\vec{x}(0) = \vec{x}(0)$ ならば, すべての時刻に対して $\sigma_p\pi_o\vec{x}(t) = \vec{x}(t)$ が成立し, 合成変換 $\sigma_p\pi_o$ に不変な $\mathbb{P}_N$ の線形部分空間 (これを $\mathbb{P}_N(\sigma_p\pi_o)$ と書く) は以下で与えられる.

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_k \left(b_k^+ \vec{\phi}_{kq}^+ + b_k^- \vec{\phi}_{kq}^-\right), \qquad b_k^\pm \in \mathbb{R}.$$

なお, これらの極反転変換によって得られた縮約力学系に対しては, π_o および π_e 不変な軌道の満たす関係式 (17) と (19) から積分 I は自動的に 0 となっていることに注意する.

最後にこれらの結果を用いて, 両極に固定された極渦の大きさが等しい時の $N = 6$ から $N = 12$ までの不変な縮約力学系と, その力学系を定義する線形部分空間を張る基底の一覧を表 1 に与え, それらの縮約力学系の包含関係を図 2 に示す.

N	縮約力学系	基底ベクトル
6	$\mathbb{P}_6(\sigma_3)$	$\vec{\psi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_6(\sigma_2)$	$\vec{\psi}_3^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_6(\pi_e)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}$
	$\mathbb{P}_6(\sigma_3\pi_e)$	$\vec{\phi}_2^{\pm}$
7	$\mathbb{P}_7(\pi_o)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}$
8	$\mathbb{P}_8(\sigma_4)$	$\vec{\psi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\psi}_4^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_8(\sigma_2)$	$\vec{\psi}_4^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_8(\pi_e)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}$
	$\mathbb{P}_8(\sigma_4\pi_e)$	$\vec{\phi}_2^{\pm}$
9	$\mathbb{P}_9(\sigma_3)$	$\vec{\psi}_3^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_9(\pi_o)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}$
	$\mathbb{P}_9(\sigma_3\pi_o)$	$\vec{\phi}_3^{\pm}$
10	$\mathbb{P}_{10}(\sigma_5)$	$\vec{\psi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\psi}_4^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{10}(\sigma_2)$	$\vec{\psi}_5^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{10}(\pi_e)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{10}(\sigma_5\pi_e)$	$\vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}$
11	$\mathbb{P}_{11}(\pi_o)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}, \vec{\phi}_5^{\pm}$
12	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_6)$	$\vec{\psi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\psi}_4^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}, \vec{\psi}_6^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_4)$	$\vec{\psi}_3^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}, \vec{\psi}_6^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_3)$	$\vec{\psi}_4^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_2)$	$\vec{\psi}_6^{\pm}, \vec{\zeta}^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\pi_e)$	$\vec{\phi}_1^{\pm}, \vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_3^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}, \vec{\phi}_5^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_6\pi_e)$	$\vec{\phi}_2^{\pm}, \vec{\phi}_4^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_4\pi_e)$	$\vec{\phi}_3^{\pm}$
	$\mathbb{P}_{12}(\sigma_3\pi_e)$	$\vec{\phi}_4^{\pm}$

Table 1: 両極渦の強さが等しい場合に得られる，渦点の個数が $N=6$ から 12 の時の縮約力学系の一覧と，それらが定義されている線形部分空間を張る基底の一覧.

5 まとめ

本論文では極渦を持つ球面の上にある同じ強さを持つ N 渦点系方程式を考え，その中にある低次元の縮約力学系を系統的に構成する方法を与えた．どのような縮約力学系が存在するかは整数としての N の性質が重要な役割を果たす．N が p という約数を持てば $2p$ 次元の縮約系が存在し，また個数が奇数か偶数かに応じても低次元の縮約系が得られる．これらの縮約系はもとの力学系の中に埋め込まれた制限系であるので，これらの縮約系を研究することで元の N 点渦点系の軌道の性質の多くが明らかになることが期待できる．

ここで定義された p シフト変換および極反転変換は球面に対する二面体群を構成していることに注意する．こうした系の持つ群作用不変性によって周期軌道を得ることは論文 [8, 21] によってなされているが，本結果では単に周期軌道だけにとどまらず，より複雑な軌道を含む縮約系を与えている．それは N 渦点環の線形安定性解析によって得られた固有ベクトルを使ってこれらの縮約系の相空間が実は線形部分空間であることが重要な役割を果たしている．

