Title	Unstable curves at a periodic indeterminate point(Complex Dynamics and its Related Topics)
Author(s)	篠原, 知子
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1537: 46-54
Issue Date	2007-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/59035
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1537巻 2007年 46-54

Unstable curves at a periodic indeterminate point

Tomoko Shinohara [1]
Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology
E-mail address: sinohara@tokyo-tmct.ac.jp

篠原 知子
東京都立産業技術高等専門学校

Abstract

本稿では，複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像 F の周期的不定点 p に存在する不変曲線族について考察する．これまでに筆者は，カントール集合の部分集合 $J \subset \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ と対応付けられる，不定点 p を通り写像 F により不変な曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ を代数的に定義した．また，$\{W_j\}_{j\in J}$ はその様な曲線族の中で最大の族であることを示した．本稿では，ある具体的な有理写像 F の不変曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ について考察を行い，その曲線の数と性質を完全に決定する．特に，$\{W_j\}_{j\in J}$ が不安定多様体からなる族であることを示す．

1. Introduction.

複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像 F の不定点 $p \in \mathbf{P}^2$ における力学系構造の研究は，これまで Y. Yamagishi [5], [6] や T. C. Dinh, R. Dujardin, N. Sibony [2] らによって行われてきた．彼らは，周期的という性質を満たす不定点 p で，F のヤコビ行列 $DF(p)$ が安定な固有ベクトルを持つ場合について研究を行い，カントール集合 $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ によって対応付けられる安定多様体の族や，カレントの族が不定点 p において存在することを示した．

一方，これまでに筆者は，カントール集合の部分集合 $J \subset \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ によって対応付けられる，不定点 p を通り写像 F により不変な曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ を代数的に定義した．また，$\{W_j\}_{j\in J}$ は不定点 p で存在する，F により不変な曲線族の中で最大の族であることを示した．ここで，この不変曲線族は安定多様体だけではなく，中心多様体や不安定多様体も含むことから，これらの結果は Y. Yamagishi や T. C. Dinh らの結果のある種の一般化となっていることに注意しておく (詳しくは [4] 参照). 本稿では，ある具体的な有理写像 F の $\{W_j\}_{j\in J}$ について考察を行い，その曲線の数と性質を完全に決定する．特に，$\{W_j\}_{j\in J}$ が不安定多様体からなる族であることを示す．これはこれまでに知られていない新しい例である．

[1] Supported by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Grants-in-Aid for Young Scientists (B) No. 18740094

本稿の概要は以下の通りである．2 節で記号の準備を行い，これまでに得ていた Theorem 1, 2 を紹介する．3 節では，ある具体的な写像 F に対しての $\{W_j\}_{j\in J}$ を考察する．

2. 準備と Theorem 1,2.

まず，記号を準備する．$f_i(x,y,z)$, $(i=0,1,2)$ を次数 d の斉次多項式, $F:[x:y:z]\mapsto[f_0:f_1:f_2]$ を $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像，$G:(x,y,z)\mapsto(f_0,f_1,f_2)$ を $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像とする．このとき $\mathbf{C}^3$ からいくつかの解析的集合を除いたところで $\tilde{\pi}\circ G=F\circ\tilde{\pi}$ が成立する．ここで $\tilde{\pi}:\mathbf{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbf{P}^2$ は標準射影とする．点 $p\in\mathbf{P}^2$ が F の不定点であるとは，$G(\tilde{p})=(0,0,0)$ がある点 $\tilde{p}\in\tilde{\pi}^{-1}(p)$ で成り立つこととする．一般に, p が不定点であるとき, $\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ は一点にならない．ここで U_p は p の任意の開近傍とする．よって F は不定点 p では連続でない．更に，不定点 p が $p\in\bigcap_{U_p}\overline{F(U_p\setminus\{p\})}$ を満たすとき p を周期的不定点と呼ぶことにする．定義より，周期的不定点は再帰性を持っているため，不動点の場合と同様に様々な力学系構造が存在することが期待される．本稿では，有理写像 $F:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ は不定点 $p=[0:0:1]$ を持つと仮定する．しばしば，複素 2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{P}^2$ の座標近傍系 $\{[x:y:z]\in\mathbf{P}^2\mid z\neq0\}$ と同一視する．この座標近傍系上で，点 p は $p=(0,0)$ となることに注意する．点 $p_j=(0,\alpha_j)\in\mathbf{C}^2$ に対し，$\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1$ の部分集合

$$X:=\Big\{(x,y)\times[u:v]\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1\mid xv-(y-\alpha_j)u=0\Big\}$$

を定義する．X は $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^2$ の閉集合であり，部分多様体となる．X の座標近傍系は次の $\{(U^i,\mu^i)\}_{i=0,1}$ で与えられる．

$$U^0:=\{(x,y)\times[u:v]\in X\mid u\neq0\},\ \mu^0:U^0\ni(x,y)\times[u:v]\mapsto(x,v/u)\in\mathbf{C}^2,$$

$$U^1:=\{(x,y)\times[u:v]\in X\mid v\neq0\},\ \mu^1:U^1\ni(x,y)\times[u:v]\mapsto(u/v,y-\alpha_j)\in\mathbf{C}^2.$$

Definition 1 ([3] 参照). 第一成分への射影 $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1\to\mathbf{C}^2$ の X への制限写像 $\pi:X\to\mathbf{C}^2$ を点 p_j を中心とする $\mathbf{C}^2$ の blow up と定義する．また $E:=\pi^{-1}(p_j)=(0,\alpha_j)\times\mathbf{P}^1$ を除外曲線と呼ぶ．

U^i の座標を (s,t) とすると π は次の様に表される:

$$\pi:X\cap U^0\ni(s,t)\mapsto(s,st+\alpha_j)\in\mathbf{C}^2,\quad \pi:X\cap U^1\ni(s,t)\mapsto(st,t+\alpha_j)\in\mathbf{C}^2.$$

ここで $\pi : X \setminus E \to \mathbf{C}^2 \setminus \{p_j\}$ は双正則写像であることに注意する．また $\mathbf{C}^2$ を $\mathbf{P}^2$ の座標近傍系 $\{[x : y : z] \in \mathbf{P}^2 \mid z \neq 0\}$ とみなし，$\mathbf{P}^2$ の残りの座標と自然に張り合わせることで，点 $p_j = [0 : \alpha_j : 1]$ を中心とする $\mathbf{P}^2$ の blow up を定義することができる．議論を簡単にするため，$\mathbf{C}^2$ の blow up と $\mathbf{P}^2$ の blow up を同一視することにする．

周期的不定点での局所的な力学系構造の研究は最初に，Y. Yamagishi によって始められた ([5],[6] 参照)．ここでは，その結果を紹介する．点 p を中心とする $\mathbf{P}^2$ の blow up π を用いて F のリフト写像 $\tilde{F} := F \circ \pi : X \to \mathbf{P}^2$ を定義する．更に，写像 F は次の条件を満たすとする．

$$(A.0) \qquad \begin{cases} \tilde{F} \text{ は } E \text{ の近傍で正則写像で } \tilde{F}^{-1}(p) \cap E = \{p_1, p_2\} \text{ である．} \\ \text{点 } p_i \text{ の開近傍 } N_i \text{ が存在し，} \tilde{F} \text{ は } N_i \text{ 上双正則写像である．} \end{cases}$$

この条件の下で，点 p は F の周期的不定点となることに注意する．更に，$\tilde{F}$ は N_i 上，水平方向に吸引的であると仮定する．この時，カントール集合 $\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ により順序づけられた曲線の族 $\{W_j\}_{j \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}}$ が存在すること，各曲線 W_j は点 p の安定多様体になることが証明された．この曲線族は *Cantor bouquet* と呼ばれるものである (詳細は [5], [6] 参照)．

本稿では，次の様な曲線族を扱う．この曲線族は，点 p の安定多様体だけでなく，中心多様体や不安定多様体も含み，Cantor bouquet の拡張になっていることに注意する．

Definition 2. 点 p を通る曲線族 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が F により点 p で局所的に不変であるとは次の 2 条件を満たすこととする．

(1) 正則写像 $\Phi_\lambda : \Delta_{\rho_\lambda} \to \mathbf{C}^2$ で $\Phi_\lambda(0) = p$ と $\Phi_\lambda(\Delta_{\rho_\lambda}) = V_\lambda$ を満たすものが存在する，

(2) 任意の V_λ に対して，ただ一つの $\lambda' \in \Lambda$ と p のある開近傍 $N_{\lambda'}$ が存在し $F \circ \Phi_\lambda(0) = p$ と $F \circ \Phi_\lambda(\Delta_{\rho_\lambda}) \cap N_{\lambda'} \subset V_{\lambda'}$ が成立する．但し $\Delta_{\rho_\lambda} := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < \rho_\lambda\}$ とする．