今後はこうした縮約系の研究を通じて，不安定化した N 渦点環の挙動の詳細な記述を試みる予定である．二次元縮約系は完全可積分なので，その挙動を調べるのはハミルトニアンの等高線を調べるだけで十分である．次に簡単なのは四次元系である．既に述べた $\mathbb{P}_N(\sigma_2)$ は積分 I の存在のために完全可積分であるが，その一方で，$\mathbb{P}_N(\sigma_6\pi_e)$ や $\mathbb{P}_N(\sigma_5\pi_o)$, $\mathbb{P}_N(\sigma_5\pi_e)$ などの四次元系では $I=0$ を自動的に満たすので可積分でない．この系の挙動は複雑になるが，その解析は現在進行中である．

Acknowledgment

本研究は日本学術研究会科学技術研究費　若手研究 (A) #17684002 2006, 萌芽研究# 17654018 2006 および北海道大学 COE 活動プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」の補助を受けて行われた．

References

[1] S. Boatto and H.E. Cabral, *Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere*, SIAM J. Appl. Math., 64(2003), pp. 216–230.

[2] H.E. Cabral and D.S. Schmidt, *Stability of relative equilibria in the problem of $N+1$ vortices*, SIAM J. Math. Anal., 31(1999), pp.231–250.

[3] H.E. Cabral, K.R. Meyer and D.S. Schmidt, *Stability and bifurcation of the $N+1$ vortex problem on sphere*, Regular Chaotic Dyn., 8(2003) pp. 259–282.

[4] D.G. Dritschel, *The stability and energetics of co-rotating uniform vortices*, J. Fluid Mech., 358 (1985), pp.95–134.

[5] R. Kidambi and P.K. Newton, *Motion of three point vortices on a sphere*, Physica D, 116 (1998), pp.95–134.

[6] R. Kidambi and P.K. Newton, *Collapse of three vortices on a sphere*, Nouvo Cimento, 22C (1999), pp. 779–791.

[7] L.G. Kurakin, *On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere*, Chaos, 14 (2004), pp.592–602.

[8] F. Laurent-Polz, *Relative periodic orbits in point vortex systems*, Nonlinearity, 17 (2004) pp.1989–2013.

[9] C. Lim, *Relative equilibria of symmetric n-body problems on a sphere: inverse and direct results*, Comm. Pure. Appl. Math., 51 (1998), pp. 341–371.

[10] C. Lim, J. Montaldi, and M. Roberts, *Relative equilibria of point vortices on the sphere*, Phys. D, 148 (2001), pp.97–135.

[11] P.K. Newton, *The N-vortex problem, Analytical techniques*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[12] S. Pekarsky and J.E. Marsden, *Point vortices on a sphere: Stability of relative equilibria*, J. Math. Phys., 39 (1998), pp. 5894–5907.

[13] L.M. Polvani and D.G. Dritschel, *Wave and vortex dynamics on the surface of a sphere*, J. Fluid Mech., 255 (1993), pp.35–64.

[14] T. Sakajo, *The motion of three point vortices on a sphere*, Japan J. Indust. Appl. Math., 16 (1999), pp. 321–347.

[15] T. Sakajo, *Motion of a vortex sheet on a sphere with pole vortices*, Phys. Fluids, 16 (2004), pp. 717–727.

[16] T. Sakajo, *Transition of global dynamics of a polygonal vortex ring on a sphere with pole vortices*, Physica D, 196 (2004), pp. 243–264.

[17] T. Sakajo, *High-dimensional heteroclinic and homoclinc connections in odd point-vortex ring on a sphere*, Nonlinearity, 19 (2005), pp. 75–93.

[18] T. Sakajo, *Integrable four-vortex motion with zero moment of vorticity*, Phys. Fluids, to appear (2006).

[19] T. Sakajo, *Invariant dynamical systems embedded in the N-vortex problem on a sphere with pole vortices*, Physica D, 217 (2006), pp. 142–152.

[20] T. Sakajo, *Errata: Invariant dynamical systems embedded in the N-vortex problem on a sphere with pole vortices*, Physica D, (2006), to appear.

[21] A. Soulière and T. Tokieda, *periodic motions of vortices on surfaces with symmetry*, J. Fluid Mech., 460 (2002), pp.83–92.