本稿では，この曲線族はある正則関数のグラフとして与えられるものと仮定する．

Remark 1. 合成写像 $F \circ \Phi_\lambda$ は，点 p が不定点であっても $z = 0 \in \Delta_{\rho_\lambda}$ で定義される．実際，正則写像 $g : \Delta_{\rho_\lambda} \to \mathbf{C}^2$ で，任意の $z \in \Delta_{\rho_\lambda} \setminus \{0\}$ に対し $g(z) = F \circ \Phi_\lambda(z)$ を満たすものがただ一つ存在する (詳細は [1] 参照)．

$i=0,1$ に対して，$U^i \cong \mathbf{C}^2$ であることより，この座標を用いて $(A.0)$ の点 $p_{j_1} \in E$ を $p_{j_1}=(0,\alpha_{j_1}) \in \mathbf{C}^2$ と表す．また点 p_{j_1} における blow up π_{j_1} を次の集合 X_{j_1} を用いて X の場合と同様に定義する．

$$X_{j_1} := \left\{(s,t)\times[u:v] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1 \mid sv-u(t-\alpha_{j_1})=0\right\},$$

$$\pi_{j_1} : X_{j_1} \to \mathbf{C}^2.$$

また除外曲線を $E_{j_1} := \pi_{j_1}^{-1}(0,\alpha_{j_1}) = (0,\alpha_{j_1}) \times \mathbf{P}^1$ と定義する．更に X の場合と同様の記号を用いて，$\{(U^i_{j_1},\mu^i_{j_1})\}_{i=0,1}$ を X_{j_1} の座標近傍系とする．さらに $\mathbf{C}^2$ を X の残りの座標系と貼り合わせることで点 p_{j_1} 中心の X の blow up を定義することができる．次の定理では，同様の手順により，blow up の列を帰納的に定義する．

Theorem 1. 不定点 $p=[0:0:1]$ を持つ有理写像 $F:\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ が条件 $(A.0)$ を満たすとする．このとき，$j_1, j_2 \in \{1,2\}$ に対して次の主張が成立する；

(1) $F_0 := \pi^{-1}\circ \tilde{F} : N_{j_1} \to X$ と定義する．このとき，点 p_{j_1} は F_0 の不定点である．

点 p_{j_1} 中心の X の blow up を $\pi_{j_1}: X_{j_1} \to X$, X_{j_1} の除外曲線 を E_{j_1}, F_0 のリフト写像を $\tilde{F}_{j_1} := F_0 \circ \pi_{j_1} : \pi_{j_1}^{-1}(N_{j_1}) \to X$ と定義する．このとき，$E_{j_1} \subset \pi_{j_1}^{-1}(N_{j_1})$ であり，次が成立する:

$\tilde{F}_{j_1}|_{E_{j_1}} : E_{j_1} \to E$ は単射であり，$p_{j_1j_2} := \tilde{F}_{j_1}^{-1}(p_{j_2}) \in E_{j_1}$ とおくことができる．さらに点 $p_{j_1j_2}$ の開近傍 $N_{j_1j_2}$ が存在し，$\tilde{F}_{j_1}|_{N_{j_1j_2}}$ は双正則写像となる．

任意の自然数 n と $j_n \in \{1,2\}$ に対して，同様の操作を繰り返すことができ，次の主張が成立する；

(n) 点 $p_{j_1\cdots j_n} := \tilde{F}^{-1}_{j_1\cdots j_{n-1}}(p_{j_2\cdots j_n}) \in E_{j_1\cdots j_{n-1}}$ と写像 $F_{j_1\cdots j_n} = \pi^{-1}_{j_2\cdots j_n} \circ \tilde{F}_{j_1\cdots j_{n-1}} : N_{j_1\cdots j_n} \to X_{j_2\cdots j_n}$ を定義する．このとき点 $p_{j_1\cdots j_n}$ は $F_{j_1\cdots j_n}$ の不定点である．

点 $p_{j_1\cdots j_n}$ を中心とする $X_{j_1\cdots j_{n-1}}$ の *blow up* を $\pi_{j_1\cdots j_n} : X_{j_1\cdots j_n} \to X_{j_1\cdots j_{n-1}}$, $X_{j_1\cdots j_n}$ の除外曲線 を $E_{j_1\cdots j_n}$, $F_{j_1\cdots j_n}$ のリフト写像を $\tilde{F}_{j_1\cdots j_n} := F_{j_1\cdots j_n} \circ \pi_{j_1\cdots j_n} : \pi^{-1}_{j_1\cdots j_n}(N_{j_1\cdots j_n}) \to X_{j_2\cdots j_n}$ と定義する．このとき $E_{j_1\cdots j_n} \subset \pi^{-1}_{j_1\cdots j_n}(N_{j_1\cdots j_n})$ であり，次が成立する:

$\tilde{F}_{j_1\cdots j_n}|_{E_{j_1\cdots j_n}} : E_{j_1\cdots j_n} \to E_{j_2\cdots j_n}$ は単射であり，$p_{j_1\cdots j_{n+1}} := \tilde{F}^{-1}_{j_1\cdots j_n}(p_{j_2\cdots j_{n+1}}) \in E_{j_1\cdots j_n}$ とおくことができる．更に点 $p_{j_1\cdots j_{n+1}}$ の開近傍 $N_{j_1\cdots j_{n+1}}$ が存在し $\tilde{F}_{j_1\cdots j_n}|_{N_{j_1\cdots j_{n+1}}}$ は双正則写像となる．

これより先，Theorem 1 に現れる全ての点 $p_{j_1\cdots j_n}$ は，$p_{j_1\cdots j_n} \in U^0_{j_1\cdots j_{n-1}} \cap E_{j_1\cdots j_{n-1}}$

と仮定する．このとき $X_{j_1\dots j_{n-1}}$ の局所座標 $U^0_{j_1\dots j_{n-1}}$ を用いて $p_{j_1\dots j_n}=(0,\alpha_{j_1\dots j_n})$ とおくことができる．任意の記号列 $j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$，$j=(j_1\dots j_n,\dots)$ に対して形式的べき級数 $y=\phi_j(x)=\alpha_{j_1}x+\alpha_{j_1j_2}x^2+\cdots$ と集合

$$J:=\left\{j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}\mid \phi_j(x)\text{ の収束半径 }\rho_j\text{ が正の定数である}\right\},$$

$$\text{任意の } j\in J \text{ に対して } W_j:=\left\{(x,y)\in N_j\mid y=\phi_j(x)\ \ x\in\Delta_{\rho_j}\right\}$$

を定義する．ここで N_j は点 p のある開近傍とする．このとき，次の結果を得る．

Theorem 2.
(1) $\{W_j\}_{j\in J}$ は点 p で局所的に不変な曲線族であり，また，その中で最大のものである．ここで，最大であるとは，点 p で局所的に不変な任意の曲線族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\{W_j\}_{j\in J}$ が成り立つことである．
(2) ある単射写像 $\Psi:\{W_j\}_{j\in J}\ni W_j\mapsto j\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$，で $\Psi\circ F=\sigma\circ\Psi$ を満たすものが存在する．ここで $\sigma:\{1,2\}^{\mathbf{N}}\ni(j_1,j_2,\dots)\mapsto(j_2,j_3,\dots)\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$ は左シフト写像とする．

Theorem 1 と 2 の詳細については [4] を参照して欲しい．

3. $\{W_j\}_{j\in J}$ が不安定多様体からなる例

これ以降, $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像 F で，座標近傍 $\mathbf{C}^2$ 上次の形をしたものを考える:

$$(*)\quad F(x,y)=\left(ax,\frac{y(y-x)}{x^2}\right),\quad |a|>4.$$

この写像については，Theorem 1 と 2 が成立するので，曲線族 $\{W_j\}_{j\in J}$ が存在することがわかる．この節では，更に W_j の数と W_j が不安定多様体であることを順番に見ていく．

まず，$W_j=\{(x,y)\in\Delta_r^2\mid y=\sum\alpha_{j_1\dots j_n}x^n\}$ とおく．Theorem 2 より点 p のある開近傍 $N_{\sigma(j)}$ が存在し $F(W_j)\cap N_{\sigma(j)}\subset W_{\sigma(j)}$ が成立することから，漸化式

$$\alpha_{j_1\dots j_{n+1}}=\alpha_{j_2\dots j_{n+1}}a^n-\sum_{k+l=2,k,l\geq 2}\alpha_{j_1\dots j_k}\alpha_{j_1\dots j_l}\quad(n\geq 2)$$