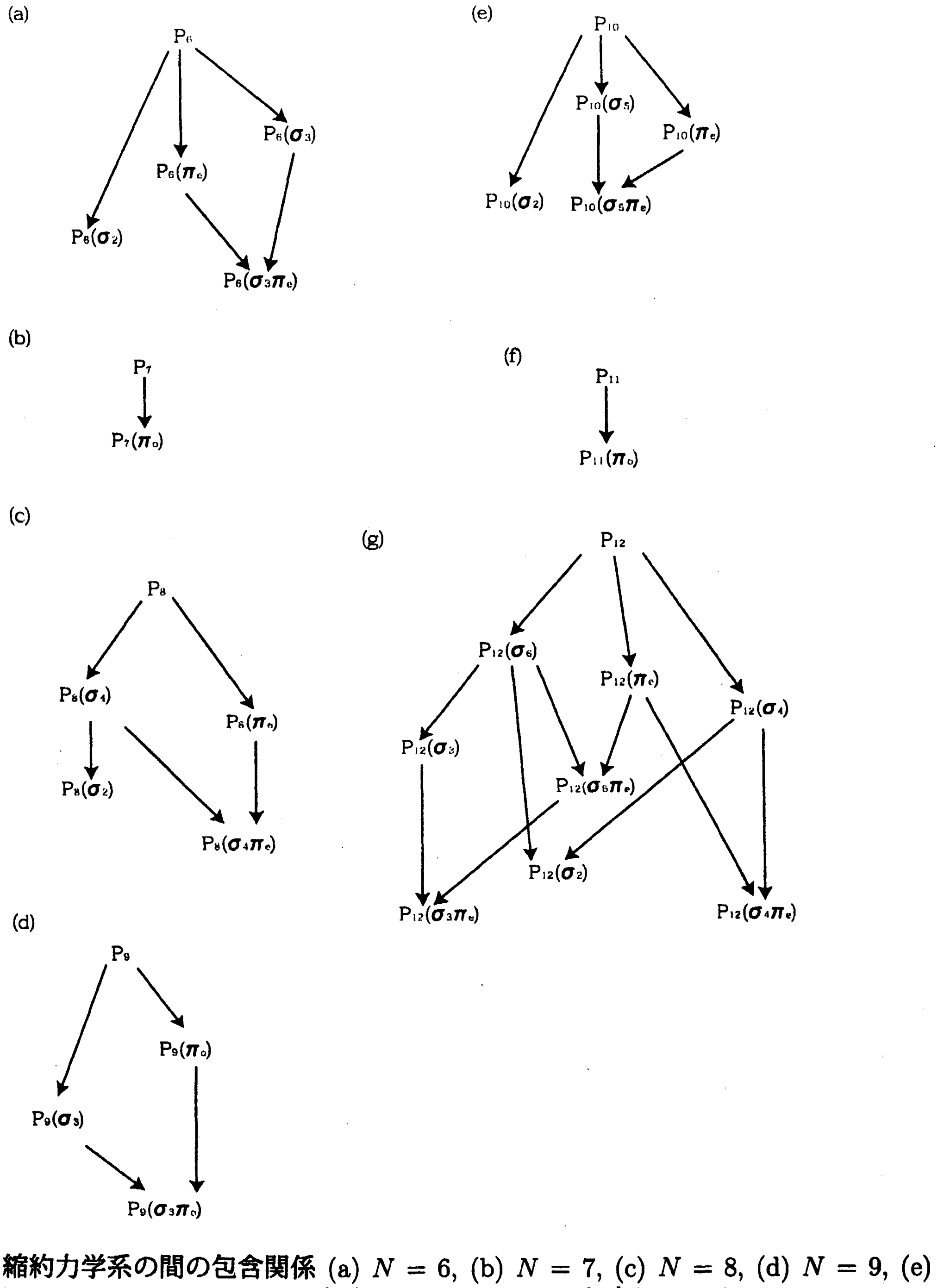

Figure 2: 縮約力学系の間の包含関係 (a) $N = 6$, (b) $N = 7$, (c) $N = 8$, (d) $N = 9$, (e) $N = 10$, (f) $N = 11$ and (g) $N = 12$. 矢印 $A \to B$ は $B \subset A$ を表している.