を得る．これにより，以下の場合については，簡単な計算により $W_{j_1j_2\dots}$ の具体的な形を求めることができる．

$$W_{11\dots}=\left\{(x,y)\in\mathbf{C}^2\mid y=0\right\},\ W_{211\dots}=\left\{(x,y)\in\mathbf{C}^2\mid y=x\right\},$$

$$W_{2211\cdots} = \left\{(x,y) \in N_p \mid y = \phi_{2211\cdots} := x + ax^2 - a^2x^2 + \cdots\right\},$$
$$W_{1211\cdots} = \left\{(x,y) \in N_p \mid y = \phi_{1211\cdots} := -ax^2 + a^2x^3 - 2a^3x^4 + \cdots\right\}.$$

特に, $F(x,0) = (ax,0)$ より $W_{11\cdots}$ は p の不安定多様体であること, $W_{211\cdots}$, $W_{2211\cdots}$, $W_{1211\cdots}$ は $W_{11\cdots}$ の逆像であることに注意する.

ここでは，まず $W_{11\cdots}$ の F による逆像が x のグラフで表されることを示す.

$\tilde{F} := F \circ \pi(s,t)$ を $p_{j_1} = (0, \alpha_{j_1})$ のある開近傍 $N_{p_{j_1}}$ 上で Taylor 展開したものを

$$\tilde{F}(s,t) = (a_{10}s + a_{01}(t - \alpha_{j_1}) + \cdots,\ b_{10}s + b_{01}(t - \alpha_{j_1}) + \cdots) =: (f(s,t), g(s,t))$$

とおく．また

$$W_{\sigma(j)} = \{y = \phi_{\sigma(j)} = \alpha_{j_2}x + \alpha_{j_2j_3}x^2 + \cdots\}$$

とおくと，次が成り立つ.

Lemma 4. $b_{01} - \alpha_{j_2}a_{01} \neq 0$ であるとき $F^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right)$ は x のグラフで表される.

証明．定義より

$$\tilde{F}^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right) = \left\{(s,t) \in \Delta_r^2 \mid g(s,t) - \phi_{\sigma(j)}(f(s,t)) = 0\right\}$$

である．$\Phi(s,t) := g(s,t) - \phi_{\sigma(j)}(f(s,t))$ とおき，t で偏微分すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} - (\phi_{\sigma(j)})'(f(s,t))\frac{\partial f}{\partial t}(s,t),\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, \alpha_{j_1}) = b_{01} - \alpha_{j_2}a_{01}$$

が成り立つ．よって $b_{01} - \alpha_{j_2}a_{01} \neq 0$ であるとき，$\tilde{F}^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right)$ は点 p_{j_1} の近傍で s のグラフとして表されることがわかる．また，$\pi \circ \tilde{F}^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right) = F^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right)$ であること，$\tilde{F}^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right)$ が s のグラフとして表されるとき $\pi \circ \tilde{F}^{-1}\left(W_{\sigma(j)}\right)$ は x のグラフとして表されることより主張が成り立つ. □

(*) より得られる $\tilde{F}$ を $p_1 = (0,0)$ と $p_2 = (0,1)$ それぞれのある開近傍 N_{p_j} 上で Taylor 展開すると以下の形になる.

$$N_{p_1} \text{ 上 } \tilde{F}(s,t) = (as, -t + t^2),\quad N_{p_2} \text{ 上 } \tilde{F}(s,t) = (as, (t-1) + (t-1)^2).$$

これより，$\tilde{F}$ は Lemma 4 の仮定を満たすことがわかる．よって，Lemma 4 を繰り返し用いることで $W_{11\cdots}$ の F^n による逆像は全て x のグラフになり，これが $W_{j_1\cdots j_n 11\cdots}$ となる．また定義より，不安定多様体となることがわかる.

一般の $W_{j_1 j_2 \dots}$ について調べるため，次の補題を準備する．

Lemma 5.

(1) 任意の記号列 $j = (j_1, j_2, \dots) \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対し，ある正の定数の列 $\{M_n\}_{n\geq 2}$, $\{M'_n\}_{n\geq 2}$ で次を満たすものが存在する；

$M_2 = 1,\ M'_2 = 3/2,$

$n \geq 2$ に対して $M_{n+1} = M_n M'_n,\ \ 1 \leq M'_n \leq 3/2,\ \ |\alpha_{j_1 \dots j_n}| \leq M_n |a|^{\frac{n(n-1)}{2}}.$

(2) 任意の $j_1, \dots j_{n_0 - 1} \in \{1,2\}$ と $j_{n_0} = 2$ に対し，ある正の定数の列 $\{m_n\}_{2\leq n\leq n_0}$, $\{m'_n\}_{2\leq n\leq n_0}$ で次を満たすものが存在する；

$m_2 = 1, m'_2 = 3/4,$

$2 \leq n \leq n_0 - 1$ に対して $m_{n+1} = m_n m'_n,\ \ 1/2 \leq m'_n \leq 1,$

$2 \leq n \leq n_0$ に対して $m_n |a|^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq |\alpha_{j_1 \dots j_n}|.$

Lemma 5 の (1) は三角不等式を用いて証明される．ここでは (2) の証明を行う．

Lemma 5 (2) の証明．

$n = 2$ のとき．$\alpha_1 = 0$ と $\alpha_2 = 1$ より，$\alpha_{12} = -a, \alpha_{22} = a$ であるので $m_2 := 1$ とすると主張が成立する．

$n = 3$ のとき．計算により $\alpha_{112} = a^3, \alpha_{122} = -a^3 + a^2$, $\alpha_{212} = -a^3$,

$$|\alpha_{222}| = |a^3 - a^2| = |a|^3 \left(1 - \frac{1}{|a|}\right) \geq \frac{3}{4}|a|^3$$

である．よって $m'_2 = 3/4$ とすると主張が成立する．

$n = 4$ のとき．$j_4 = 2$ であることから $\alpha_{j_2 j_3 j_4}$ の評価に $n = 3$ の評価を用いることができる．これと Lemma 5 (1) を用いると

$$\begin{aligned}
\alpha_{j_1 j_2 j_3 j_4} &\geq |\alpha_{j_2 j_3 j_4}||a|^3 - 2|\alpha_{j_1 j_2}||\alpha_{j_1 j_2 j_3}| \\
&\geq m_3 |a|^3 |a|^3 - 2M_2 |a| M_3 |a|^3 \\
&= m_3 |a|^6 \left(1 - \frac{2M_2 M_3}{m_3 |a|^2}\right) \\
&= \frac{3}{4} m_3 |a|^6
\end{aligned}$$

が成立する．よって $m_3' := 3/4$ とすると主張は成立する．$n \geq 5$ の場合も同様に示される． □

Lemma 5 を用いると，$j_{n_0} = 2$ となる自然数 n_0 が無限個存在するような $j = (j_1, j_2, \ldots)$ に対して，ϕ_j の収束半径 R は $R = 0$ となることがわかる．実際，$j_{n_0} = 2$ となる $\alpha_{j_1 \cdots j_{n_0}}$ に対しては，Lemma 5 (2) より，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0-2} |a|^{\frac{n_0(n_0-1)}{2}} \leq |\alpha_{j_1 \cdots j_{n_0}}|$$

が成立する．よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \limsup_{k\to\infty, n\geq k} |\alpha_{j_1\cdots j_n}|^{\frac{1}{n}} \\ &\geq \lim_{k\to\infty, n_0\geq k} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0-2} |a|^{\frac{n_0(n_0-1)}{2}}\right\}^{\frac{1}{n_0}} = \lim_{k\to\infty, n_0\geq k} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{2}{n_0}} |a|^{\frac{n_0-1}{2}} = 0.\end{aligned}$$

以上をまとめると，以下の定理を得ることができる．

Theorem 6. $j = (j_1, j_2, \ldots) \in \{1, 2\}^{\mathbf{N}}$ を任意の記号列とする．このとき次が成り立つ：

(1) ある自然数 n_0 が存在し任意の $n > n_0$ に対し $j_n = 1$ であるとき $W_j \neq \emptyset$, $W_j = F^{-n_0}(W_{11\cdots})$ である．特に W_j は点 p の不安定多様体となる．

(2) 任意の自然数 n に対し，ある $n_0 \geq n$ で $j_{n_0} = 2$ であるものが存在するとき，$W_j = \emptyset$ である．

References

[1] J. Diller, *Dynamics of birational maps of* $\mathbf{P}^2$, Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 721–772.

[2] T. C. Dinh, R. Dujardin and N. Sibony, *On the dynamics near infinity of some polynomial mappings in* $\mathbf{C}^2$, Math. Ann. 333 (2005), 703-739.

[3] I. R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry Vols I and II*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[4] T. Shinohara, *A construction of invariant curves at a periodic indeterminate point*, Suurikaiseki kenkyuusho Koukyuroku,1494 (2006), 13–23.

[5] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[6] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003) 897–908.